教育部高职高专规划教材

Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

概率论与数理统计训练教程

金炳陶　张祖骥　陈晓龙　编著

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

教育部高职高专规划教材

概率论与数理统计训练教程

金炳陶　张祖骥　陈晓龙　编著

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计训练教程/金炳陶等编著．—北京：高等教育出版社，2001
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-04-009305-7

Ⅰ．概… Ⅱ．金… Ⅲ．①概率论-高等学校：技术学校-教材②数理统计-高等学校：技术学校-教材
Ⅳ．021

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第01288号

责任编辑 杨树东 **封面设计** 杨立新 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 马静如 **责任校对** 王 雨 **责任印制** 杨 明

概率论与数理统计训练教程
金炳陶 张祖骥 陈晓龙 编著

出版发行	高等教育出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电 话	010-64054588	传 真	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	中国农业出版社印刷厂		
开 本	850×1168 1/32	版 次	2001年6月第1版
印 张	6.25	印 次	2001年6月第1次印刷
字 数	150 000	定 价	6.80元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换．

内 容 提 要

本书是教育部高职高专规划教材，是与教育部高职高专规划教材《概率论与数理统计》配套的学习辅导用书.

全书共分9章，内容包括随机事件与概率计算，一维随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，大数定律与中心极限定理，样本与统计量分布，参数估计，假设检验，方差分析与回归分析等.各章均由学习要求，内容提要，典型例题与解题思考和同步训练题组成.本书对主教材中的基本概念、基本理论、基本运算技巧等进行了简要的归纳和提炼，并逐章列出重点和难点.针对高职高专工科类专业的特点，本书在选材和编排上着眼于基础训练的强化，突出解题的思路分析和方法指导，以提高读者分析问题和解决问题的能力.

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校和本科院校举办的二级职业技术学院工科各专业学习概率论与数理统计课程的辅导用书，也可供从事本课程教学的教师参考.

出版说明

教材建设工作是整个高职高专教育教学工作中的重要组成部分.改革开放以来，在各级教育行政部门、学校和有关出版社的共同努力下，各地已出版了一批高职高专教育教材.但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设仍落后于高职高专教育的发展需要.为此，1999年教育部组织制定了《高职高专教育基础课程教学基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》)，通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”.

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种，用5年左右时间完成.出版后的教材将覆盖高职高专教育的基础课程和主干专业课程.计划先用2～3年的时间，在继承原有高职、高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验，解决好新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专教育教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系.

“教育部高职高专规划教材”是按照《基本要求》和《培养规格》的要求，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用性专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成

的，适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用.

教育部高等教育司

2000年4月3日

前　言

概率论与数理统计是工科类专业必修的基础课．从学科分类看，概率论、数理统计都是近代数学的分支，它们在科学研究、工程技术、国民经济等诸多领域都有广泛应用，其重要性是不言而喻的．

概率论与数理统计作为工科类专业的教学科目，由于概念抽象、思路独特、方法灵活、计算繁琐等原因，加上教学时数的限制，初学者往往面临着课程难学、规律难循、习题难做、表述难全的困境，对于高职高专学生尤为如此．本书作为与教育部高职高专规划教材《概率论与数理统计》配套的学习辅导用书，正是针对普遍存在的“四难”而编写的．其总体思路是：全书在对主教材中的“三基”内容进行简要归纳的基础上，为读者梳理头绪、揭示重点、剖析难点；遵循工科类专业的特点，注意现代数学思想的渗透以及与实践应用的结合；强化基础训练，突出解题分析和方法指导，适当扩展和提高，并留有思考余地．

为了便于阅读，本书章序及其内容叙述、解题使用的方法、记号等，与主教材基本一致．书中用“*”号标出的部分，供读者选读．

全书各章均由学习要求、内容提要、典型例题与解题思考、同步训练题等四部分组成．

学习要求：首先明确各章的基本要求，然后指出学习的重点、难点，以便读者心中有数，把握学习主动权．

内容提要：从各章的“三基”出发，就其要点进行归纳提炼，必要时列表给出，从而帮助读者及早了解各章概貌，并为全面掌握课程内容提供方便．

典型例题：围绕各章重点、难点，列举一些有代表性的题目作出示范求解．出于强化基础训练及适当扩大知识面的考虑，对于某些例题的实际背景、思路分析、解法指导、错解质疑或需要留给读者继续思考的问题等，一并作为“解题思考”放在题解之后，深入浅出地引导读者积极思考，从中探索规律，正确解题．部分例题选自主教材的习题，少量例题侧重于实践应用．

