

TONGSU SHUXUE MINGZHU YICONG



通俗数学名著译丛

SHULUN MIAOQU
SHUXUE NUWANG DE SHENGQING KUANDAI

[美]阿尔伯特·H·贝勒著

谈祥柏译

上海教育出版社

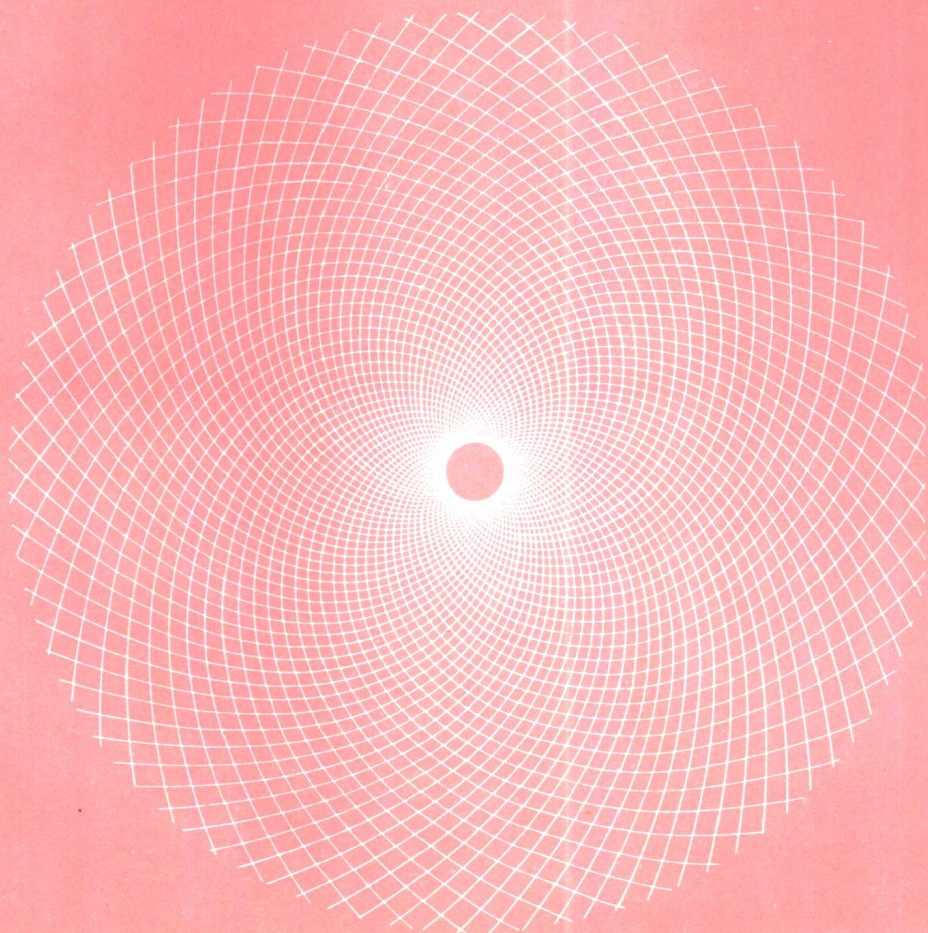
数论妙趣

—数学女王的盛情款待

数论妙趣

——数学女王的盛情款待

[美]阿尔伯特·H·贝勒著 谈祥柏译 • 上海教育出版社



图书在版编目 (C I P) 数据

数论妙趣: 数学女王的盛情款待 / (美) 贝勒著; 谈祥柏译. —上海: 上海教育出版社, 1998. 1 (2000. 3重印)

(通俗数学名著译丛 / 史树中, 李文林主编)
ISBN 7-5320-5473-X

I. 数... II. ①贝... ②谈... III. 数论-通俗读物
IV. 0156-49

中国版本图书馆CIP数据核字 (2000) 第15862号

Albert H. Beiler

Recreations In The Theory of Numbers

The Queen of Mathematics Entertains

Dover Publications, INC.

© Albert H. Beiler 1966

根据多佛出版社 1964 年第 1 版译出,

本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

通俗数学名著译丛

数论妙趣

——数学女王的盛情款待

[美]阿尔伯特·H·贝勒 著

谈 柏 祥 译

上海世纪出版集团 出版发行
上海教育出版社

(上海永福路 123 号 邮政编码: 200031)

各地新华书店经销 上海市印刷三厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 14 插页 5 字数 332,000

1998 年 1 月第 1 版 2000 年 3 月第 4 次印刷

印数 9,221—14,220 本

ISBN 7-5320-5473-X/G · 5715 定价: 18.80 元

译丛序言

数学,这门古老而又常新的科学,正阔步迈向 21 世纪.

