清华大学计算机系列教材

数理逻辑与集合论

第二版

精要与题解

王　宏
杨　明　编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

数理逻辑与集合论

（第二版）

精 要 与 题 解

王 宏　杨 明　编著

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书是清华大学计算机系列教材《数理逻辑与集合论》(第二版)一书的配套教材。

全书分为两大部分:第1部分是主教材《数理逻辑与集合论》(第二版)各章的内容精要与学习指导,包括主教材中的基本概念、基本公式、定义、定理及完成习题所涉及的内容,相当于主教材内容的精华与复习提纲。第2部分是主教材相应章节的习题解答,附有主教材全部习题的参考解答或证明。部分习题除给出详细解答或证明过程外,还列出解题思路、提示,容易出现的错误和多种解法等。书中注重学习方法与逻辑思维能力的培养和训练,并照顾到不同需求和不同层次的读者。

本书读者对象为大专院校计算机系或相关专业的师生,也可供从事离散数学、计算机科学、人工智能、计算语言学等领域的自学者和科技人员参考。

书　名:数理逻辑与集合论(第二版)精要与题解
作　者:王宏　杨明　编著
出版者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
　　　　http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者:北京市清华园胶印厂
发行者:新华书店总店北京发行所
开　本:787×1092 1/16　印张:10　字数:239 千字
版　次:2001 年 8 月第 2 版　2001 年 8 月第 1 次印刷
书　号:ISBN 7-302-04528-3/TP・2682
印　数:0001～3000
定　价:16.00 元

前　　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学基础理论的核心内容。数理逻辑与集合论是离散数学的重要内容。数理逻辑与集合论课程不仅为计算机及相关专业后续课程的学习和科研工作的参与打下良好的基础，而且对培养读者的抽象思维能力、逻辑推理能力和慎密概括能力，进而提高分析问题解决问题的能力都将起到重要作用。

由于数理逻辑与集合论所研究的对象及研究方法都与普通数学有较大差别，不少初学者学习时感觉不适应，特别是面对习题作业往往觉得无从下手。此外，数理逻辑与集合论的理论内容丰富，所涉及的定义和定理较多，习题中证明题所占比例较大，对于初学计算机科学的人来说，在概念的理解和掌握以及完成习题方面会感到一定的困难。为了帮助读者学习，配合《数理逻辑与集合论》教材的教学，在广泛收集资料和多年教学经验的基础上，我们编写了《数理逻辑与集合论——精要与题解》这本书，其宗旨一方面是帮助学习数理逻辑与集合论课的读者，巩固对主教材基本知识的掌握，深化对基本概念和方法的理解；另一方面也为初学者提供解题方法的指导思路，并使读者在做完习题后有一个可供参考或对照的解答。

全书分为两大部分。第 1 部分是主教材各章中的内容精要与学习指导，主要包括基本概念、基本公式、定义、定理及完成习题所涉及的内容，相当于主教材内容的精华浓缩与复习提纲。个别章节补充了少量主教材未涉及的内容。第 2 部分为主教材相应章节中的习题详解，附有主教材全部习题的参考解答或证明。部分习题除给出详细解答或证明过程外，还列出解题思路、提示，同时指出容易出现的错误和多种解法等。书中注重学习方法与逻辑思维能力的培养和训练，并照顾到不同需求和不同层次的读者。

需要说明的是：本书的习题解答与证明虽力图详尽准确，但决非最佳形式，更非唯一标准。在表述的严谨与简洁性方面都存在一些有待改进之处。离散数学习题中的一题多解，本身就是一个拓广思维，培养能力的良好环节与途径。希望读者尽量做到独立解答，提出更多方法精巧、表述清晰的解法。

特别指出的是：本书仅是《数理逻辑与集合论》(第二版)教材的学习参考资料，并不能完全代替对主教材内容的学习与掌握。希望读者在学习过程中务必先钻研教材内容，然后经过独立思考，尽量通过主观努力完成习题作业，再参阅本书习题解答。这样才会加深理解，印象深刻，达到举一反三、触类旁通的功效。只有这样才能真正发挥本书的实际价值，这也正是本书编者的初衷。

