

普通高等教育经济、管理类专业适用教材

# 经济数学

## 微积分

JING JI SHU XUE · WEI JI FEN

◎ 主 编 李晋明 李朝阳

经济管理出版社

普通高等教育经济、管理类专业适用教材

# 经济数学

(微积分)

主编 李晋明 李朝阳

经济管理出版社

责任编辑 贾晓建  
版式设计 徐乃雅  
责任校对 郭虹生

图书在版编目(CIP)数据

经济数学·微积分/李晋明,李朝阳主编.-北京:经济管理出版社,2001.7

ISBN 7-80162-188-3

I. 经… II. ①李…②李… III. ①经济数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 23021 号

经济数学  
(微积分)

主编 李晋明 李朝阳

---

出版:经济管理出版社

(北京市海淀区北蜂窝8号中雅大厦11层 邮编100038)

发行:经济管理出版社总发行 全国各地新华书店经销

印刷:北京忠信诚胶印厂

---

850 mm×1168 mm/32      13.25 印张      343 千字  
2001年7月第1版      2004年4月北京第3次印刷

印数:12001—17000册

---

ISBN7-80162-188-3/F·180

定价:20.00元

---

·版权所有 翻印必究·

凡购本社图书,如有印装错误,由本社发行部负责调换。

通讯地址:北京阜外月坛北小街2号 邮编:100836

联系电话:(010)68022974

# 前 言

数学是研究现实社会中空间形式与数量关系的一门学科,它不仅是科学、技术、工程的基础,而且在经济、管理等社会学科的研究中有广泛的应用.那么,如何反映数学在经济、管理等方面的应用,如何体现“数学教育不仅是培养现代技术人才的最重要的素质教育,也是人才培养竞争的关键因素”,如何实施将教学重点从仅仅“为专业课程提供数学工具”扩展到“提高大学生的数学素质”上来,这本《经济数学(微积分)》教材正是充分体现了这种指导思想与精神.

为了贯彻落实教育部《面向社会 21 世纪教育振兴行动计划》,本书根据教育部针对普通高等院校经济、管理类专业核心课程颁布的经济数学教学大纲,结合编者长期从事经济、管理类各专业《微积分》课程教学的丰富经验与体会,并参考大量近年来国内外相关教材与参考书的内容集体编写而成的.

本教材不仅继承了经典微积分的层次清晰、基本概念和基本原理阐述准确、论证严谨的基本思想与基本方法,而且还较现有的《微积分》教材有以下几方面的特色:

1. 充分利用了微积分这一特殊的工具解决经济、管理中大量的实际问题,重视理论联系实际.除了在各章中介绍一些实际应用以外,还专门利用一章的篇幅详细阐述了微积分在经济、管理中的应用.

2. 在内容的编排上,既充分展示了微积分作为现代

数学基础的内在精华,同时也将其特有的严密性、逻辑性及思想方法与实际应用进行了有机的结合。

3. 每章中除了编排有大量丰富的例题以外,还配置了逾千道不同类型的习题.既有基本练习题,又有较难的开扩题,更有灵活的综合题,能够较好地满足不同层次学生的要求.这在目前各类高等院校所使用的教材中是不多见的。

本教材适用于经济、管理类各院校的学生使用.在使用本教材过程中,应根据各专业的具体教学需要,制订相应的学时,选用适当的内容。

本教材亦可作为自学考试、各类成人教育、高等职业教育的参考书,也可作为经济、管理工作者的参考资料。

本教材由李晋明、李朝阳担任主编,参加编写工作的有李晋明(第一章、第二章、第三章、第四章),李朝阳(第五章、第六章、第十一章),施明存(第七章、第八章、第九章),黄先开(第十章)等老师,最后由李晋明负责统稿。

