SOUTHEAST
UNIVERSITY PRESS

东南大学出版社

工程矩阵理论

Matrix Theory

张明淳

Zhang Mingchun

内 容 简 介

本教材是根据1991年全国工科研究生《矩阵论》课程教学研讨会上制订的《教学基本要求》编写的. 主要内容为线性空间与线性映射、内积空间与等距变换、矩阵的相似标准形、Hermite二次型、范数理论、矩阵函数及广义逆矩阵等. 每章有一定数量的习题.

本书可作为大专院校工科研究生《矩阵论》课程的教材.

责任编辑 徐步政

工程矩阵理论

张明淳

*

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编:210018)

南京化工大学印刷厂印刷

*

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 6 1/4 字数 157 千

1995年12月第1版 1999年10月第2次印刷

印数:1501—3000册

ISBN 7-81050-079-1/O·7

定价:10.00元

前 言

本教材是根据1991年全国工科研究生《矩阵论》课程教学研讨会上制订的〈教学基本要求〉，在编者多次讲授工科研究生线性代数课程的基础上编写的. 它的预备知识是32学时的大学线性代数，使用本教材的教学时数为52～64学时.

为减缓大学线性代数到研究生线性代数课程之间的坡度，本教材特别编写了“复习与引深”一章. 通过举例及习题对大学线性代数的有关内容进行复习及引深，重点是引深. 并通过几个应用题引出了研究生线性代数课程的新内容. 希望它们能诱发学生的学习兴趣.

本教材内容由两大部分组成. 前4章是线性代数的基础理论：线性空间与线性映射，内积空间与等距变换，矩阵的相似标准形，Hermite二次型；第5与第6章介绍了范数理论、矩阵函数及广义逆.

本教材注重基本理论，希望本课程的学习有利于提高工科研究生的数学素养. 同时考虑到工科学生的特点，定理的证明尽可能地采用简明易懂的推导. 本教材每章附有一定数量的习题，书后附有答案，较难题给了提示. 为查找方便，最后还附有索引.

本教材主要参考材料是戴昌国教授编著的《线性代数》. 在此，对戴老师以及本教材所参考的其它资料的作者表示感谢.

编者水平有限，教材中难免有欠妥之处，欢迎批评指教.

张明淳

1995.1 于东南大学

符 号 说 明

$(A)_{ij}$	矩阵A的(i,j)元，即位于第i行第j列之元
A^T	A的转置
A^H	A的共轭转置
$\det A$	方阵A的行列式
$\mathrm{adj}A$	方阵A的伴随矩阵
$\mathrm{tr}A$	方阵A的迹，即A的主对角元之和
$r(A)$, $\mathrm{rank}A$	A的秩
$R(A)$	A的值域
$K(A)$	A的核
$\lambda(A)$	A的谱，即方阵A的全体特征值集合
$\rho(A)$	方阵A的谱半径
$\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$	以$d_1,d_2,\cdots,d_n$为对角元的对角阵
E_{ij}	(i,j)元为1，其余元全为零的矩阵
$F[x]$	数域F上全体多项式
$F[x]_n$	数域F上次数小于n的全体多项式及零
$F^{s\times n}$	数域F上全体$s\times n$矩阵
R	实数域
C	复数域
$\mathrm{Re}Z$	Z的实部
$\mathrm{Im}Z$	Z的虚部

目　录

0 复习与引深

本章通过举例及习题来复习并引深与本课程有关的大学线性代数部分内容.最后介绍若干应用的例子,作为本课程的开场白.

0.1 矩阵的分块运算及求逆

n 阶方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, 且 A 可逆时, $A^{-1} = (\det A)^{-1}\operatorname{adj}A$. 若 n 阶方阵 A 与 B 满足 $AB = I$, 则 A 与 B 均可逆, 且互为逆.

例 1 试证可逆上三角阵之逆为上三角阵.

证明 设 A 为 n 阶可逆上三角阵,因此其主对角元必全不为零.今对 n 作归纳法.

显然, $n = 1$ 时命题成立.设 $n - 1$ 阶时成立.现考虑 n 阶可逆上三角阵 A, 把 A 分为四块:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

其中 a_{11} 为 A 的左上角元, B 为 $n - 1$ 阶上三角阵,由于主对角元均非零,所以 B 可逆.

