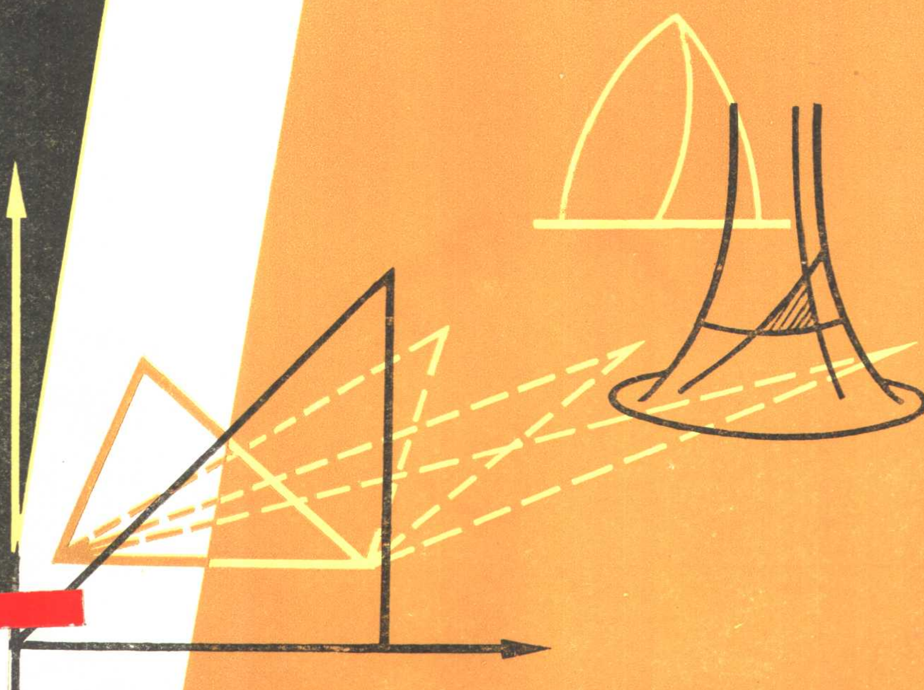
三角形内角和等于180°吗？



IRANKEXUE XIAOCONGSHU

自然科学小丛书

北京出版社

自然科学小丛书

三角形内角和等于180°吗？

北京出版社

自然科学小丛书

三角形内角和等于180°吗?

梅 向 明

•

北 京 出 版 社 出 版

(北京崇文门外东兴隆街51号)

新华书店北京发行所发行

北 京 印 刷 二 厂 印 刷

•

787×1092毫米 32开本 2.625印张 39,000字

1980年10月第1版 1980年10月第1次印刷

印数 1—39,000

书号：13071·107 定价：0.20元

目　录

一、从三角形的内角和谈起 ……………………… (1)

为什么三角形内角和等于180°?(2)　球面上的怪现象!(5)　三角形内角和不一定等于180°!(7)

二、欧几里得的《几何原本》 ……………………… (9)

几何学是怎样产生的(9)　毕达哥拉斯和欧几里得(13)　《几何原本》的体系(14)

三、平行公理能够证明吗?……………………… (18)

第五公设与平行公理是等价的(18)　平行公理的另一等价命题(20)　勒让德尔的工作(22)　勒让德尔的错误(30)

四、一个新的几何世界——非欧几何 ………… (34)

高斯、波约伊和罗拔切夫斯基(34)　罗氏几何的诞生(39)　另一种非欧几何——黎曼几何(50)　罗氏几何的模型——伪球面(53)　庞加莱的罗氏几何模型(57)　克莱恩的罗氏几何模型(59)

五、非欧几何与物理学的革命 ……………………（62）

两条基本假设（62） 洛伦兹——爱因斯坦变换式（64） 狭义相对论的主要结果（67） 广义相对论的时空观念——弯曲的时空（70） 惯性系与非惯性系（70） 等效原理（73） 广义相对论的一个预测（75）

结束语 ……………………………………………（77）

一、从三角形的内角和谈起

“三角形的内角和等于180°”这条定理是初等几何中最基本的定理之一。如果取消了这条定理，也就是说，如果三角形的内角和不等于180°的话，那么就会有许许多多奇怪的事情发生了。举一些例子来说：给出一个四边形，如果用它的一条对角线把四边形剖分成两个三角形，由于每一个三角形的内角和不是180°，因此四边形的内角和也就不等于360°了。如果这样的话，矩形也就不能存在，因为一个四边形，即使它有三个内角是90°，但是它的第四个内角却不等于90°；正因为矩形不存在，将无法判断两条平行线之间的距离是否相等；另一方面，相似三角形的判定定理也不成立了，因为给出两个三角形，它们有两对角相等，但是由于三角形的内角和不等于180°，所以第三对角就不一定相等，因此它们就不一定相似……。以上这些例子说明，如果三角形的内角和不等于180°的话，初等几何将会变得面目全非。

