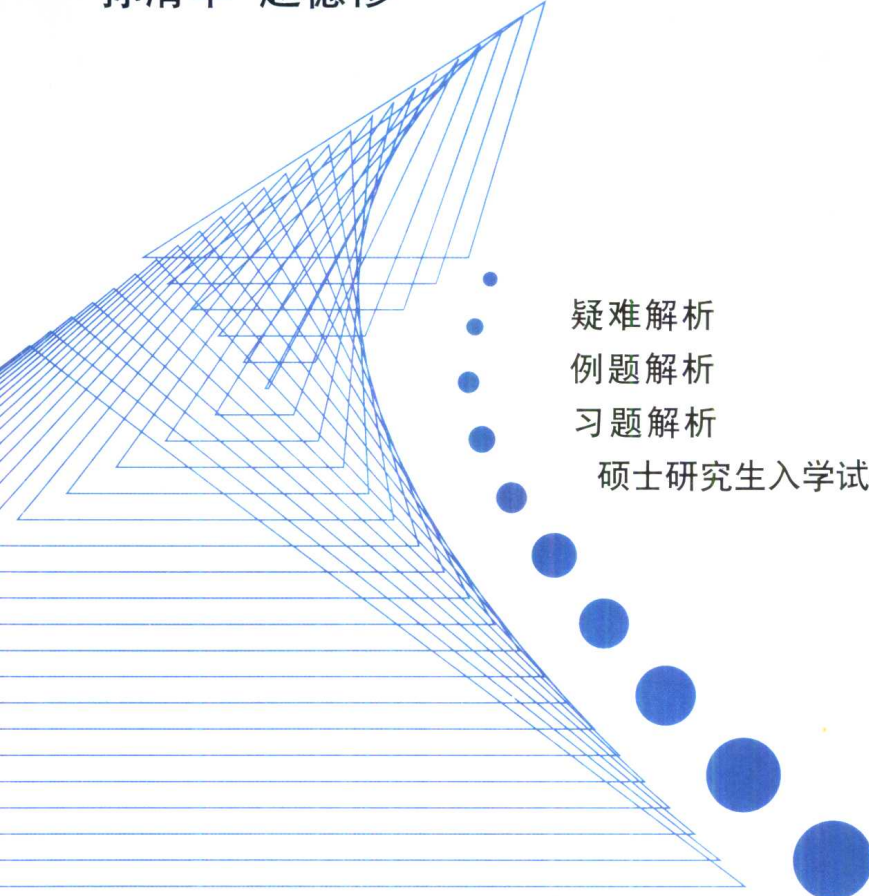


新编 概率论与数理统计题解

高等学校辅导教材

孙清华 赵德修



疑难解析

例题解析

习题解析

硕士研究生入学试题解析

高等学校辅助教材

新编概率论与数理统计题解

疑难解析 例题解析 习题解析
硕士研究生入学试题解析

孙清华 赵德修

华中科技大学出版社
(华中理工大学出版社)

图书在版编目(CIP)数据

新编概率论与数理统计题解/孙清华 赵德修
武汉:华中科技大学出版社, 2001年1月
ISBN 7-5609-2316-X

I. 新…

I. ①孙… ②赵…

Ⅱ. ①概率论-解题 ②数理统计-解题

IV. O21-44

新编概率论与数理统计题解

孙清华 赵德修

责任编辑:李立鹏
责任校对:郭有林

封面设计:刘 卉
责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社*

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:华中科技大学出版社印刷厂

印 刷:湖北省通山县印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:13.25

字数:305 000

版次:2001年1月第1版 印次:2001年1月第1次印刷

印数:1—5 000

ISBN 7-5609-2316-X/O · 219

定价:15.50元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

本书是大学生学习概率论与数理统计课程的辅助教材,也是大学生报考研究生的参考书.本书按照教育部关于《概率论与数理统计课程的基本要求》和《工学、经济学硕士研究生考试大纲》编写,具有题型多、方法全、覆盖面广、针对性强的特点,非常适合在校大学生和有志学习本门课程人员的需要.