本教材由中央财经大学陈文灯教授审定。

本书作为北京工商大学(原北京商学院)教学改革立项教材,始终得到学校有关各方面的大力支持,在此一并表示诚挚的谢意。

限于编者的水平,书中难免有不妥之处,希望读者批评指正,以便今后修改,使其趋于完善。

编者  
2001年7月

# 目 录

<b>第一章 函数</b> .....	( 1 )
第一节 函数 .....	( 1 )
第二节 常见的函数 .....	( 7 )
第三节 函数的运算 .....	(15)
第四节 初等函数 .....	(20)
第五节 经济学中的常见函数 .....	(29)
习题一 .....	(37)
<b>第二章 极限与连续</b> .....	(41)
第一节 数列的极限 .....	(41)
第二节 函数的极限 .....	(45)
第三节 无穷小量与无穷大量 .....	(54)
第四节 极限的运算 .....	(58)
第五节 极限的存在准则与两个重要极限 .....	(68)
第六节 函数的连续性 .....	(76)
习题二 .....	(89)
<b>第三章 导数与微分</b> .....	(95)
第一节 导数的概念 .....	(95)
第二节 导数的运算法则 .....	(104)
第三节 初等函数的求导 .....	(113)
第四节 隐函数求导法与对数求导法 .....	(115)
第五节 高阶导数 .....	(118)

第六节	函数的微分	(122)
* 第七节	由参数方程所确定的函数的求导方法	(134)
	习题三	(138)
<b>第四章</b>	<b>中值定理与导数的应用</b>	(146)
第一节	中值定理	(146)
第二节	洛比达(L'Hospital)法则	(154)
第三节	函数的增减性	(164)
第四节	函数的极值	(167)
第五节	曲线的凹凸性与拐点	(175)
第六节	函数图形的描绘	(179)
第七节	微分学在经济中的应用	(184)
	习题四	(195)
<b>第五章</b>	<b>不定积分</b>	(202)
第一节	不定积分的概念及性质	(202)
第二节	不定积分的计算	(207)
	习题五	(232)
<b>第六章</b>	<b>定积分</b>	(238)
第一节	定积分的概念	(238)
第二节	定积分的性质	(242)
第三节	微积分基本公式	(245)
第四节	定积分的换元法	(253)
第五节	定积分的分部积分法	(258)
第六节	广义积分与 $\Gamma$ 函数	(259)
第七节	定积分的几何应用	(266)
	习题六	(270)

<b>第七章 多元函数微分学</b> .....	(277)
第一节 空间解析几何简介.....	(277)
第二节 多元函数的概念.....	(283)
第三节 偏导数与全微分.....	(286)
第四节 多元复合函数微分法与隐函数微分法.....	(294)
第五节 多元函数的极值与最值.....	(302)
习题七.....	(307)
<b>第八章 二重积分</b> .....	(312)
第一节 二重积分的概念与性质.....	(312)
第二节 二重积分的计算方法.....	(316)
习题八.....	(330)
<b>第九章 无穷级数</b> .....	(333)
第一节 常数项级数的概念与性质.....	(333)
第二节 正项级数敛散性的判别法.....	(339)
第三节 任意项级数敛散性的判别法.....	(346)
第四节 幂级数.....	(351)
第五节 函数展开成幂级数.....	(357)
习题九.....	(362)
<b>第十章 微分方程</b> .....	(366)
第一节 微分方程的基本概念.....	(366)
第二节 一阶微分方程.....	(369)
第三节 可降阶的高阶微分方程.....	(381)
第四节 二阶常系数线性微分方程.....	(384)
习题十.....	(391)
<b>第十一章 应用案例</b> .....	(395)

案例一	外币兑换中的损失·····	(395)
案例二	蛛网模型·····	(395)
案例三	贷款的最大利润·····	(398)
案例四	酒瓶对酒厂利润的影响·····	(399)
案例五	鲑鱼问题·····	(400)
案例六	鱼群的适度捕捞·····	(400)
案例七	雪球融化问题·····	(402)
案例八	天然气产量的预测·····	(403)
案例九	商品的贮存费需要多少·····	(404)
案例十	更新机器的最佳时间·····	(404)
案例十一	终身供应润滑油所需的数量·····	(405)
案例十二	在确定的预算下,劳动力与资本的 最佳配置·····	(406)
案例十三	销售量的预测·····	(407)
案例十四	火山喷发后高度的变化·····	(408)
案例十五	储蓄问题·····	(409)
案例十六	经济中的乘子效应·····	(410)
案例十七	游船上的传染病人数量·····	(411)
案例十八	逻辑斯蒂方程·····	(412)
案例十九	技术革新的推广·····	(413)
主要参考文献·····		(416)

# 第一章 函数

函数不仅是数学的基础概念之一,它也是微积分学中一个重要的研究对象.

在物质世界里常常是一些量依赖于另一些量,即一些量的值随另一些量的值确定而确定.函数就是这类依赖关系的一种数学概括.

在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中,经常会遇到函数这种依赖关系.