此外，三角形内角和定理对于初等数学的其它分支影响也是很深的，例如平面三角学：如果三角形的内角和不等于180°，那末一个直角三角形的两个锐角将不是互为余角（即加起来不等于90°），因此许多三角公式就不成立了。

为什么三角形内角和等于180°？

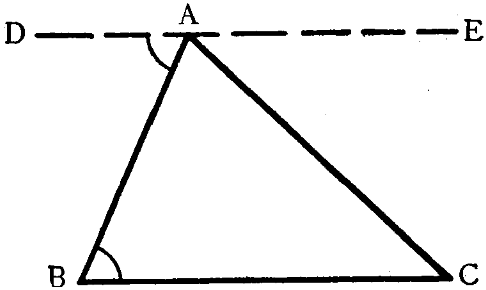


图 1

我们先回忆一下，初等几何中三角形内角和定理是怎样证明的。

给出$\triangle ABC$（见图1），过顶点A作直线DE使得

$$\angle DAB=\angle B$$

则直线DE一定平行于BC，即直线DE和BC无论怎样延长也不会相交。

要证明上述论断，只须注意：直线DE和BC之间只存在三种关系：彼此延长后在右侧相交；在左侧相交；不相交，即平行。只须否定前面两种可能性，那末DE就只可能平行BC了。

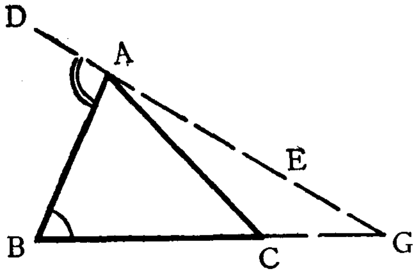


图 2

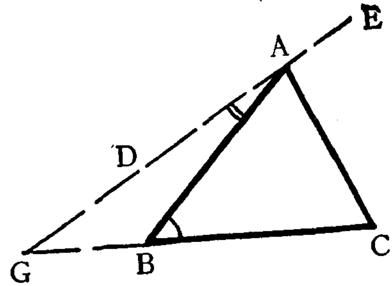


图 3

如果直线 DE 和 BC 延长后在右侧相交于 G（见图2)，则$\triangle ABG$ 的外角 $\angle DAB$ 必大于它不相邻的内角，因此当然有

$$\angle DAB > \angle B$$

与作法矛盾！

如果直线 DE 和 BC 延长后在左侧相交于 G（见图3），则$\triangle ABG$ 的外角$\angle B$ 也大于它不相邻的内角，即

$$\angle DAB < \angle ABC$$

这也与作法矛盾。

所以直线 DE 一定平行 BC。

过 A 点作平行 BC 的直线 DE，三角形内角和定理就容易证明了。

因为 $DE \parallel BC$ （见图1)，根据平行线的性质定理："两条平行直线被第三条直线所截，它们的内错

角相等”，

$$\therefore \angle CAE=\angle C$$

又因 $\angle DAB=\angle B$

$$\therefore \angle A+\angle B+\angle C=$$

$$\angle BAC+\angle DAB+\angle CAE=180^{\circ}$$

证毕。

但是读者注意，以上证明中必须用到平行线的性质定理：“两条平行直线被第三条直线所截，它们的内错角相等”。$\angle CAE=\angle C$ 这个论断，正是由这条定理所保证的。那末，这条平行线的性质定理又是如何证明的？请看图 4。

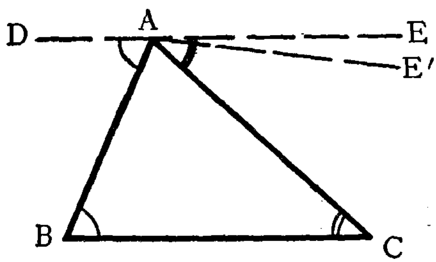


图 4

过 A 点作直线 AE' 使得

$$\angle CAE'=\angle C$$

根据以上分析，同样有

$$AE' \parallel BC$$

但是我们已经作 $AE \parallel BC$，根据平行公理：**“过直线外一点，只能作一条直线和给定的直线平行”**，因此，直线 AE' 非重合于 AE 不可。

$$\therefore \angle CAE=\angle CAE'=\angle C$$

以上关于三角形内角和定理的证明概括起来就是：从平行公理出发，证明平行直线被第三条直线所截时内错角相等，然后再根据这条平行线的性质定理，证明三角形的内角和等于180°。这就说明，正是平行公理保证了三角形内角和定理的正确性。那末为什么把平行公理叫做“公理”而不叫做“定理”呢？这是因为它只是大家公认的事实，但是却无法从理论上严格证明它！