同步训练题：为读者精选了难易适中且与各章“三基”有关的题目，书末逐一给出了答案或提示供参考．独立完成这些题目，可以起到举一反三、巩固提高的作用．

由于例题求解及完成同步训练题所需的知识大体上可在本书各章的内容提要中找到，因此本书也可单独使用．

参加本书编写的有金炳陶（南京建筑工程学院）、张祖骥（上海第二工业大学）、陈晓龙（南京建筑工程学院）．由金炳陶负责全书的策划、统稿和定稿．

本书由南京师范大学紫金校区（原南京动力高等专科学校）数学与计算机科学学院朱卓宇副教授主审．对于朱教授认真细致的工作，编者表示衷心的感谢．

由于编者水平有限，书中难免会有不当或疏漏之处，敬请读者批评赐教．

编者

2000 年 10 月于南京

目　　录

第1章

随机事件与概率计算

本章首先对随机事件及其概率引入直观描述,有关概率的讨论侧重于以等可能概型为前提的古典定义及其概率的基本性质与计算要点.然后用列表的方式,简明地给出了包括独立性概念在内的事件间的关系及相应的概率关系.

概率的运算法则,原则上按主教材的思路进行归纳,即:以事件间的关系与运算为前提,引入概率的加法公式;基于条件概率的概念,引入概率的乘法公式、全概率公式及逆概率公式;从事件的独立性定义出发,引入概率计算的二项公式.

一、学习要求

(1) 随机事件(简称事件)是本章的初始概念.对此,既要了解它的基本特征,更要熟悉它们之间的关系与运算法则.事件的独立性是本章的重要概念,是学习中的难点之一,应力求准确理解,并能灵活应用.

(2) 对于事件的概率,本章只涉及到统计定义与古典定义.古典概型下概率计算的若干常见类型,既是重点又是难点,初学者务必掌握其要点,并能熟练完成计算.

(3) 概率的运算法则,包括加法公式、乘法公式、全概率公式、二项公式以及与此有关的超几何公式、泊松公式等都是计算和应用的重点.对于这些公式不仅要知道各自的背景、条件、结论,而且

对于它们之间的相互联系也应有所了解.学习中如能达到上述要求,则对于正确完成概率计算,将会收到事半功倍的效果.

二、内容提要①

1. 事件与概率的直观描述

(1) 事件是作为随机试验结果而引入的.它的第一个特征是,在一次试验中可能发生也可能不发生,具有不确定性.

试验的直接结果称为基本事件,否则称为复合事件.给定试验下所有基本事件的集合便是样本空间,其构成表明它将等同于必然事件,故它们都用字母 Ω 表示.在任一试验中一定不发生的情形称为不可能事件,用符号 $\varnothing$ 表示.从集合论的观点看,凡事件均可视为样本空间的子集;必然事件相当于全集,不可能事件相当于空集,它们可视为随机事件的两种极端情形.

(2) 事件的第二个特征是,在大量重复的试验中,发生的可能性大小具有稳定趋势,呈现出明显的规律性 —— 统计规律性.

概率统计就是以随机事件的统计规律性为其研究对象.

用来度量在试验中发生可能性大小的数,称为事件的概率.其基本性质是:

1) 对于任一事件 A,有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

2) 对于必然事件 Ω,有 $P(\Omega) = 1$;

3) 对于不可能事件 $\varnothing$,有 $P(\varnothing) = 0$.

(3) 事件关系与相应的概率关系

为清楚起见,这里的讨论用列表方式进行(表 1 - 1).

① "内容提要"是假定读者对主教材中的内容基本掌握的前提下拟写的.本书为了便于揭示相关部分之间的内在联系,所列内容是经过重新组合后给出的,因而前后顺序不一定符合诸概念、法则在引入时的原有逻辑关系.