本书应用解析方法对概率统计的方法、概念与习题进行了讨论、求索、分析、归纳,使读者通过学习本书后能较好地掌握概率统计的思想、方法与技巧.本书以大量的例题分析为读者提供有效的服务,还提供了浙江大学盛骤等编的《概率论与数理统计》全书的习题解析与《工学、经济学硕士研究生入学考试数学试题》(1996—2000年)概率统计部分全部试题解析.

本书将是大学生必备的参考书,也是一本很好的教学参考书.本书是 21 世纪高等学校数学系列辅助教材之一,欢迎选用本系列教材.

前 言

21 世纪是知识经济与信息时代,教育和科技将得到迅猛的发展.为了迎接新世纪高等学校教学的需要,我们编写了一套《新世纪高等学校数学系列辅助教材》,本书是其中的一本.

《概率论与数理统计》是在理工、农林、医卫、经济管理和人文各专业领域内有广泛应用与重要实践意义的一门数学基础学科,它在科学技术与人类实践活动中正在发挥越来越大的作用和影响,从而越益引起大家的重视.但是人们在学习掌握这门知识的过程中普遍感到概念难懂,习题难做,思维难于开展,问题难于入手,方法难于掌握.本书就是为了帮助大家解决学习的困难而编写的.

本书按照国家教育部《关于概率论与数理统计课程的基本要求》和《工学、经济学硕士研究生考试大纲》编写而成,因此特别适合在校大学生和有志学习这门课程的人员的需要.

在本书中我们用解析方法对概率论与数理统计中的概念与习题作了分析解答,演绎归纳,论证求索.相信读者在学习本书后一定能在书中找到自己需要的知识、方法和解答,本书的大量例题将为读者指明学习概率统计方法的正确的途径.

为了满足广大读者的要求,我们在本书中还对浙江大学编写的《概率论与数理统计》中的主要习题以及近几年工学、经济学硕士研究生入学考试试题中的概率统计题做了解析,以供读者参阅.

在本书编写出版过程中,得到武汉科技学院(武汉纺织工学院)领导、空军雷达学院领导以及华中科技大学出版社领导的热心支持与帮助,在此一并表示衷心的感谢.

本书由武汉科技学院孙清华、空军雷达学院赵德修主编.由于水平所限和时间仓促,错误之处在所难免,欢迎读者指正.

孙清华 赵德修

2000 年 8 月

目 录

第一章 随机事件与概率.....	(1)
知识提要	(1)
疑难解析	(5)
例题解析	(9)
一、事件之间的关系及运算.....	(9)
二、古典概型与加法定理的运用	(10)
三、条件概率与乘法定理的应用	(15)
四、全概率公式与贝叶斯定理的应用	(17)
五、独立性的应用	(21)
六、贝努里概型的应用	(24)
七、综合题与杂题	(27)
习题解析.....	(32)
第二章 随机变量及其分布	(43)
知识提要.....	(43)
疑难解析.....	(47)
例题解析.....	(50)
一、基本概念的理解	(50)
二、求离散型随机变量的分布律	(53)
三、事件概率的求法	(55)
四、分布函数与概率密度函数的求法	(58)
五、随机变量函数的分布的确定	(64)
六、综合题与杂题	(71)
习题解析.....	(77)
第三章 多维随机变量及其分布	(87)
知识提要.....	(87)
疑难解析.....	(92)

例题解析	(95)
一、离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布与边缘分布的求法	(95)
二、随机变量 (X, Y) 的分布函数的求法	(98)
三、随机变量 (X, Y) 的概率密度与边缘密度的求法	(104)
四、独立性的判定及其应用	(112)
五、条件分布的求法	(117)
六、求两个随机变量的函数的分布	(122)
七、综合题与杂题	(133)
习题解析	(140)
第四章 随机变量的数字特征	(151)
知识提要	(151)
疑难解析	(155)
例题解析	(159)
一、分布已知,求随机变量的数字特征	(159)
二、分布未知,求随机变量的数字特征	(168)
三、随机变量函数的数字特征的求法	(173)
四、关于数字特征的证明题	(177)
五、综合题与杂题分析	(181)
习题解析	(185)
第五章 大数定律与中心极限定理	(196)
知识提要	(196)
疑难解析	(198)
例题解析	(200)
一、契比雪夫不等式的应用	(200)
二、大数定律的应用	(203)
三、中心极限定理的应用	(206)
四、综合题与杂题分析	(211)
习题解析	(215)
第六章 数理统计的基本概念	(219)
知识提要	(219)
疑难解析	(223)