回顾即将过去的世纪,数学科学的巨大发展,比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志.因此,对于当今社会每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学,了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要,在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面,20 世纪数学思想的深刻变革,已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法,门外汉往往只好望而却步.这样,提高数学的可接受度,就成为一种当务之急.尤其是当世纪转折之际,世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作,国际数学联盟(IMU)还专门将 2000 年定为“**世界数学年**”,其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解,特别是被普通公众所了解”.

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步,数学普及工作在我国也受到重视.早在 60 年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读

物,激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今.改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在外国已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;……等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气,有关选题逐年减少,品种数量不断下降.在这样的情况下,上海教育出版社以迎接 2000 世界数学年为契机,按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类

通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》出版成功.

让我们举手迎接 2000 世界数学年,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

1997 年 8 月

献给

克利丝

数学是科学的女王，而算术则是数学的女王。

——卡尔·弗里特列希·高斯

序

当作者还是一个学生时,一位热心的数学教授向全班介绍了 W·W·R·鲍尔(W. W. R. Ball)所写的一本书《数学娱乐与随笔》。学生们顺从地记下了书名,绝大多数人无疑转眼就忘得干干净净。多年之后,当作者向自己的几个班级提到这本书时,学生们却出乎意外地对书名表示喜爱,并随之引发了一系列的质问,“娱乐”与“数学”是互相抵触的字眼,怎能合在一起呢?这是一群工科大学生的反应,他们对数学的熟练程度在平均水平之上,那么,对一大群并非出于自觉自愿,而是被迫学习数学的人,他们的态度又将如何呢?

尽管事先并不看好,结果发现,仅仅提到几个趣题,就立即使全班学生从出了名的厌学与昏睡中惊醒过来,同数论有关的一个问题竟导致非常热烈的反响以致学生们竟然不愿再回复他们的正常课业。这些问题的刺激力在全班持续了很长时间,为此,代数、三角、解析几何、微积分的规定作业也增添了兴趣。它像是一种催化剂,本身虽然不参加化学反应,却把其他物质激活了。

对一些缺乏数学细胞的朋友(尽管如此,他们还是要曝晒在高中代数之下活活受罪)进行了相当谨慎的实验,引起的反响也同样令人满意,这就使作者产生了编写本书的想法。

一些数学家,例如 W·W·R·鲍尔与 E·卢卡(Lucas)等人曾写过质量一流的、一般题材的趣味数学读物;其他一些学

者,例如托比亚斯·但捷格(Tobias Dantzig),E·T·贝尔(Bell),爱德华·卡斯纳(Edward Kasner)则写过一些异常优秀的、介绍数学概念以及数学家传记之类的作品。但是,在英文书里,却缺少一本专讲趣味数论的书,本书试图弥补这个缺陷,为大家提供一些趣味盎然的奇珍异宝。还可以在任何一个收藏着很多数学书刊的大图书馆里,找到隐藏在枯燥乏味的技术论文底层的、为数更多的宝贝。

数论之所以具有难以抗拒的魅力,其中很重要的一个原因是它的问题浅显易懂,但特别迷人。另外,它又并不需要过多的预备知识。只要掌握一般高中程度的数学基础知识,初学者即可登堂入室,理解它的许多重要内容。正像读过几部侦探小说的人,会情不自禁地觉得自己已有了足够的本领,可以帮助警方侦破谋杀案一样,数论领域里的初学者身上很快就会长出伊卡鲁斯之翼^①,在原根与二次剩余中自由翱翔。

数学家卡尔·弗里德列希·高斯(Karl Friedrich Gauss)曾经说过:“高等算术中一些最美丽的定理具有这样的特性:它们极易从经验事实中归纳出来,但其证明却隐藏得极深,只有高人一等的研究者才能把它们挖掘出来。正是出于此种原因,赋予高等算术以神奇魅力,使之成为第一流数学家们最喜爱的科学。至于它远远凌驾于数学其他各分支之上的无限丰富性,那就更不必提了。”

作者经常遇到的两难处境是:究竟要不要讲一讲本书各个章节所涉及的理论知识,还是干脆将它删除?如果理论讲得太多,这本书就再无趣味可言。反之,理论说明往往同结果一样有滋味——有时甚至更好。基于这样一种考虑,本书还是收入了相当数量的理论性内容。读者可根据自己的爱好,或读或删。

① 伊卡鲁斯是希腊神话中的人物,他能用蜡造的翼高翔空中。后来,他在飞到太阳附近时,蜡制的翼受热融化,堕海而死。——译者注。

一般地说,书中后面几章的内容要比前几章深奥一些,所以建议读者还是按照各章的先后顺序进行阅读.为了增加阅读兴趣,问题是星罗棋布地分散在各章之中的.如在问题之后未见答案,则它在第 26 章中总可以找到.第 25 章专门列出了一百个问题,它们的解答与解法提示也包含在最后一章之中.