本书收录的习题：大题 141 道，小题 505 道。

内容精要中的内容以节编序号，如序号 1,2,3，表示某节中的三个概念或需要掌握的知识点。定义与定理的编号形式及顺序与主教材相同。

感谢《数理逻辑与集合论》作者石纯一教授和王家廞教授对编写本书工作的热情鼓励和

支持。书中的习题解答部分得到了清华大学计算机系同学的积极配合。计算机系计研九的郭锐和田欣同学曾协助完成了本书中部分题目的解答。在此一并致谢。

由于时间仓促，加之作者水平有限，书中疏漏与错误在所难免，殷切希望读者在学习时，发现问题及时与作者联系，以便今后重印或再版时更正改进。

作　者

2000 年 7 月于清华园

目　　录

第一部分　内容精要

第二部分 习题解答

第一部分　内容精要

第1章　命题逻辑的基本概念

1.1　命　　题

1. 命题　命题是一个能表达判断并具有确定真值的陈述句.

2. 真值　作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的真值. 真值只有真和假两种,真记为 T,假记为 F. 真值为真的命题称为真命题,真值为假的命题称为假命题. 真命题表达的判断正确,假命题表达的判断错误. 任何命题的真值都是唯一的.

3. 命题变项　用命题标识符(大写字母)来表示任意命题时,该命题标识符称为命题变项.

4. 简单命题　无法继续分解的简单陈述句称为简单命题或原子命题(不包含任何与、或、非一类联结词的命题).

5. 复合命题　由一个或几个简单命题通过联结词复合所构成的新的命题,称为复合命题,也称为分子命题.

1.2　命题联结词及真值表

1. 命题联结词　命题联结词可将命题联结起来构成复杂的命题,是由已有命题定义新命题的基本方法. 命题联结词又可分为一元命题联结词、二元命题联结词和多元命题联结词. 常用的命题联结词包括否定词、合取词、析取词、蕴涵词和双条件词. 其他联结词还包括异或(不可兼或)、与非和或非等.

2. 否定词　否定词是一元命题联结词. 设 P 为一命题, P 的否定是一个新的命题,记作 $\neg P$,读作非 P. 若 P 为 T;$\neg P$ 为 F;若 P 为 F,$\neg P$ 为 T.

3. 合取词　合取词是二元命题联结词. 两个命题 P 和 Q 的合取构成一个新的命题,记作 $P \wedge Q$. 读作 P 和 Q 的合取(或读作 P 与 Q,P 且 Q). 当且仅当 P 和 Q 同时为 T 时,$P \wedge Q$ 为 T;否则,$P \wedge Q$ 的真值为 F.

4. 析取词　析取词是二元命题联结词. 两个命题 P 和 Q 的析取构成一个新的命题,记作 $P \vee Q$. 读作 P 和 Q 的析取(也读作 P 或 Q). 当且仅当 P 和 Q 同时为 F 时,$P \vee Q$ 的真值为 F;否则,$P \vee Q$ 的真值为 T.

5. 蕴涵词 蕴涵词是二元命题联结词. 两个命题 P 和 Q 用蕴涵词"$\rightarrow$"联结起来，构成一个新的命题，记作 $P\rightarrow Q$. 读作如果 P 则 Q，或读作 P 蕴涵 Q. 当且仅当 P 的真值为 T，Q 的真值为 F 时，$P\rightarrow Q$ 的真值为 F；否则 $P\rightarrow Q$ 的真值为 T.

6. 双条件词 双条件词是二元命题联结词. 两个命题 P 和 Q 用双条件词"$\leftrightarrow$"联结起来，构成一个新的命题，记作 $P\leftrightarrow Q$. 读作 P 当且仅当 Q，或读作 P 等值 Q. 当 P 和 Q 的真值相同时，$P\leftrightarrow Q$ 的真值为 T；否则 $P\leftrightarrow Q$ 的真值为 F.

7. 命题的解释 设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在命题 A 中的全部命题变项，给 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 各指定一个真值，称为对命题 A 的一个解释或一个赋值，命题的解释用符号 I 表示.

8. 真值表 在命题公式中，对于全部命题变项指定不同真值的所有可能的解释，确定了该命题公式的各种真值情形，把所有解释（赋值）下的取值情形列成表，称作命题公式的真值表.