例题解析	(226)
一、总体、样本及其分布的确定	(226)
二、样本均值、样本方差的计算	(227)
三、样本统计量的概率与样本容量的求法	(230)
四、经验分布函数与频数直方图	(233)
五、抽样分布问题的求法	(234)
六、证明题解析	(236)
七、综合题与杂题解析	(239)
习题解析	(241)
第七章 参数估计	(243)
知识提要	(243)
疑难解析	(247)
例题解析	(250)
一、点估计的求法	(250)
二、估计量标准的分析	(256)
三、参数的区间估计	(260)
四、综合题与杂题分析	(265)
习题解析	(269)
第八章 假设检验	(280)
知识提要	(280)
疑难解析	(283)
例题解析	(286)
一、正态总体均值的假设检验分析	(286)
二、正态总体方差的假设检验分析	(289)
三、关于两个正态总体均值的假设检验	(290)
四、关于两个正态总体方差的假设检验	(294)
五、总体分布的假设检验- χ^2 检验法	(296)
六、秩和检验法分析	(300)
七、其他题型分析	(302)
习题解析	(305)
第九章 方差分析与回归分析	(312)

知识提要	(312)
疑难解析	(321)
例题解析	(325)
一、方差分析	(325)
二、回归分析	(337)
三、其它杂题分析	(348)
习题解析	(351)
总复习题	(357)
总复习题解答	(363)
硕士研究生入学数学考试要求	(365)
工学、经济学硕士研究生入学试题解析	(368)
一、客观型试题解析	(368)
二、计算题解析	(377)
附表 1	(397)
附表 2	(399)
附表 3	(400)
附表 4	(402)
附表 5	(404)
附表 6	(407)
附表 7	(416)

第一章 随机事件与概率

知 识 提 要

1. 随机试验、样本空间与随机事件

随机试验是具有以下特征的试验:可以在相同条件下重复进行;每次试验的结果不止一个,但结果事先可以预知;每次试验前不能确定哪个结果会出现.

随机试验的所有可能结果的集合称为样本空间. 试验的每一个可能结果称为样本点. 记为 $S = \{e\}$.

样本空间 S 的子集合称为试验的随机事件,分为复合事件和简单事件. 还有必然事件与不可能事件.

2. 事件的关系与运算

包含: $A \subset B$, 称事件 B 包含事件 A , 即事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

相等: $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 称事件 A 与事件 B 相等.

和: $A \cup B$, 表示 A 、 B 二事件中至少有一个发生; $\bigcup_{k=1}^n A_k$, 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生.

积: $A \cap B$, 也记作 AB , 表示 A 、 B 二事件都发生; $\bigcap_{k=1}^n A_k$, 表示 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 都发生.

互不相容(或互斥): 指 $AB = \emptyset$, 即事件 A 与事件 B 不能同时发生; 若 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的任意两个事件不能同时发生, 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 互不相容.

互为对立(互逆): 若 $A \cup B = S$, 且 $AB = \emptyset$, 则 A 与 B 二事件

互逆. 有 $A + \bar{A} = S, A\bar{A} = \emptyset$.

运算律:

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

德·摩根律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

3. 频率与概率

在 n 次重复试验中, 事件 A 发生的次数 n_A 称为 A 的频数, 比值 n_A/n 称为事件 A 的频率.

