普通高等教育经济、管理类专业适用教材

经济数学

微积分

JING JI SHU XUE · WEI JI FEN

◎主　编　李晋明　李朝阳

经济管理出版社

普通高等教育经济、管理类专业适用教材

经济数学

（微积分）

主编　李晋明　李朝阳

经济管理出版社

责任编辑 贾晓建
版式设计 徐乃雅
责任校对 郭虹生

图书在版编目(CIP)数据

经济数学．微积分/李晋明，李朝阳主编．－北京：经济管理出版社，2001.7

ISBN 7－80162－188－3

Ⅰ．经…　Ⅱ．①李…②李…　Ⅲ．①经济数学－高等学校－教材②微积分－高等学校－教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 23021 号

经济数学
（微积分）
主编　李晋明　李朝阳

出版：经济管理出版社
（北京市海淀区北蜂窝 8 号中雅大厦 11 层　邮编 100038）
发行：经济管理出版社总发行　全国各地新华书店经销
印刷：北京忠信诚胶印厂

850 ㎜×1168 ㎜/32　13.25 印张　343 千字
2001 年 7 月第 1 版　2004 年 4 月北京第 3 次印刷
印数：12001—17000 册

ISBN7－80162－188－3/F·180
定价：20.00 元

前　言

数学是研究现实社会中空间形式与数量关系的一门学科，它不仅是科学、技术、工程的基础，而且在经济、管理等社会学科的研究中有广泛的应用．那么，如何反映数学在经济、管理等方面的应用，如何体现“数学教育不仅是培养现代技术人才的最重要的素质教育，也是人才培养竞争的关键因素”，如何实施将教学重点从仅仅“为专业课程提供数学工具”扩展到“提高大学生的数学素质”上来，这本《经济数学（微积分）》教材正是充分体现了这种指导思想与精神．

为了贯彻落实教育部《面向社会21世纪教育振兴行动计划》，本书根据教育部针对普通高等院校经济、管理类专业核心课程颁布的经济数学教学大纲，结合编者长期从事经济、管理类各专业《微积分》课程教学的丰富经验与体会，并参考大量近年来国内外相关教材与参考书的内容集体编写而成的．

本教材不仅继承了经典微积分的层次清晰、基本概念和基本原理阐述准确、论证严谨的基本思想与基本方法，而且还较现有的《微积分》教材有以下几方面的特色：

1．充分利用了微积分这一特殊的工具解决经济、管理中大量的实际问题，重视理论联系实际．除了在各章中介绍一些实际应用以外，还专门利用一章的篇幅详细阐述了微积分在经济、管理中的应用．

2．在内容的编排上，既充分展示了微积分作为现代

数学基础的内在精华，同时也将其特有的严密性、逻辑性及思想方法与实际应用进行了有机的结合.

3. 每章中除了编排有大量丰富的例题以外，还配置了逾千道不同类型的习题. 既有基本练习题，又有较难的开扩题，更有灵活的综合题，能够较好地满足不同层次学生的要求. 这在目前各类高等院校所使用的教材中是不多见的.

本教材适用于经济、管理类各院校的学生使用. 在使用本教材过程中，应根据各专业的具体教学需要，制订相应的学时，选用适当的内容.

本教材亦可作为自学考试、各类成人教育、高等职业教育的参考书，也可作为经济、管理工作者学习的参考资料.

本教材由李晋明、李朝阳担任主编，参加编写工作的有李晋明(第一章、第二章、第三章、第四章)，李朝阳(第五章、第六章、第十一章)，施明存(第七章、第八章、第九章)，黄先开(第十章)等老师，最后由李晋明负责统稿.

本教材由中央财经大学陈文灯教授审定.

本书作为北京工商大学(原北京商学院)教学改革立项教材，始终得到学校有关各方面的大力支持，在此一并表示诚挚的谢意.

限于编者的水平，书中难免有不妥之处，希望读者批评指正，以便今后修改，使其趋于完善.

编　者

2001 年 7 月

目　　录

第一章　函数

函数不仅是数学的基础概念之一,它也是微积分学中一个重要的研究对象.

在物质世界里常常是一些量依赖于另一些量,即一些量的值随另一些量的值确定而确定.函数就是这类依赖关系的一种数学概括.