本章将主要介绍函数的概念、性质、分类.

## 第一节 函 数

### 一、函数的概念

设  $D$  是一非空的实数集,  $f$  是某一规则.如果对每一个数  $x \in D$ ,  $f$  唯一地确定出一个相对应的实数  $f(x)$ , 则称  $f$  为定义于  $D$  上的一个函数, 集  $D$  称为函数的定义域. 数  $f(x)$  称为函数在  $x$  的函数值, 全体函数值的集

$$W = \{f(x) \mid x \in D\} = f(D),$$

称为函数的值域. 一般, 由规则  $f$  在  $D$  上定义的函数, 用符号

$$f: D \rightarrow W$$

表示, 也常常简单地记作  $f$ .

在自然界中, 像函数这样的数量关系是普遍存在的. 例如, 不计空气阻力时, 自由落体下落的高度决定于下落的时间; 邮件的费

用依赖于邮件的重量;在温度固定时,已给气体的体积决定于它的压强;圆的面积依赖于圆的半径;等等,这些都是函数概念在实际中的来源.

函数定义域  $D$  的一些最简单情形可以是整个数轴,即全体实数的集  $R$ ;也可以是数轴上的某个闭区间

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\},$$

或开区间

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

规则  $f$  通常用某种计算公式表示,或用图表文字加以说明. 所谓一个函数已知,就是说确定这函数的两要素(定义域和对应规则)是给定的,从而值域也是给定的.

设给定任一函数  $f: D \rightarrow W$ . 如果令  $x$  是一个以  $D$  为变域变量(不再像前面那样表示  $D$  中的某一个数),令  $y$  是一个以  $W$  为变域的变量,那么,函数  $f$  显示的是:对于变量  $x$  在  $D$  内所取的每一个值,通过  $f$  变量  $y$  在  $W$  内唯一地确定出一个对应值. 由此可见,变量  $y$  通过  $f$  表现出对变量  $x$  的一种依赖关系,而函数  $f$  则是这种依赖关系的数学表达.

在给出函数概念添加上变量这一层含义的时候,总是将以函数定义域  $D$  为变域的变量称为函数的自变量,将以函数域  $W$  为变域的变量称为函数的因变量. 于是在上面的做法中, $x$  是自变量, $y$  是因变量.“变量  $y$  通过函数  $f$  依赖于  $x$ ”这个事实也常常被简单地说是“变量  $y$  是变量  $x$  的  $f$  函数”,并且用

$$y = f(x)$$

这种等式形式的记号来加以表示.

把函数理解成变量间的依赖关系,丰富了人们对这个抽象数学概念的直觉联想. 但这并不丝毫改变函数的本质内容. 特别说来,用什么名称来称呼一个函数的变量是无关紧要的. 记号  $y = f(x) (x \in D)$  和  $S = f(t) (t \in D)$  在数学上表现的是同一个函数  $f: D \rightarrow W$ .

## 二、函数的图像

对函数  $y=f(x)(x \in D)$ , 如果把  $D$  中的任意一个数  $x$  与它的对应数  $y$  组成一个有序数对  $(x, y)$ , 相应地就在坐标平面  $xOy$  上得到一点  $P(x, y)$ . 平面上所有这种点的集

$$G = \{(x, y) | x \in D, y = f(x)\},$$

称为函数  $f$  的图像, 如图 1-1 所示.

由函数的定义, 集  $G$  具有下述性质: 若  $(a, b), (a, c)$  都属于  $G$ , 则  $b = c$ . 也就是说,  $G$  不含有第一坐标(第一个数)相同但相异的点(数对). 从这一性质出发, 如果给定了集  $G$ , 那么函数本身(定义域和对应规则)也就随之完全确定. 所以, 每一个函数都可以定义为某一个具有上述性质的点(有序数对)之集.

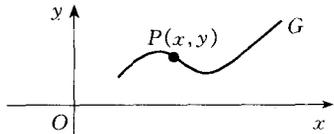


图 1-1

**需要指出的是** 并非所有的函数都可以用几何图形来表示.

**例 1** 狄利克雷(P. G. L. Dirichlet)函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数时;} \\ 0, & x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

显然, 函数的定义域是全体实数集  $R$ , 值域是集  $\{0, 1\}$ , 这个函数就不能用图形来表示.