概率的公理化定义 若 S 是试验 E 的样本空间, 对于 E 的每一事件 A 赋以一个实数 $P(A)$, 称为事件 A 的概率. 函数 $P(\cdot)$ 具有: 非负性, 即对任一事件 $A, P(A) \geq 0$; 规范性, $P(S) = 1$; 可加性, 即对互不相容事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

统计概率: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 频率 $f_n(A) = n_A/n \rightarrow P(A)$. 因此当 n 很大时, $P(A) = P \approx f_n(A)$ 称为事件 A 的统计概率.

几何概率: 将事件 A 与样本空间 S 用几何量的测度 S_A 与 S (长度、面积或体积) 定义的概率 $P = S_A/S$.

古典概率: 若试验的基本事件为有限个, 且每个事件发生的可能性相等, 则试验对应古典概型 (等可能概型). 事件 A 发生的概率

$$P(A) = \frac{A \text{ 包含的基本事件个数}}{\text{样本空间的总事件个数}}.$$

4. 概率的运算性质

$$P(S) = 1, P(\emptyset) = 0.$$

若 $AB = \emptyset$, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$; 否则, $P(A \cup B) =$

$$P(A)+P(B)-P(AB).$$

对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$

若 $\bar{A}$ 为 A 的对立事件, 则 $P(A)=1-P(\bar{A})$.

5. 条件概率与乘法定理

在事件 B 已发生的条件下, 事件 A 发生的概率, 称为事件 A 在给定条件 B 下的条件概率, 记作 $P(A|B)$.

若 $P(B)>0$, 则 $P(A|B)=P(AB)/P(B)$. 也可以在缩减的样本空间(B 发生的样本空间)中求事件 A 发生的概率.

乘法定理: 对于任意二事件 A 与 B , $P(A)>0$, $P(B)>0$, 有

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 有

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 \dots A_n) &= P(A_1) P(A_2 | A_1) \\ &\quad \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1}). \end{aligned}$$

6. 全概率公式与贝叶斯定理

设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是随机试验 E 的一组事件, 若有 $B_i B_j = \emptyset (i \neq j, i, j=1, 2, \dots, n)$, $\sum_{i=1}^n B_i = S$, 则称 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分或一个完备事件组.

全概率公式: 若 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个划分, A 是 E 的一个事件, $P(B_i)>0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A|B_i).$$

贝叶斯定理 在全概率公式条件下, 有

$$P(B_i|A) = [P(B_i)P(A|B_i)] / [\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)].$$

7. 事件的独立性

对试验 E 的两事件 A, B , 若有 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A 与事件 B 独立. 此时, $P(A|B) = P(A)$ 或 $P(B|A) = P(B)$.

对试验 E 的 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 若有

$$P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

$$P(A_i A_j A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \quad 1 \leq i < j < k \leq n,$$

...

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n)$$

都成立, 则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立. 此时, 有

$$P(A_i | \underbrace{A_j A_k \cdots}_{m \uparrow}) = P(A_i), \quad m = 1, 2, \dots, n-1.$$

8. 二项概率公式

在 n 重独立重复试验中, 若每次试验结果只有 A 与 $\bar{A}$, 且 $P(A) = p$, 则 n 次试验中 A 恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

学习与考试要求

- 1) 理解随机事件的概念, 熟练掌握事件之间的关系与运算.
- 2) 理解事件频率的概念和概率的公理化定义, 了解古典概率、几何概率.

3) 掌握概率的基本性质和加法定理, 会计算简单的古典概率.

4) 理解条件概率的概念, 掌握乘法定理、全概率公式、贝叶斯公式, 会应用公式计算概率.

5) 理解事件的独立性概念, 会应用独立性计算概率.

6) 掌握独立重复试验概念和二项概率计算.

重点与难点

重点是古典概率定义及计算, 条件概率及其计算.

难点是分析事件之间的关系, 一个事件怎样用已知事件表述.

疑 难 解 析

1. 什么是统计规律性? 什么是随机现象?

答 在一定条件下发生,其结果是多样的,因而在现象发生前不能预知确切结果的不确定现象,其结果在大量重复试验中呈现出一种规律性.由于这种规律是根据统计数据分析出来的,因而称为统计规律性.