1.3 合式公式

1. 合式公式 将命题变项用联结词和圆括号按照一定的逻辑关系连接起来的符号串称为合式公式(well formed formula). 当使用联结词集$\{\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$中的联结词时，合式公式的定义可归纳如下：

(1) 简单命题是合式公式.

(2) 若 A 是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式.

(3) 若 A,B 是合式公式，则$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\rightarrow B)$和$(A\leftrightarrow B)$也是合式公式.

(4) 当且仅当经过有限次地使用(1)～(3)所形成的符号串才是合式公式.

合式公式也称为命题公式，并简称为公式.

2. 联结词运算的优先级 由命题变项、命题联结词和圆括号组成命题逻辑的基本符号. 本书约定的联结词运算的优先次序为：$()$，$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$. 多个同一优先级的联结词，按照从左到右的次序，先出现者先运算.

1.4 重言式

1. 重言式 如果一个命题公式，对于它的任一解释 I 下其对应的真值都为真，则称该命题公式为重言式或永真式.

2. 矛盾式 如果一个命题公式，对于它的任一解释 I 下其对应的真值都为假，则称该命题公式为矛盾式或永假式，也称为不可满足式.

3. 可满足式 一个命题公式，如存在某个解释 I_0，在 I_0 下该公式真值为真，则称该命题公式为可满足式.

4. 代入规则 一个重言式，对其中所有相同的命题变项都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式. 这一规则称为代入规则. 换句话说，A 是一个公式，对 A 使用代入规则得到公式 B，若 A 是重言式，则 B 也是重言式. 代入规则的具体要求为：

(1) 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题.

(2) 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相

同的代换.

1.5 命题形式化

异或(不可兼或)**联结词** 异或(又称不可兼或)词是二元命题联结词. 两个命题 P 和 Q 的异或构成一个新的命题,记作 $P\bar{\vee}Q$. 当且仅当 P 与 Q 的真值相异时,$P\bar{\vee}Q$ 为 T,否则 $P\bar{\vee}Q$ 的真值为 F.

第2章　命题逻辑的等值和推理演算

2.1　等值定理

等值　给定两个命题公式 A 和 B，设 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为出现于 A 和 B 中的所有命题变项，则公式 A 和 B 共有 2^n 个解释；若在其中的任一解释下，公式 A 和 B 的真值都相同，则称 A 和 B 是等值的（或称等价），记作 $A=B$ 或 $A\Leftrightarrow B$.

定理 2.1.1　设 A,B 为两个命题公式，$A=B$ 的充分必要条件是 $A\leftrightarrow B$ 为一个重言式.

2.2　等值公式

1. 逆命题　若将 $P\rightarrow Q$ 视为正命题，则称 $Q\rightarrow P$ 为它的逆命题.

2. 否命题　若将 $P\rightarrow Q$ 视为正命题，则称 $\neg P\rightarrow\neg Q$ 为它的否命题.

3. 逆否命题　若将 $P\rightarrow Q$ 视为正命题，则称 $\neg Q\rightarrow\neg P$ 为它的逆否命题.

4. 子公式　若 X 是合式公式 A 的一部分，且 X 本身也是一个合式公式，则称 X 为公式 A 的子公式.

5. 置换规则　设 X 为公式 A 的子公式，用与 X 等值的公式 Y 将 A 中的 X 施以代换，称为置换，该规则称为置换规则. 置换后公式 A 化为公式 B，置换规则的性质保证公式 A 与公式 B 等值，即 $A=B$. 且当 A 是重言式时，置换后的公式 B 也是重言式.

6. 基本的等值公式　（命题定律）

(1) 双重否定律

$\neg\neg P=P$.

(2) 结合律

$(P\vee Q)\vee R=P\vee(Q\vee R)$.

$(P\wedge Q)\wedge R=P\wedge(Q\wedge R)$.

$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R=P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)$.

$(P\rightarrow Q)\rightarrow R\neq P\rightarrow(Q\rightarrow R)$.

(3) 交换律

$P\vee Q=Q\vee P$.

$P\wedge Q=Q\wedge P$.

$P\leftrightarrow Q=Q\leftrightarrow P$.

$P\rightarrow Q\neq Q\rightarrow P$.

(4) 分配律

$P\vee(Q\wedge R)=(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$.

$P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$.

$P\to(Q\to R)=(P\to Q)\to(P\to R)$.