A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在 n 阶方阵

$$\begin{bmatrix} x & \beta \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}$$

使

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & \beta \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix},$$

$\Leftrightarrow a_{11}x + \alpha X_1 = 1, a_{11}\beta + \alpha X_2 = 0, BX_1 = 0, BX_2 = I_{n-1},$

$$\Leftrightarrow X_2 = B^{-1}, X_1 = 0,\ x = a_{11}^{-1},\ \beta = -a_{11}^{-1}\alpha B^{-1},$$

故

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & -a_{11}^{-1}\alpha B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

由归纳法假设 B^{-1} 为上三角阵，所以 A^{-1} 也是上三角阵. 证毕

例2 (1) 记单位阵 I 的第 i 列为 e_i，试证 Ae_j 为 A 的第 j 列；$e_i^T A$ 为 A 的第 i 行.

(2) 设 n 阶矩阵 $N = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$， 试证：

$$N^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & k < n, \\ 0\ , & k \geqslant n. \end{cases}$$

证明 (1) 记 A 的第 j 列为 A_j，则

$$Ae_j = (A_1, \cdots, A_j, \cdots, A_n)\begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = A_j.$$

将 A 按行来分块，则易证 $e_i^T A$ 为 A 的第 i 行，请读者自证.

(2) 对 $k < n$，用归纳法来证

显然，$k = 1$ 时命题正确. 今设 $k-1$ 时正确，即

$$N^{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-k+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = (\theta, \cdots, \theta, e_1, \cdots, e_{n-k+1}),$$

于是

$$\begin{aligned} N^k &= N^{k-1}N = N^{k-1}(\theta, e_1, e_2, \cdots, e_{n-1}) \\ &= (\theta, N^{k-1}e_1, \cdots, N^{k-1}e_{n-1}) \\ &= (\theta, \cdots, \theta, e_1, \cdots, e_{n-k}) \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

特别，$k = n - 1$ 时，便得

$$N^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{aligned} N^n &= N^{n-1} \cdot N = N^{n-1}(\theta, e_1, \cdots, e_{n-1}) \\ &= (\theta, N^{n-1}e_1, \cdots, N^{n-1}e_{n-1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此，当 $k \geqslant n$ 时，$N^k = 0$. 证毕

例 3 试证：

(1) 若 A 可逆，则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$；

(2) 若 A, B, C, D 为同阶方阵，且 $AC = CA$，则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

证明

(1) 设 A 为 $k \times k$ 矩阵，D 为 $s \times s$ 矩阵，则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_k & -A^{-1}B \\ 0 & I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

取行列式，即得所证.

(2) 先考虑 A 可逆，则由(1) 可得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} &= |A||D - CA^{-1}B| \\ &= |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CB|. \end{aligned}$$

再考虑一般情况，作

$$f(t) = \begin{vmatrix} A + tI & B \\ C & D \end{vmatrix}.$$

由于 $\det(A + tI)$ 是 t 的多项式，故只有有限多个 t 使 $\det(A +$

$tI) = 0$. 因此,有无限多个 t 使 $\det(A+tI) \neq 0$. 对这些 t,方阵 $A + tI$ 可逆,另一方面 $(A+tI)C = C(A+tI)$. 于是,利用本段开始的证明可知,有无限多个 t 使

$$\begin{vmatrix} A+tI & B \\ C & D \end{vmatrix} = |(A+tI)D - CB|. \qquad (*)$$

记式(*)的右端为 $g(t)$,作 $F(t) = f(t) - g(t)$, $F(t)$ 仍是 t 的多项式,而式(*)意味着 $F(t)$ 有无限多个零点,所以

$$F(t) \equiv 0.$$

即式(*)对一切 t 成立,特别令 $t = 0$,即得所证. 证毕

例 4 已知 $A^3 = 3A(A-I)$,求证 $A - I$ 可逆,且求其逆.

解 由 $A^3 - 3A^2 + 3A = 0$,可得

$-(A-I)(A-I)^2 = I$,所以 $A - I$ 可逆,且

$$(A-I)^{-1} = -(A-I)^2.$$

0.2 矩阵的秩、线性方程组及矩阵的满秩分解

A 的秩 $= r \Leftrightarrow A$ 的行(列)秩为 r.