## 三、函数的表示法

根据表示函数对应关系的方法不同, 常用以下三种函数表示法:

### 1. 解析(公式)表示法

对自变量和常数施以四则运算、乘幂、取指数、取对数、取三角函数等数学运算, 所得到的式子, 称为解析表达式. 用解析表达式所表示的一个函数, 就称为函数的解析法, 解析法也称为公式法.

这也是高等数学中最常用的一种函数的表示法。

需要注意的是 用解析法表示函数,不一定总是能用一个式子来表示的,有时也可以用几个不同的式子来表示一个函数。

### 例 2 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时;} \\ x + 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时;} \end{cases}$$

就是用两个解析表达式给定的一个函数,其定义域是  $D = (-\infty, +\infty)$ . 当  $x \in (-\infty, 0]$  时,对应的函数值  $f(x) = x^2$ ; 当  $x \in (0, +\infty)$  时,对应的函数值  $f(x) = x + 1$ . 函数的图形如图 1-2 所示. 其中左半段是抛物线的左半支,而右半段则是半直线。

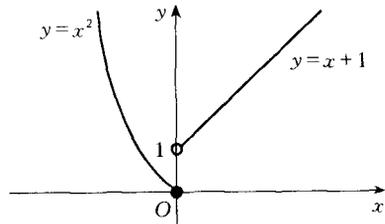


图 1-2

这种在自变量的不同变化范围中,对应规则用不同式子来表示的函数,通常被称为分段函数。

### 例 3 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时;} \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时;} \end{cases}$$

就是一个最典型的分段函数. 它的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域为  $[0, +\infty)$ , 它的图形如图 1-3 所示。

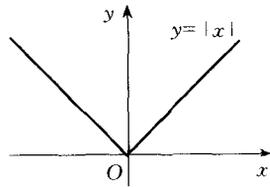


图 1-3

### 例 4 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0, \end{cases}$$

也是一个分段函数. 它的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 它的值由自变量的符号所决定, 故称其为符号函数, 其图形如图 1-4 所示. 由符

号函数的定义可知,对任意实数  $x \in R$ ,均有

$$x = \operatorname{sgn}x \cdot |x| \quad \text{或} \quad |x| = x \cdot \operatorname{sgn}x.$$

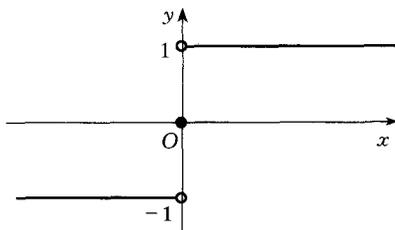


图 1-4

**例 5** 设  $x$  为任意一个实数,则不超过  $x$  的最大整数称为  $x$  的整数部分,记成  $[x]$ . 例如,  $[1.5] = 1$ ,  $[-3.2] = -4$ ,  $[\frac{3}{4}] = 0$ , 等等. 若将  $x$  视为一个变量,则函数

$$y = [x] = n, n \leq x < n+1, n \text{ 为整数}$$

就称为取整函数. 这个函数的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$ , 值域是全体整数组成的数集,它的图形如图 1-5 所示. 这函数的图形是一个阶梯形. 在  $x$  为整数时,图形发生跳跃,跃度为 1. 具有这种形式图形的函数通常称为阶梯函数. 取整函数就是一个典型的阶梯函数.

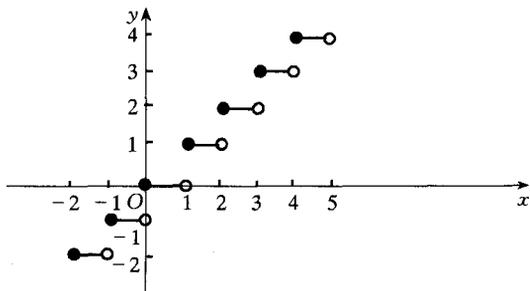


图 1-5

## 2. 表格表示法

在实际应用中,常把自变量所取的值和对应的函数值列成表,用以表示函数关系,函数的这种表示法称为表格法.如我们经常所用的各种数学用表——平方表、立方表、对数表、三角函数表等都是用表格法表示的函数关系.在统计学中,研究社会经济现象也经常用这种表格法.例如,历年的国民经济各种经济指标(产量、利润、物价指数、失业率,等等),高等院校的招生汇总表(最高与最低录取分数线,各档的录取分数线,男女生人数,等等)均可以列表给出.表格法的优点是简单明了,便于应用.但也应注意到它所给出的变量间的对应关系有时是不全面的.