$P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)\neq(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow(P\leftrightarrow R)$.

(5) 等幂律(恒等律)

$P\vee P=P$.

$P\wedge P=P$.

$P\to P=\mathrm{T}$.

$P\leftrightarrow P=\mathrm{T}$.

(6) 吸收律

$P\vee(P\wedge Q)=P$.

$P\wedge(P\vee Q)=P$.

(7) 摩根(De Morgan)律

$\neg(P\vee Q)=\neg P\wedge\neg Q$.

$\neg(P\wedge Q)=\neg P\vee\neg Q$.

对蕴涵词、双条件词作否定有

$\neg(P\to Q)=P\wedge\neg Q$.

$\neg(P\leftrightarrow Q)=\neg P\leftrightarrow Q=P\leftrightarrow\neg Q=(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$.

(8) 同一律

$P\vee\mathrm{F}=P$.

$P\wedge\mathrm{T}=P$.

$\mathrm{T}\to P=P$.

$\mathrm{T}\leftrightarrow P=P$.

还有

$P\to\mathrm{F}=\neg P$.

$\mathrm{F}\leftrightarrow P=\neg P$.

(9) 零律

$P\vee\mathrm{T}=\mathrm{T}$.

$P\wedge\mathrm{F}=\mathrm{F}$.

还有

$P\to\mathrm{T}=\mathrm{T}$.

$\mathrm{F}\to P=\mathrm{T}$.

(10) 补余律

$P\vee\neg P=\mathrm{T}$.

$P\wedge\neg P=\mathrm{F}$.

还有

$P\to\neg P=\neg P$.

$\neg P\to P=P$.

$P\leftrightarrow\neg P=\mathrm{F}$.

2.3 命题公式与真值表的关系

对任一依赖于命题变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的命题公式 A 来说，可由 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的真值根据命题公式 A 给出 A 的真值，从而建立起由 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 到 A 的真值表. 因此由命题公式列写真值表的过程是相对容易的.

反之，若给定了由 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 到 A 的真值表，可以用下述方法写出命题公式 A 对 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 的逻辑表达式.

1. 从取T的行来列写　看 A 的真值表中取 T 的行，若取 T 的行数共有 m 行，则命题公式 A 可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m$$

其中 $Q_i=(R_1\wedge R_2\wedge\cdots\wedge R_n)$，$R_i=P_i$ 或 $\neg P_i(i=1,2,\cdots,n)$

若该行的 $P_i=\mathrm{T}$，则 $R_i=P_i$，若 $P_i=\mathrm{F}$，则 $R_i=\neg P_i$.

2. 从取F的行来列写　看 A 的真值表中取 F 的行，若取 F 的行数共有 k 行，则命题公式 A 可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_k$$

其中 $Q_i=(R_1\vee R_2\vee\cdots\vee R_n)$，$R_i=P_i$ 或 $\neg P_i(i=1,2,\cdots,n)$

若该行的 $P_i=\mathrm{T}$，则 $R_i=\neg P_i$，若 $P_i=\mathrm{F}$，则 $R_i=P_i$.

2.4 联结词的完备集

1. 与非联结词　与非词是二元命题联结词. 两个命题 P 和 Q 用与非词“$\uparrow$”联结起来，构成一个新的复合命题，记作 $P\uparrow Q$. 读作 P 和 Q 的“与非”. 当且仅当 P 和 Q 的真值都是 T 时，$P\uparrow Q$ 的真值为 F，否则 $P\uparrow Q$ 的真值为 T. $P\uparrow Q=\neg(P\wedge Q)$.

2. 或非联结词　或非词是二元命题联结词. 两个命题 P 和 Q 用或非词“$\downarrow$”联结起来，构成一个新的复合命题，记作 $P\downarrow Q$. 读作 P 和 Q 的“或非”. 当且仅当 P 和 Q 的真值都为 F 时，$P\downarrow Q$ 的真值为 T，否则 $P\downarrow Q$ 的真值为 F. $P\downarrow Q=\neg(P\vee Q)$.

3. 真值函项　对所有的合式公式加以分类，将等值的公式视为同一类，从中选一个作代表称之为真值函项. 对一个真值函项就有一个联结词与之对应.