$\Leftrightarrow A$ 的不为 0 的子式之最高阶数是 r.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 P, Q 使 $A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$.

线性方程组 $AX = b$ 有解 $\Leftrightarrow A$ 与 $(A \cdots b)$ 的秩相等.

$\Leftrightarrow b$ 属于 A 的列空间.

齐次方程组 $AX = \theta$ 之解空间的维数 = 未知元个数 $- A$ 的秩.

例 1 试证:

(1) $ABX = \theta$ 与 $BX = \theta$ 同解 $\Leftrightarrow r(AB) = r(B)$;

(2) $r(A) = r(A^HA)$,其中 A^H 为 $(\bar{A})^T$.

证明

(1) 设$X \in C^{n\times 1}$,则$ABX=\theta$与$BX=\theta$的解空间维数分别是$n-r(AB)$与$n-r(B)$.故当它们同解时,$r(AB)=r(B)$.

反之,若$r(AB)=r(B)=n$,则$ABX=\theta$与$BX=\theta$只有零解;若$r(B)=r(AB)=r<n$,则由于$BX_0=\theta$时必有$ABX_0=\theta$,故$BX=\theta$的由$n-r$个解构成的基础解系也是$ABX=\theta$的基础解系,所以它们总是同解.

(2) 考虑齐次方程组$A^HAX=\theta$与$AX=\theta$.

首先,若$AX_0=\theta$,则必有$A^HAX_0=\theta$;

反之,若$A^HAX_0=\theta$,则$X_0^HA^HAX_0=0$,即$(AX_0)^HAX_0=0$.

设$AX_0=(y_1,y_2,\cdots,y_s)^T$,于是

$$0=(AX_0)^H(AX_0)=\sum_{i=1}^{s}|y_i|^2.$$

只能是

$$y_1=\cdots=y_s=0,$$

故 $AX_0=\theta$.

所以 $A^HAX=\theta$与$AX=\theta$同解.根据(1)得$r(A^HA)=r(A)$

证毕

另外,若对A^H利用(2)可得$r(A^H)=r(AA^H)$.再从秩的定义,不难知道A^H与A的秩相等,因此,

$$r(AA^H)=r(A^H)=r(A)=r(A^HA).$$

例2 试证:

(1) $r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$

(2) $r(AB)\leqslant \min[r(A),r(B)]$

证明

(1) 从$A+B$的列向量与A、B的列向量之间的关系,再利用"若向量组(Ⅰ)可经(Ⅱ)线性表示,则(Ⅰ)的秩$\leqslant$(Ⅱ)的秩"即可得证,请读者自证.

(2) 由于齐次方程组$BX=\theta$的解必是$ABX=\theta$的解,又由解

空间维数与系数矩阵的关系，即可得 $r(AB) \leqslant r(B)$.

又 $r(AB) = r[(AB)^T] = r(B^TA^T)$，再利用已证结论，便得

$$r(AB) = r(B^TA^T) \leqslant r(A^T) = r(A).$$ 证毕

例 3 设 A 为 $s \times n$ 矩阵，B 为 $n \times t$ 矩阵，则

$$r(AB) \geqslant r(A) + r(B) - n.$$

证明 设 $r(A) = r,\ r(B) = k$，则有可逆阵 P、Q 使

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q,$$

于是

$$AB = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QB,\ r(QB) = r(B) = k.$$

记 $QB = \begin{bmatrix} C_r \\ C_{n-r} \end{bmatrix}$，$C_r$ 为 $r \times t$ 矩阵，于是

$$P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QB = P\begin{bmatrix} C_r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因 P 可逆，故 AB 的秩 $= \begin{bmatrix} C_r \\ 0 \end{bmatrix}$ 的秩，又 $\begin{bmatrix} C_r \\ C_{n-r} \end{bmatrix}$ 的秩为 k，故 C_r 中至少有 $k - (n - r)$ 行是线性无关的，所以

$$r(AB) \geqslant k - n + r = r(A) + r(B) - n.$$ 证毕

例 4 试证秩为 r 的 $s \times n$ 矩阵 A 必可分解为

$$A = BC.$$

其中 B、C 分别是 $s \times r$ 与 $r \times n$ 矩阵，由于

$$r = r(BC) \leqslant \min[r(B),\ r(C)],$$

又 B 为 r 列，C 为 r 行，故它们的秩是 r. 称 $A = BC$ 为 A 的**满秩分解**.