表 1－1　事件关系与相应的概率关系综合表

<table>
<tr><th colspan="2">事件关系(运算)及某些特例</th><th>相应的概率关系</th></tr>
<tr><td rowspan="2">包　含</td><td>$B \supset A$:A 发生必将导致 B 发生
(事件 B 包含事件 A)</td><td>$P(B) \geqslant P(A)$</td></tr>
<tr><td>对任一事件 A:$\varnothing \subset A \subset \Omega$</td><td>$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$</td></tr>
<tr><td>等　价</td><td>$B = A$:$B \supset A$ 同时 $A \supset B$
(A,B 为等价事件)</td><td>$P(B) = P(A)$</td></tr>
<tr><td>互　斥
(不相容)</td><td>$AB = \varnothing$:A,B 不能同时发生
(A,B 为互斥事件)</td><td>$P(AB) = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">对　立
(互逆)</td><td>$AB = \varnothing$ 且 $A + B = \Omega$:
A,B 不能同时发生,且 A,B 恰有一个发生
(A,B 互为对立事件)</td><td>$P(AB) = 0$,且
$P(A) + P(B) = 1$</td></tr>
<tr><td>记 $B = \overline{A}$:B(即$\overline{A}$)为 A 的对立事件.
$A\overline{A} = \varnothing, A + \overline{A} = \Omega$</td><td>$P(A) = 1 - P(\overline{A})$</td></tr>
<tr><td>互　斥
完　备
事件组</td><td>n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足:
(1) $A_iA_j = \varnothing, i \neq j$,且 $i,j = 1,2,\cdots,n$;
($A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥)
(2) $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega$
($A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组)</td><td>$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$</td></tr>
<tr><td>独　立
(不相依)</td><td>A,B 的概率满足　$P(B \mid A) = P(B)$
A 发生与否不影响 B 发生的概率;
或　A,B 的概率满足　$P(A \mid B) = P(A)$
B 发生与否不影响 A 发生的概率
(A,B 互为独立事件)</td><td>$P(AB) = P(A)P(B)$</td></tr>
<tr><td>和(并)</td><td>$A + B(A \cup B)$:
A,B 至少有一发生
(A 与 B 的和,即 A 或 B)</td><td>A,B 为互斥事件:
$P(A + B) = P(A) + P(B)$;
A,B 为相容事件:
$P(A + B) =$
$P(A) + P(B) - P(AB)$</td></tr>
</table>

事件关系(运算)及某些特例		相应的概率关系
积(交)	$AB(A\cap B)$: A,B 同时发生 (A 与 B 的积,即 A 且 B)	A,B 为独立事件: $P(AB)=P(A)P(B)$; A,B 为相依事件: $P(AB)=P(A)P(B\mid A)$ $=P(B)P(A\mid B)$
差	$A-B=A\overline{B}$: A 发生而 B 不发生 (A 与 B 的差,即 A 且 $\overline{B}$)	$P(A-B)=P(A)-P(AB)$
和积差的特例	$AB\subset A\subset A+B(AB\subset B\subset A+B)$: 事件求交越交越"小", 事件求并越并越"大"	$P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A+B)$, $P(AB)\leqslant P(B)\leqslant P(A+B)$, (概率的单调性)
	在 $A\supset B$ 的约定下: $AB=B,A+B=A$; (求交取"小"的,求并取"大"的) 特殊情况下:$A\Omega=A,A+\Omega=\Omega$, $A\varnothing=\varnothing,A+\varnothing=A$	$P(A-B)=P(A)-P(B)$, $P(AB)=P(B)$, $P(A+B)=P(A)$
对偶法则	$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$	$P(\overline{A+B})=P(\overline{A}\,\overline{B})$, $P(\overline{AB})=P(\overline{A}+\overline{B})$
互斥分解	$A=AB+A\overline{B}$, $A+B=A+\overline{A}B$	$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$, $P(A+B)=P(A)+P(\overline{A}B)$

2. 概率的定义及其计算

(1) 统计定义与概率的认定

假设试验在相同条件下可以重复,当试验次数 N 充分大时,事件 A 发生的次数(频数)M 与 N 的比 M/N(频率),始终围绕某个常数 p 作稳定而微小的摆动(统计概型),则称事件 A 有概率.常数 p 就是它的概率,记为 $P(A)=p$.

统计定义在实践中主要用来测定事件发生的概率.事件 A 的概率的认定,通常分两步实现:

1)通过试验取得频率 M/N;

2)以频率作为概率的近似,即认定 $P(A) = M/N$.

(2) 古典定义与概率的计算

假设某个试验只有 n 个等可能的基本事件(古典概型),而事件 A 包括其中的 m 个基本事件,则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

凡属古典概型的问题,依据乘法原理或加法原理,借助排列组合公式,运用概率的古典定义可以直接求其概率.