在数学、自然科学、经济学和管理科学的研究中,经常会遇到函数这种依赖关系.

本章将主要介绍函数的概念、性质、分类.

第一节　函　　数

一、函数的概念

设 D 是一非空的实数集,f 是某一规则.如果对每一个数 $x \in D$,f 惟一地确定出一个相对应的实数 $f(x)$,则称 f 为定义于 D 上的一个函数,集 D 称为函数的定义域.数 $f(x)$ 称为函数在 x 的函数值,全体函数值的集

$$W=\{f(x) \mid x \in D\}=f(D),$$

称为函数的值域.一般,由规则 f 在 D 上定义的函数,用符号

$$f: D \rightarrow W$$

表示,也常常简单地记作 f.

在自然界中,像函数这样的数量关系是普遍存在的.例如,不计空气阻力时,自由落体下落的高度决定于下落的时间;邮件的费

用依赖于邮件的重量;在温度固定时,已给气体的体积决定于它的压强;圆的面积依赖于圆的半径;等等,这些都是函数概念在实际中的来源.

函数定义域 D 的一些最简单情形可以是整个数轴,即全体实数的集 R;也可以是数轴上的某个闭区间

$$[a,b]=\{x \mid a\leq x\leq b\},$$

或开区间

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

规则 f 通常用某种计算公式表示,或用图表文字加以说明.所谓一个函数已知,就是说确定这函数的两要素(定义域和对应规则)是给定的,从而值域也是给定的.

设给定任一函数 $f:D\to W$.如果令 x 是一个以 D 为变域的变量(不再像前面那样表示 D 中的某一个数),令 y 是一个以 W 为变域的变量,那么,函数 f 显示的是:对于变量 x 在 D 内所取的每一个值,通过 f 变量 y 在 W 内惟一地确定出一个对应值.由此可见,变量 y 通过 f 表现出对变量 x 的一种依赖关系,而函数 f 则是这种依赖关系的数学表达.

在给出函数概念添加上变量这一层含义的时候,总是将以函数定义域 D 为变域的变量称为函数的自变量,将以函数域 W 为变域的变量称为函数的因变量.于是在上面的做法中,x 是自变量,y 是因变量."变量 y 通过函数 f 依赖于 x"这个事实也常常被简单地说成"变量 y 是变量 x 的 f 函数",并且用

$$y=f(x)$$

这种等式形式的记号来加以表示.

把函数理解成变量间的依赖关系,丰富了人们对这个抽象数学概念的直觉联想.但这并不丝毫改变函数的本质内容.特别说来,用什么名称来称呼一个函数的变量是无关紧要的.记号 $y=f(x)(x\in D)$ 和 $S=f(t)(t\in D)$ 在数学上表现的是同一个函数 $f:D\to W$.

二、函数的图像

对函数 $y=f(x)(x\in D)$，如果把 D 中的任意一个数 x 与它的对应数 y 组成一个有序数对 (x,y)，相应地就在坐标平面 xOy 上得到一点 $P(x,y)$. 平面上所有这种点的集

$$G=\{(x,y)\mid x\in D, y=f(x)\},$$

称为函数 f 的图像，如图 1－1 所示.

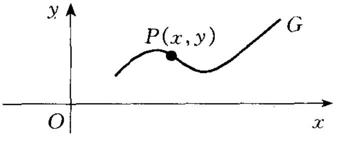

图 1－1

由函数的定义，集 G 具有下述性质：若 (a,b)，(a,c) 都属于 G，则 $b=c$. 也就是说，G 不含有第一坐标(第一个数)相同但相异的点(数对). 从这一性质出发，如果给定了集 G，那么函数本身(定义域和对应规则)也就随之完全确定. 所以，每一个函数都可以定义为某一个具有上述性质的点(有序数对)之集.

需要指出的是 并非所有的函数都可以用几何图形来表示.

例 1 狄利克雷(P.G.L. Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数时；}\\0, & x\text{ 为无理数时.}\end{cases}$$

显然，函数的定义域是全体实数集 R，值域是集 $\{0,1\}$，这个函数就不能用图形来表示.