证明

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = P\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}(I_r, 0)Q.$$

记 $B = P\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = (I_r, 0)Q$, 即得所证. 证毕

如何找 B 与 C?对于简单的矩阵,可用观察法.

例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 记 A 的列为 A_1, A_2, A_3, A_4, 容易看出 A_1, A_2 线性无关, $A_3 = A_1 + 2A_2, A_4 = A_1 - A_2$, 故

$$\begin{aligned} A &= (A_1, A_2, A_1 + 2A_2, A_1 - A_2) \\ &= (A_1, A_2)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

当 A 比较复杂时,设 $A = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$, 对 A 作初等行变换后化为 $\tilde{A} = (B_1, B_2, \cdots, B_n)$, 由于方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i A_i = \theta$ 与 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i B_i = \theta$ 同解,因此,A 的列向量之间的线性关系之系数与 $\tilde{A}$ 的列向量之间的线性关系之系数相同,于是只要 $\tilde{A}$ 易于观察,便可求出 A 的满秩分解.

例 5 求 A 的满秩分解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 & -12 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -7 \end{bmatrix}.$$

解 对 A 作初等行变换

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & -5 \\ 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

例 6 试证 $r(ABC) + r(B) \geqslant r(AB) + r(BC)$.

证明 设 $r(B) = r$, B 的满秩分解为 $B = HK$, 于是 $ABC = AHKC$. 利用例 3 的结论, 得

$$r(ABC) = r(AHKC) \geqslant r(AH) + r(KC) - r. \qquad (*)$$

而 $AB = AHK$, $r(AB) \leqslant r(AH)$, $BC = HKC$, $r(BC) \leqslant r(KC)$ 代入式 $(*)$ 即得

$$r(ABC) \geqslant r(AB) + r(BC) - r(B).$$

证毕

0.3 应用举例

例 1 最佳拟合曲线.

设有两个量 x 与 y, 由实验得到 x 与 y 的 s 组数字:

$$x = a_i \text{ 时}, y = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, s). \qquad (0.3.1)$$

又 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\cdots$, $\varphi_n(x)$ 为已知函数. 现在要找系数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使函数式

$$y = x_1\varphi_1(x) + x_2\varphi_2(x) + \cdots + x_n\varphi_n(x) \qquad (0.3.2)$$

能"最佳"地符合条件式(0.3.1).

分别将式(0.3.1)的 s 对值代入式(0.3.2), 记 $\varphi_j(a_i) = a_{ij}$, 得

到未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性方程组

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,s).$$

引进矩阵 $A = (a_{ij})_{s\times n}$, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_s)^T$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$, 上述方程组就是

$$AX = b. \tag{0.3.3}$$

线性方程组式(0.3.3) 一般是矛盾方程组(不相容), 于是要找 X 使式(0.3.3) 的左端与右端"最接近", 也就是 s 维向量 AX 与 b"距离"最短, 即 $\| AX - b \|$ 最小. 这个问题的通解将在第6章利用矩阵 A 的广义逆给出. 由这样的解所得出的曲线(0.3.2) 叫做最佳拟合曲线(关于式(0.3.1) 式确定的 s 个点).

例2 人口问题的数学模型.

此模型由 Leslie 于 40 年代提出. 研究某地区女性各种年龄人口随时间增长的分布情况, 从而得出合适的生育率.