4. 联结词的完备集　设 C 是一个联结词的集合，如果任何 n 元($n\geqslant1$)真值函项都可以由仅含 C 中的联结词构成的公式表示，则称 C 是完备的联结词集合，或说 C 是联结词的完备集.

2.5 对　偶　式

对偶式　将给定的命题公式 A 中出现的 $\vee,\wedge,\mathrm{T},\mathrm{F}$ 分别以 $\wedge,\vee,\mathrm{F},\mathrm{T}$ 代换，得到公式 A^*，则称 A^* 是公式 A 的对偶式，或说 A 和 A^* 互为对偶式.

在以下定理 2.5.1～定理 2.5.6 中，

记 $A=A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$. 令 $A^-=A(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$

定理 2.5.1 $\neg(A^*)=(\neg A)^*,\neg(A^-)=(\neg A)^-$.

定理 2.5.2 $(A^*)^*=A,(A^-)^-=A$.

定理 2.5.3 $\neg A=A^{*-}$.

定理 2.5.4 若 $A=B$,必有 $A^*=B^*$.

定理 2.5.5 若 $A\to B$ 永真,必有 $B^*\to A^*$ 永真.

定理 2.5.6 A 与 A^- 同永真,同可满足;$\neg A$ 与 A^* 同永真,同可满足.

2.6 范　　式

1. 文字与互补对 命题变项 P 及其否定式$\neg P$ 统称文字.且 P 与$\neg P$ 称为互补对.

2. 合取式 由文字的合取所组成的公式称为合取式.

3. 析取式 由文字的析取所组成的公式称为析取式.

4. 析取范式 析取范式是形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$$

的公式,其中 $A_i(i=1,\cdots,n)$为合取式.

5. 合取范式 合取范式是形如

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$$

的公式,其中 $A_i(i=1,\cdots,n)$为析取式.

6. 范式存在定理 任一命题公式都存在与之等值的合取范式和析取范式.但命题公式的合取范式和析取范式不是唯一的.

7. 极小项 n 个命题变项 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 组成的合取式

$$Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_n$$

其中 $Q_i=P_i$ 或$\neg P_i(i=1,\cdots,n)$.即每个命题变项与它的否定式不同时出现,但二者之一必出现且仅出现一次.则称合取式 $Q_1\wedge Q_2\wedge\cdots\wedge Q_n$ 为极小项,并以 m_i 表示.

8. 极大项 n 个命题变项 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 组成的析取式

$$Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_n$$

其中 $Q_i=P_i$ 或$\neg P_i(i=1,\cdots,n)$.即每个命题变项与它的否定式不同时出现,但二者之一必出现且仅出现一次.则称析取式 $Q_1\vee Q_2\vee\cdots\vee Q_n$ 为极大项,并以 M_i 表示.

9. 主析取范式 设由 n 个命题变项构成的析取范式中所有的合取式都是极小项,则称该析取范式为主析取范式(仅由极小项构成的析取范式称为主析取范式).

10. 主合取范式 设由 n 个命题变项构成的合取范式中所有的析取式都是极大项,则称该合取范式为主合取范式(仅由极大项构成的合取范式称为主合取范式).

11. 主析取范式定理 任一含有 n 个命题变项的公式,都存在唯一的与之等值的且恰仅含这 n 个命题变项的主析取范式.

12. 主合取范式定理 任一含有 n 个命题变项的公式,都存在唯一的与之等值的且恰仅含这 n 个命题变项的主合取范式.

13. 极小项的性质

(1) 任一含有 n 个命题变项的公式,所有可能的极小项的个数和该公式的解释个数相同,都是 2^n.

(2) 每个极小项只在一个解释下为真.

(3) 极小项两两不等值,并且 $m_i \wedge m_j = \mathrm{F}(i \neq j)$.

(4) 任一含有 n 个命题变项的公式,都可由 k 个($k \leqslant 2^n$)极小项的析取来表示.

(5) 恰由 2^n 个极小项的析取构成的公式,必为重言式. 即

$$\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = \mathrm{T}$$

14. 极大项的性质

(1) 任一含有 n 个命题变项的公式,所有可能的极大项的个数和该公式的解释个数相同,都是 2^n.

(2) 每个极大项只在一个解释下为假.

(3) 极大项两两不等值,并且 $M_i \vee M_j = \mathrm{T}(i \neq j)$.