三、函数的表示法

根据表示函数对应关系的方法不同，常用以下三种函数表示法：

1. 解析(公式)表示法

对自变量和常数施以四则运算、乘幂、取指数、取对数、取三角函数等数学运算，所得到的式子，称为解析表达式. 用解析表达式所表示的一个函数，就称为函数的解析法，解析法也称为公式法.

这也是高等数学中最常用的一种函数的表示法.

需要注意的是 用解析法表示函数,不一定总是能用一个式子来表示的,有时也可以用几个不同的式子来表示一个函数.

例 2 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当 } x\leq 0 \text{ 时};\\ x+1, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\end{cases}$$

就是用两个解析表达式给定的一个函数,其定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$. 当 $x\in(-\infty,0]$ 时,对应的函数值 $f(x)=x^2$;当 $x\in(0,+\infty)$时,对应的函数值 $f(x)=x+1$. 函数的图形如图 1-2 所示. 其中左半段是抛物线的左半支,而右半段则是半直线.

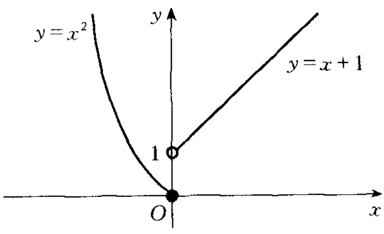

图 1-2

这种在自变量的不同变化范围中,对应规则用不同式子来表示的函数,通常被称为分段函数.

例 3 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & \text{当 } x\geq 0 \text{ 时};\\ -x, & \text{当 } x<0 \text{ 时},\end{cases}$$

就是一个最典型的分段函数. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$,它的图形如图 1-3 所示.

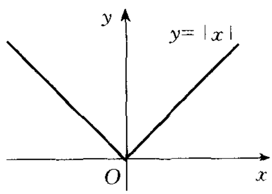

图 1-3

例 4 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0;\\ 0, & \text{当 } x=0;\\ -1, & \text{当 } x<0,\end{cases}$$

也是一个分段函数. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,它的值由自变量的符号所决定,故称其为符号函数,其图形如图 1-4 所示. 由符

号函数的定义可知,对任意实数 $x\in R$,均有

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x| \quad 或 |x|=x\cdot\operatorname{sgn}x.$$

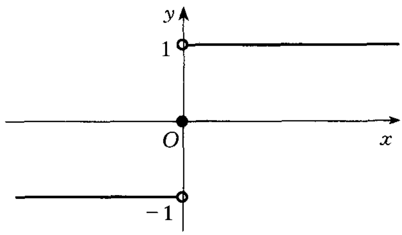

图 1-4

例 5 设 x 为任意一个实数,则不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记成$[x]$.例如,$[1.5]=1$,$[-3.2]=-4$,$\left[\frac{3}{4}\right]=0$,等等.若将 x 视为一个变量,则函数

$$y=[x]=n,n\leq x<n+1,n\ 为整数$$

就称为取整函数.这个函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域是全体整数组成的数集,它的图形如图 1-5 所示.这函数的图形是一个阶梯形.在 x 为整数值时,图形发生跳跃,跃度为 1.具有这种形式图形的函数通常称为阶梯函数.取整函数就是一个典型的阶梯函数.

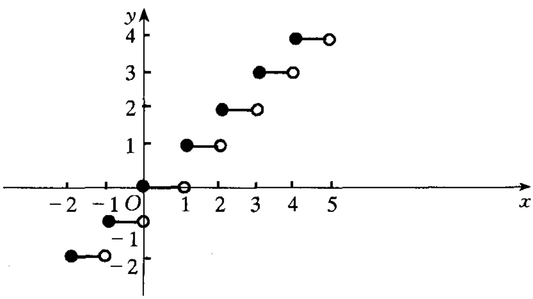

图 1-5

2. 表格表示法

在实际应用中，常把自变量所取的值和对应的函数值列成表，用以表示函数关系，函数的这种表示法称为表格法. 如我们经常所用的各种数学用表——平方表、立方表、对数表、三角函数表等都是用表格法表示的函数关系. 在统计学中，研究社会经济现象也经常用这种表格法. 例如，历年的国民经济各种经济指标(产量、利润、物价指数、失业率，等等)，高等院校的招生汇总表(最高与最低录取分数线，各档的录取分数线，男女生人数，等等)均可以列表给出. 表格法的优点是简单明了，便于应用. 但也应注意到它所给出的变量间的对应关系有时是不全面的.