典型实例是不放回抽样(即一次取模式)下概率计算的超几何公式.其问题的原型为:设某产品共有 N 件,内含 M 件次品.设事件

$$A = \text{“从中任取的 } n \text{ 件中恰有 } m \text{ 件次品”}.$$

于是,事件 A 的概率为

$$P(A) = C_M^m C_{N-M}^{n-m} / C_N^n.$$

其中 $m = 0,1,2,\cdots,\min\{M,n\}$.

3. 概率的运算法则

(1) 概率的加法公式

基于概率的古典定义及事件关系导出的加法公式,汇总其结果为

$$P(A+B) = \begin{cases} P(A)+P(B), & A,B \text{ 为互斥事件}, \\ P(A)+P(B)-P(AB), & A,B \text{ 为任意事件}, \\ P(A)+P(B)-P(A)P(B), & A,B \text{ 为独立事件}, \\ 1-[1-P(A)][1-P(B)], & A,B \text{ 为独立事件}. \end{cases}$$

特别当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为独立事件时,公式

$$\begin{aligned} P(A_1+A_2+\cdots+A_n) &= 1-P(\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}) \\ &= 1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n}) \end{aligned}$$

$$= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$
$$= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)]\cdots[1 - P(A_n)]$$

在解决某些实际问题时非常有用,读者应给予足够的重视.

(2) 乘法公式和全概率公式、逆概率公式

乘法公式的引入与条件概率直接相关.条件概率 $P(A \mid B)$ 是指在事件 B 发生的前提下事件 A 发生的概率,即当 $P(B) > 0$ 时,有 $P(A \mid B) = P(AB)/P(B)$. 类似地,当 $P(A) > 0$ 时,有 $P(B \mid A) = P(AB)/P(A)$.

借助条件概率及独立性概念,便有两事件概率的乘法公式

$$P(AB) = \begin{cases} P(A)P(B \mid A), & A,B \text{ 为相依事件}, \\ P(A)P(B), & A,B \text{ 为独立事件}. \end{cases}$$

上述公式的推广也是概率计算中经常要用到的.

综合运用互斥事件的加法公式与相依事件的乘法公式,便可得到全概率公式和逆概率公式.

假设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为互斥完备事件组,$P(A_i) > 0, i = 1,2,\cdots,n$,$B$ 为 Ω 中任一事件,则全概率公式为

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

保持全概率公式的题设,增设 $P(B) > 0$,则逆概率公式为

$$P(A_j) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

(3) 概率计算的二项公式

假设事件 A 在每次试验中发生的概率为 $p(0 < p < 1)$,运用独立性概念可求得它在 n 重伯努利试验中恰好发生 m 次的概率(二项公式)为

$$b(m;n,p) = \mathrm{C}_n^m p^m q^{n-m}.$$

其中 $m = 0,1,2,\cdots,n; q = 1 - p$.

二项公式是解决放回抽样下概率计算的重要公式，它与超几何公式所要解决的问题，其提法是相同的，所不同的仅是抽样方式的差别．它们与基于极限而引入的泊松公式有着密切的联系．其具体关系由下述极限给出，即

$$\frac{C_M^n C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \xrightarrow{(N \to \infty, M/N \to p)} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

$$\xrightarrow{(n \to \infty, np \to \lambda)} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

经验表明，第一个极限在 $N \gg 10n$ 时、第二个极限在 $n > 10$ 及 $p < 0.1$ 时，近似程度较好，其结果足以满足实际应用的需要．

三、典型例题与解题思考

例 1－1 某工具箱存放有3个供备用的同类零件，其中 2 个是编号为 1,2 的一等品，另一个是编号为 3 的二等品．今从中任意抽取 2 个，用数对 (i,j) 表示随机抽取下的基本事件，其中 i 代表第一次抽得的零件编号，j 为第二次抽得的零件编号．试就抽取的放回与不放回两种方式，写出试验的样本空间 Ω 以及下列事件包括的基本事件：

A =“第一次抽得一等品”；

B =“第二次抽得一等品”；

C =“第二次才抽得一等品”；

D =“前后两次均抽得一等品”．

解：放回抽样：

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$；

$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$；

$B = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$；

$C = \{(3,1),(3,2)\}$；