现在已经弄清楚，只要承认平行公理，我们就可以证明三角形的内角和等于180°。然而，活生生的事实告诉人们：三角形的内角和毕竟不一定等于180°。下面我们将举出一个实例来说明这一点。这例子说明那条人们公认的平行公理，实际上并不是总是成立的。

球面上的怪现象！

当我们在地平面上画一条直线时，仔细想一想，这条直线究竟直不直呢？由于地球近似于一个球形，地平面实际上是球面的一部分。什么是球面上的“直线”呢？它应该是在球面上连结两个点的所有线中距离最短的一条。可以证明：球面上距离最短的线是大圆，即过球心的平面截球面所得的圆（见图5）。在

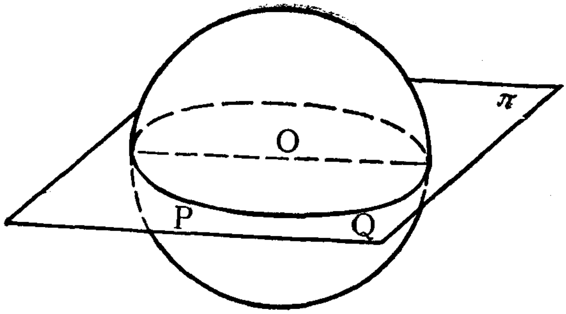


图 5

平面上，过两点只存在一条直线；类似地，在球面上，过两点也只存在唯一大圆。例如 P 和 Q 是球面上两点，P、Q 和球心 O 只存在一个平面 π，π 与球面的交线即为所求的过 P 和 Q 两点的大圆。根据以上分析，地平面上的“直线”，实际上并非真正的直线，而是地球面上的大圆弧。如果我们在地平面上画一三角形，它实际上是地球面上由三条大圆弧所围成的图形。下面我们要指出：球面上三角形的内角和并不等于 180°，而是大于 180°！

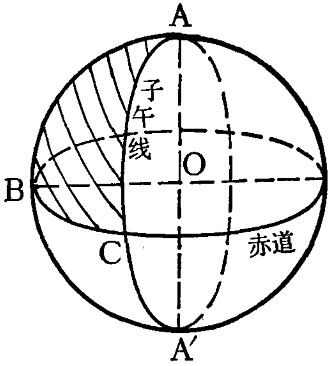


图 6

设图 6 中 A 和 A' 分别是地球的北极和南极，B 和 C 是地球赤道上两点，过 A、A' 和 B 三点的半平面和地球面交于过 B 点的子午线（即地球仪上的经线，也就是大圆弧 $\widehat{ABA'}$），过 A、A' 和 C 三点的半平面和地球面交于过 C 点的子午线（大圆弧 $\widehat{ACA'}$）。在球的上半部，由这两条子午线与赤道围成一个球面三角形 ABC。我们知道过 B 和 C 点的子午线都垂直于赤道，所以球面三角形 ABC 中已经有两个内角（$\angle ABC$ 和 $\angle ACB$）等于 90°，因此它的内角和一定大于 180°。

三角形内角和不一定等于 180°！

以上例子说明：球面上三角形的内角和并不等于 180°，而是大于 180°！当然，平行公理在球面上不能成立。事实上，球面上任意两条“直线”（也就是任意两个大圆）一定是相交的，因此球面上不存在平行线，也就谈不上有什么“平行公理”。

球面上三角形内角和大于 180° 的事实启发我们去观察别的曲面上的三角形。本书的后半部分将指出：存在这样一种曲面，它上面的三角形的内角和是小于 180° 的。因此在这种曲面上，平行公理也不成立。但是奇怪的是：这种曲面与地球面不一样，它上

面是存在平行线的，而且过直线外一点可以作无数条直线与给定的直线平行。

综上所述，三角形的内角和不一定等于180°，同时平行公理也不一定成立。本书的目的，就是想围绕初等几何中的平行公理和三角形的内角和的问题，向读者介绍一下初等几何发展的历史，并且说明非欧几何是如何产生的以及它对近代物理中相对论思想的形成的影响。

二、欧几里得的《几何原本》

几何学是怎样产生的

正如恩格斯在《反杜林论》中所说的：几何学是“从丈量土地、测量容积和制造器皿”等生产实践活动中产生和总结出来的。我国现存的最古老的数学文献是《周髀算经》，传说是商周时代遗留下来的，其中记载了一些几何知识，例如“径一周三”，这就是说：“如果圆周的直径为一，则周长为三”。用今天的语言来说，就是“圆周率π近似于3”。这个论断大概是我们的祖先从制造车轮的实践中总结出来的。这本书中还有这样一句话：“勾三股四弦五”，也就是说：“如果直角三角形的两条直角边的长分别为三和四，则斜边之长为五”。事实上这条规律直到今天还有一些瓦工用它来检验在大地上所画的两条直线是否成直角（见图7）。他们从所画的两条直线的交点出发，在两条直线上分别量长度3丈和4丈，如果另外两端点之间的距离正好是