3. 图形(图示)表示法

两个变量之间的对应关系是某个坐标系中的一条曲线，这就是用图形(图示)表示的函数关系. 例如，某河道的一个断面图形如图 1－6 所示. 其深度 y 与测量点 P 至一岸间的距离 x 之间的对应关系由图 1－6 中的曲线所示. 在这类问题中，通常很难找到一个解析式子来准确地表示这两个变量之间的关系. 当然，有时虽然可以有解析式子来表示函数，但是为了使变量之间的对应关系更直观形象，也常用图形曲线来表示函数.

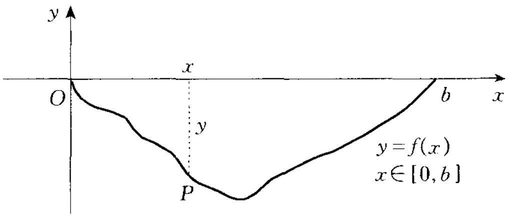

图 1－6

函数的上述三种表示法各有优缺点，在具体应用时，常常是三种方法配合使用. 在微积分的研究中或者在分析社会经济现象时，经常将函数的图像画出来帮助分析问题.

第二节　常见的函数

当函数 $y=f(x)$的自变量 x 在其定义域D 中取不同值时，通常会得到不同的函数值 $f(x)$. 因此，我们就可以根据函数值的不同性态对函数进行分类，本节就介绍一些以后常被用到的函数.

一、实变函数与复变函数

当定义域为实数域时，函数称为实变函数. 当定义域为复数域时，函数称为复变函数.

例如，函数

$$W=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

就是一个全平面上的复变函数.

以后凡是没有特别说明时，函数指的都是实变函数.

二、一元函数与多元函数

只有一个自变量的函数称为一元函数. 有两个或两个以上自变量的函数称为多元函数.

例如，函数

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),n\geq 2$$

称为 n 元(实)函数. 可以类似于一元函数 $y=f(x)$考虑多元函数的图像.

特别地，对二元实函数 $z=f(x,y),(x,y\in D)$来说，其图像，即集

$$\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,z=f(x,y)\}$$

常常可以在三维空间中满意地作出，它是一张曲面.

三、单值函数与多值函数

若对于定义域 D 中自变量x 的一个值，因变量 y 有一个而且

仅有一个值与其对应，则称 y 为 x 的单值函数．若对于自变量 x 的一个值，与其对应的 y 值不止一个，则称 y 为 x 的多值函数．

例 1 下列函数

$$y_1 = x^2, y_2 = \ln(1+x), y_3 = \sin x$$

在其定义域内均为单值函数．

例 2 在平面直角坐标系 xOy 中，半径为 r，圆心在原点 O 的圆的方程是

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

这个方程在闭区间 $[-r, r]$ 上确定了一个以 x 为自变量 y 为因变量的函数．当 x 取端点 $-r$ 或 r 时，对应的函数值都只有一个；但当 x 取开区间 $(-r, r)$ 内的任意一个数值时，对应的函数值就有两个，因此这个函数就是多值函数．

以后凡是没有特别说明时，函数指的都是单值函数．

四、显函数与隐函数

因变量 y 可以由自变量 x 用数学解析公式直接表示出来的函数称为显函数，如上面例 1 中所示的函数都是显函数．若函数关系包含在一个方程式或一组方程式中，自变量与因变量无明显区分，则称为隐函数．即一个函数 $y = f(x)$，隐含在给定的方程

$$F(x, y) = 0$$

中，作为这个方程的一个解（函数）．如上面例 2 中的方程

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

给出函数

$$y = f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, (-r \leqslant x \leqslant r).$$

在上半坐标平面时取正号，在下半坐标平面时取负号．

五、简单函数与复合函数

若 y 是 u 的函数 $y = f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$，则 y 称为 x 的复合函数，u 称为中间变量，记作 $y = f[\varphi(x)]$．无中