## 3. 图形(图示)表示法

两个变量之间的对应关系是某个坐标系中的一条曲线,这就是用图形(图示)表示的函数关系.例如,某河道的一个断面图形如图1-6所示.其深度 $y$ 与测量点 $P$ 至一岸间的距离 $x$ 之间的对应关系由图1-6中的曲线所示.在这类问题中,通常很难找到一个解析式子来准确地表示这两个变量之间的关系.当然,有时虽然可以有解析式子来表示函数,但是为了使变量之间的对应关系更直观形象,也常用图形曲线来表示函数.

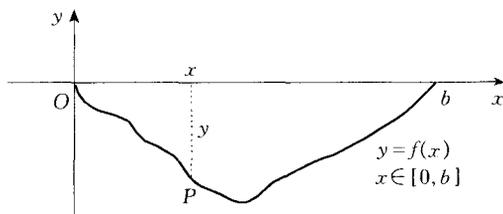


图 1-6

函数的上述三种表示法各有优缺点,在具体应用时,常常是三种方法配合使用.在微积分的研究中或者在分析社会经济现象时,经常将函数的图像画出来帮助分析问题.

## 第二节 常见的函数

当函数  $y = f(x)$  的自变量  $x$  在其定义域  $D$  中取不同值时, 通常会得到不同的函数值  $f(x)$ . 因此, 我们就可以根据函数值的不同性态对函数进行分类, 本节就介绍一些以后常被用到的函数.

### 一、实变函数与复变函数

当定义域为实数域时, 函数称为实变函数. 当定义域为复数域时, 函数称为复变函数.

例如, 函数

$$W = e^x (\cos y + i \sin y)$$

就是一个全平面上的复变函数.

以后凡是没有特别说明时, 函数指的都是实变函数.

### 二、一元函数与多元函数

只有一个自变量的函数称为一元函数. 有两个或两个以上自变量的函数称为多元函数.

例如, 函数

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), n \geq 2$$

称为  $n$  元(实)函数. 可以类似于一元函数  $y = f(x)$  考虑多元函数的图像.

特别地, 对二元实函数  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y \in D)$  来说, 其图像, 即集

$$\{(x, y, z) | (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

常常可以在三维空间中满意地作出, 它是一张曲面.

### 三、单值函数与多值函数

若对于定义域  $D$  中自变量  $x$  的一个值, 因变量  $y$  有一个而且

仅有一个值与其对应,则称  $y$  为  $x$  的单值函数.若对于自变量  $x$  的一个值,与其对应的  $y$  值不止一个,则称  $y$  为  $x$  的多值函数.

**例 1** 下列函数

$$y_1 = x^2, y_2 = \ln(1+x), y_3 = \sin x$$

在其定义域内均为单值函数.

**例 2** 在平面直角坐标系  $xOy$  中,半径为  $r$ ,圆心在原点  $O$  的圆的方程是

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

这个方程在闭区间  $[-r, r]$  上确定了一个以  $x$  为自变量  $y$  为因变量的函数.当  $x$  取端点  $-r$  或  $r$  时,对应的函数值都只有一个;但当  $x$  取开区间  $(-r, r)$  内的任意一个数值时,对应的函数值就有两个,因此这个函数就是多值函数.

以后凡是没有特别说明时,函数指的都是单值函数.

#### 四、显函数与隐函数

因变量  $y$  可以由自变量  $x$  用数学解析公式直接表示出来的函数称为显函数,如上面例 1 中所示的函数都是显函数.若函数关系包含在一个方程式或一组方程式中,自变量与因变量无明显区分,则称为隐函数.即一个函数  $y = f(x)$ ,隐含在给定的方程

$$F(x, y) = 0$$

中,作为这个方程的一个解(函数).如上面例 2 中的方程

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

给出函数

$$y = f(x) = \pm \sqrt{r^2 - x^2}, (-r \leq x \leq r).$$

在上半坐标平面时取正号,在下半坐标平面时取负号.

#### 五、简单函数与复合函数

若  $y$  是  $u$  的函数  $y = f(u)$ ,而  $u$  又是  $x$  的函数  $u = \varphi(x)$ ,则  $y$  称为  $x$  的复合函数, $u$  称为中间变量,记作  $y = f[\varphi(x)]$ .无中