5丈，那末所画的两直线正好构成直角。目前从地下

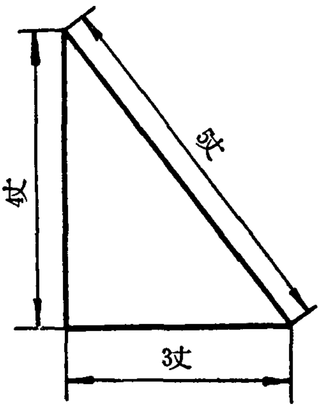


图 7

发掘出来的文物中最古老的数学文献之一是1858年苏格兰人兰德（A.H.Rind）从埃及一个金字塔（古帝王的坟墓）中发现的一份数学纸草*卷，它是公元前1650年的遗物，是死者让他手下的人手抄的一份材料，上面记载了85个数学问题，其中有一些是属于几何的。例如这份数学纸草卷中给出了下列计算圆面积的方法：

问题：已知圆形土地的直径是9米，问它的面积等于多少？

答：直径减去它自身的1/9，剩下8，再乘以8，得64，这就是所求土地的面积。

如果用d表示圆的直径，那末古埃及数学家的圆面积公式，用今天的语言来表达就是

$$A=\left(\frac{8}{9}d\right)^2=\frac{64}{81}d^2$$

其中A表示圆的面积。与今天算术课本上的圆面积公

* 是一种可以写字的草。

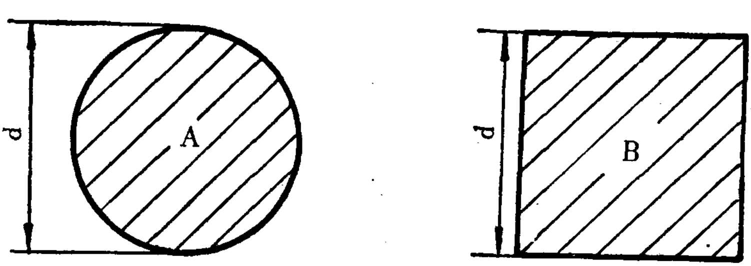
式

$$A=\frac{1}{4}\pi d^2$$

比较，说明古埃及人已经知道圆周率π的近似值：

$$\pi\approx\frac{64\times 4}{81}=3.1605$$

它与通常采用的π的近似值3.14，误差只是0.02。这对于距今约4000年前的人类的祖先来说，是一个了不起的结果。根据某些数学史家推测，这个结果大概是用试验的办法得到的。先在平地上画一个直径为d的圆，用谷子铺满它，数一数谷子的粒数，再用d为边长画一正方形，用同样的谷粒把它铺满，再数一数谷子的粒数；最后计算这两种粒数之比（见图8)。这样反复实验多次，然后归纳出$\frac{64}{81}$这个比数来。



A=圆的面积　　B=正方形的面积

$A:B=64:81$

图 8

更令人吃惊的是：这份从金字塔中发掘出来的数学史料中还给出了计算正棱台体积的公式。设正棱台的上底和下底分别是边长为 a 和 b 的正方形，高为 h（见图 9），则正棱台的体积公式是

$$V=\frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$$

这个结果大概也和圆面积的公式一样，是用纯经验的办法得到的。

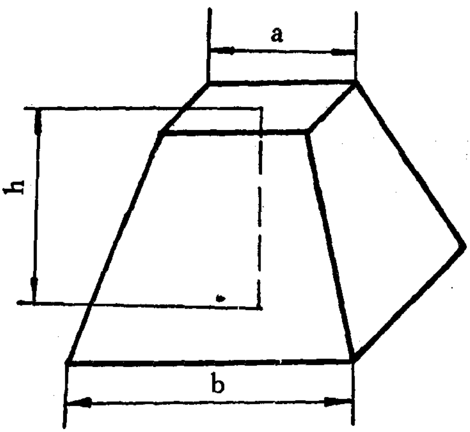


图 9

我国的《周髀算经》和这份埃及古纸草卷一样，叙述方式也是一问一答式的，材料中只有问题和答案，至于这些答案是如何得到的，材料中没有作任何说明。因此很难推测当时我们的祖先是否已掌握论证的思想方法。不过多数数学史家认为：无论是古埃及还是我国商周时期，当时的人类大概还没有发展到论证的水平。以上这些结果是人类长时期从事生产劳动，