将女性人口按年龄等间隔地分为几个年龄组(例如 5 年一间隔, 如果最长寿为 100 岁, 则分为 20 组. 以下提到的单位时间就是指这个间隔). 假定已知各年龄组的生育率 b_i 及存活率 a_i $(i = 1,2,\cdots,n)$(b_i 是单位时间内第 i 年龄组每人平均生育女孩的数目; a_i 是存活到下一时间间隔的第 i 年龄组的人数与该组总人数之比), 且假定 a_i, b_i 均为常量而 $a_n = 0$. 记第 k 个时间间隔时, 第 i 年龄组人数为 $x_i^{(k)}$, 则 $x_i^{(k)}$ 与 $x_i^{(k-1)}$ 的关系为

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = b_1x_1^{(k-1)} + b_2x_2^{(k-1)} + \cdots + b_nx_n^{(k-1)} \\ x_{i+1}^{(k)} = a_ix_i^{(k-1)} \quad (i = 1,\cdots,n-1) \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots).$$

引进矩阵

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_k = (x_1^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^T.$$

则上述方程组即为

$$X_k = AX_{k-1} \quad (k = 1,2,\cdots).$$

由于 A 与 k 无关,可得

$$X_k = A^k X_0 \quad (k = 1,2,\cdots),$$

其中 X_0 为女性人口的初始状态向量.

要研究怎样的生育率才能使人口不致于"爆炸",即 $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$ 存在.可以利用第3章介绍的Jordan标准形及特征值分布来研究上述问题.

例3 占位游戏取胜的概率.

设有如图0.1的5个格子,游戏者从第4格开始,每次由掷骰子决定左移或右移1格:掷到1点或2点则右移,否则左移.走到第1格为胜,走到第5格为负,游戏一直进行到决定胜负为止.求游戏者取胜的概率.

1	2	3	4	5
胜			开始	负

图0.1

假定游戏的次数为无限次,于是若第 k 次在1(或5)处,则第 $k+1$ 次也必在1(或5)处,记第 k 次在第 i 格的概率为 $x_i^{(k)}$,则取胜的概率就是 $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^{(k)}$.

利用计算概率的贝叶斯公式可以得 $x_i^{(k)}$ 与 $x_i^{(k-1)}$ 的关系为

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= x_1^{(k-1)} + \frac{2}{3}x_2^{(k-1)}, \\
x_2^{(k)} &= \frac{2}{3}x_3^{(k-1)}, \\
x_3^{(k)} &= \frac{1}{3}x_2^{(k-1)} + \frac{2}{3}x_4^{(k-1)}, \\
x_4^{(k)} &= \frac{1}{3}x_3^{(k-1)}, \\
x_5^{(k)} &= \frac{1}{3}x_4^{(k-1)} + x_5^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

由于 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)}$ 与 $x_5^{(k-1)}$ 无关,故只要考虑前4个方

程.记

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2/3 & 0\\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\end{bmatrix},$$

$$X_k=\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\ x_2^{(k)}\\ x_3^{(k)}\\ x_4^{(k)}\end{bmatrix},$$

则 $X_k = A^kX_0$，而 $X_0 = e_4$，要求 $\lim\limits_{k\to\infty}X_k$ 的第 1 分量.

$\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - \frac{2}{3})(\lambda + \frac{2}{3})(\lambda - 1)$，$A$ 的特征值互异，故可相似于对角阵 $\mathrm{diag}(0, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, 1)$. 相应的特征向量为

$$P_1 = (4, -6, 0, 3)^T,$$
$$P_2 = (-4, 2, 2, 1)^T$$
$$P_3 = (-4, 10, -10, 5)^T,$$
$$P_4 = (1, 0, 0, 0)^T.$$

作 $P = (P_1, P_2, P_3, P_4)$，　　于是

$$X_k = A^kX_0 = P\mathrm{diag}(0, (\frac{2}{3})^k, (-\frac{2}{3})^k, 1)\ P^{-1}X_0.$$

设 $P^{-1} = (q_{ij})_{4\times 4}$，于是

$$P^{-1}e_4 = (q_{14}, q_{24}, q_{34}, q_{44})^T,$$
$$\lim X_k = P\mathrm{diag}(0,0,0,1)P^{-1}e_4$$
$$= (\theta, \theta, \theta, e_1)(q_{14}, q_{24}, q_{34}, q_{44})^T.$$
$$= (q_{44}, 0, 0, 0)^T$$

从 P 求出 $q_{44} = \frac{P_{44}}{\det P} = \frac{4\cdot 4\cdot 8}{240} = \frac{8}{15}$，所以取胜的概率为 $\frac{8}{15}$.

当 A 不能相似于对角阵时，计算 A^k 的问题可通过 A 的 Jordan