梅桑数,清一色的 $111\cdots 1$,以及费马数(这些题材分别在第 3,第 11 与第 17 章中阐述)的因子在近几年中又新发现了不少.由于时间紧迫,本书来不及将它们收入进去.读者可参看《计算数学》杂志,第 17 卷(1963 年)447,458 页.

阿尔伯特·H·贝勒

1963 年写于纽约

内 容 简 介

本书不仅包括平面自治系统与稳定性理论初步,而且还较系统地阐述了不少学科所需要的常微分方程分支理论.全书共十三章,有:基本定理、二维系统的平衡点、二维系统的极限环、动力系统、振动方程与生态方程、 n 维系统的平衡点、多重奇点的分支、Hopf 分支、从闭轨分支出极限环、同宿分支及异宿分支、高维问题、综合应用,以及柱面与环面上的动力系统及其应用.书末附有 90 余道习题.

本书可作为高等学校数学系高年级及研究生教材或教学参考书,也可供物理、化学、生物等有关方面科学技术工作者参考.

目 录

第 1 章	宫廷亮相	3
第 2 章	除数好散心	10
第 3 章	完美无缺	15
第 4 章	亲如手足	34
第 5 章	大师的发明	39
第 6 章	开门咒	49
第 7 章	难解饥渴	61
第 8 章	数码与 9 的魔术	68
第 9 章	记数法乱弹琴	83
第 10 章	循环到无穷	89
第 11 章	11111...111	101
第 12 章	欧拉函数	107
第 13 章	古怪的对数——回复原始	114
第 14 章	不朽的三角形	127
第 15 章	平方奇观	163
第 16 章	法莱数列	202
第 17 章	等分圆周	208
第 18 章	球戏	221
第 19 章	黄金定理	239
第 20 章	争攀高峰	251
第 21 章	分解	273

第 22 章	佩尔方程	295
第 23 章	形态学	319
第 24 章	石城虎踞	327
第 25 章	马上比武	351
第 26 章	女王的讲解:问题的解答与提示.....	364
索引		409

插 图

1. 奇妙的 28 节亲和数长链	37
2. $\frac{1}{29}$ 的循环节	97
3. 毕达哥拉斯三角形	127
4. 一条直角边等于 48 的十个毕氏三角形	135
5A. 有一边等于 120 的毕氏三角形	138
5B. 有一边等于 120 的毕氏三角形	139
5C. 有一边等于 120 的毕氏三角形	139
6. 有相等面积的毕氏三角形	151
7. 一个正方形	163
8A. 由 28 个不同正方形组装成的大正方形	190
8B. 由 38 个不同正方形组装成的大正方形	191
8C. 要求用图中的 9 个正方形组装成一个矩形	191
9. 内接正三角形与正六边形	211
10. 内接正方形与正八边形	212
11. 内接正五边形之作法	213
12. 求第四比例项	214
13. 求比例中项	215
14. 内接正十七边形的作法	219
15. 三角形数	221
16. 正方形数	222
17. 数居然有性别	224

18. 多边形数的相加	228
19. 多边形数	229
20. 素数公式的偏差	265
21. 一块因子模板	279
22. 因子分解机的齿轮	285
23. 渐近分数越来越接近于真值	308
24. $n=3,4$ 时, $u^n+v^n=1$ 的图象	344
25. 九个正方形组装成的矩形	375
26. 十一个正方形重新组装成一个正方形	375
27. 把一个 13×13 正方形重组为两个正方形	383
28. 把一个 13×13 正方形重组为两个正方形	384

图 版

A. 雷默博士的因子分解机器(照片)	284
--------------------------	-----

附 表

1. 除数和恰为平方数的某些正整数	12
2. 除数和是平方数的某些特殊立方数	12
3. 除数和是立方数的某些特殊平方数	12
4. 某些特殊平方数, 其除数和仍是平方数	13
5. 某些特殊平方数, 其真除数之和为平方数	13
6. 完全数	18
7. 梅桑数的除数	22
8. 完全数与梅桑数	25
9. 梅桑数的因子	27
10. 多重完全数	28
11. 一数的真除数乘积等于此数的某个乘幂	29
12. 一些亲和数对	35
13. 亲和三数组	37
14. 有 28 节的亲和数链	37—38
15. 大于底数 x 的最小合数除数 m , 可使 $x^{m-1}-1$ 得以被 m 整除	53
16. 使 $2^{m-1}-1$ 能被 m 整除的合数除数 m	54
17. 能使 $3^{m-1}-1$ 被 m 整除的合数除数 m	54
18. 对一切与模互质的底数, $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ 都成立的合 数模 n	55
19. $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$	57