(4) 任一含有 n 个命题变项的公式,都可由 k 个($k \leqslant 2^n$)极大项的合取来表示.

(5) 恰由 2^n 个极大项的合取构成的公式,必为矛盾式. 即

$$\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = \mathrm{F}$$

2.7 推理形式

1. 推理形式 将以自然语句描述的推理关系引入符号,抽象化并以条件式的形式表示出来便得到推理形式. 推理形式由前提和结论部分组成:前提真,结论必真的推理形式为正确的推理形式.

2. 重言蕴涵 给定两个公式 A,B,如果当 A 取值为真时,B 就必取值为真,则称 A 重言(永真)蕴涵 B. 或称 B 是 A 的逻辑推论. 并用符号

$$A \Rightarrow B$$

表示.

3. 重言蕴涵的几个结果

(1) 若 $A \Rightarrow B$ 成立,若 A 为重言式则 B 也是重言式.

(2) 若 $A \Rightarrow B$,且 $B \Rightarrow A$ 同时成立,必有 $A = B$. 反之亦然.

(3) 若 $A \Rightarrow B$,且 $B \Rightarrow C$ 同时成立,则有 $A \Rightarrow C$.

(4) 若 $A \Rightarrow B$,且 $A \Rightarrow C$ 同时成立,则有 $A \Rightarrow B \wedge C$.

(5) 若 $A \Rightarrow C$,且 $B \Rightarrow C$ 同时成立,则有 $A \vee B \Rightarrow C$.

2.8 基本的推理公式

定理 2.8.1 $A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \rightarrow B$ 为重言式.

定理 2.8.2 $A \Rightarrow B$ 成立的充分必要条件是 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式.

基本的推理公式

(1) $P \wedge Q \Rightarrow P$

(2) $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$

(3) $\neg(P\to Q)\Rightarrow\neg Q$

(4) $P\Rightarrow P\vee Q$

(5) $\neg P\Rightarrow P\to Q$ （2 式的逆否定理）

(6) $Q\Rightarrow P\to Q$

(7) $\neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$

(8) $P\wedge(P\to Q)\Rightarrow Q$ （假言推理，分离规则）

(9) $\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$ （8 式的逆否定理）

(10) $(P\to Q)\wedge(Q\to R)\Rightarrow P\to R$ （三段论）

(11) $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R)\Rightarrow P\leftrightarrow R$

(12) $(P\to R)\wedge(Q\to R)\wedge(P\vee Q)\Rightarrow R$

(13) $(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(P\vee R)\Rightarrow Q\vee S$

(14) $(P\to Q)\wedge(R\to S)\wedge(\neg Q\vee\neg S)\Rightarrow\neg P\vee\neg R$

(15) $(Q\to R)\Rightarrow((P\vee Q)\to(P\vee R))$

(16) $(Q\to R)\Rightarrow((P\to Q)\to(P\to R))$

2.9 推理演算

1. 使用推理规则的推理演算方法 从前提 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 出发，通过使用引入的几条推理规则和基本的推理公式，逐步推演出结论 B.

2. 基本推理规则

(1) 前提引入规则 在推理过程中，可以随时引入前提.

(2) 结论引用规则 在推理过程中所得到的中间结论，可作为后续推理的前提.

(3) 代入规则 在推理过程中，对重言式中的命题变项可使用代入规则.

(4) 置换规则 在推理过程中，命题公式中的任何子公式都可以用与之等值的命题公式来置换.

(5) 分离规则(假言推理) 若已知命题公式 $A\to B$ 和 A 成立，则有命题公式 B.

(6) 条件证明规则.

2.10 归结推理法

1. 归结法 归结法是仅用一条归结推理规则的机械推理法，它是机器定理证明的重要方法.

2. 归结证明过程

(1) 为证明 $A\to B$ 是重言式，依定理 2.8.2，等价于证明 $A\wedge\neg B$ 是矛盾式.

(2) 从 $A\wedge\neg B$ 出发，建立子句集 S：先将 $A\wedge\neg B$ 化成合取范式，进而由所有子句(析取式)构成子句集 S.

(3) 对 S 中的子句作归结(消互补对)，并将归结式仍放入 S 中. 重复该过程.

(4) 直至归结出空子句(矛盾式).