在一次试验或观察中结果不能预先确定,而在大量重复试验中结果具有统计规律性的现象称为随机现象.随机现象是概率论与数理统计的主要研究对象.

2. 如何理解互逆事件与互斥事件?

答 如果两个事件 A 与 B 必有一个发生,且至多有一个发生,则 A, B 为互逆事件. $B = \bar{A}$.

如果两个事件 A 与 B 不能同时发生,则 A, B 为互斥事件.

因而,互逆必定互斥,互斥未必互逆.

如考试及格与不及格是互逆也是互斥的,但考试 70 分和 80 分互斥却不互逆.

区别互逆与互斥的关键是,当样本空间只有两个事件时,两事件才可能互逆.而互斥适用于多个事件的情形.互斥事件的特征是,在一次试验中两者可以都不发生,而互逆事件必发生一个且至多发生一个.

3. 如何用已知事件来表达与其有关的其它事件?

答 首先要了解所讨论试验中事件的构成,所需表达事件与已知事件的关系,然后运用这些关系与运算法则将事件表达出来.

例如,设 S 为事件 $0 \leq x \leq 5$, A 为事件 $1 \leq x \leq 2$, B 为事件 $0 \leq x \leq 2$, 则

$0 \leq x \leq 2$ 为事件 B 或 $A \cup B$,

$1 \leq x \leq 2$ 为事件 A 或 BA ,

$2 < x \leq 5$ 为事件 $S - B$ 或 $\bar{B}$,

$0 \leq x < 1$ 为事件 $B-A$.

4. 样本空间与必然事件之间有什么关系?

答 样本空间是随机试验 E 的所有可能结果的集合,而必然事件是指随机试验中一定会出现的结果.虽然在一次试验中只有样本空间的一个元素发生,但在把样本空间视作一个整体时,我们说它在每次试验中都发生了.因此,可以说样本空间是必然事件.

5. 在什么情况下,随机事件 A 的频率可以作为它的概率的近似值?

答 随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 反映事件 A 在多次重复试验中发生的频繁程度.当 n 增大时,频率在概率 $P(A)$ 附近摆动.因此,每一个从独立重复试验中测得的频率,都可以作为概率 $P(A)$ 的近似值.而且,一般 n 越大,近似程度越好.

事实上,当 n 增大时,频率大量集中于包含 $P(A)$ 的一个小区间.任选区间中一值作为概率的近似值,称为统计概率.在解题时,当 n 较大时,可取统计概率为 $P(A) \approx n_A/n$.

6. 概率是否可以看做频率的极限?

答 这样理解是不恰当的.因为如上题所述,当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(A)$ 在 $P(A)$ 附近摆动,与高等数学中极限的 $\epsilon-N$ 概念是不同的.由于概率是随机现象的可能性的赋值,对于任给的 $\epsilon > 0$,存在偶然的因素,可能找不到 $N(\epsilon)$,从而得不到 $|f_n(A) - P(A)| < \epsilon$.

7. 怎样理解古典概型的等可能假设?

答 等可能性是古典概型的两大假设之一,有了这两个假设,给直接计算概率带来了很大的方便.但在事实上,所讨论问题是否符合等可能假设,一般不是通过实际验证,而往往是根据人们长期形成的“对称性经验”作出的.例如,骰子是正六面形,当质量均匀分布时,投掷一次,每面朝上的可能性都相等;装在袋中的小球,颜色可以不同,只要大小和形状相同,摸出其中任一个的可能性都相等.因此,等可能假设不是人为的,而是人们根据对事物的认识——对称性特征而确认的.

8. 怎样判断讨论的问题是排列问题还是组合问题?

答 主要是观察讨论的问题与顺序的关系. 如果与顺序无关, 是组合问题; 如果与顺序有关, 是排列问题.

例如, 某车间 50 名工人, 要选三人分别担任工会主席, 副主席和委员, 有两种选举方法: 一种是选出三人, 由他们自己分工, 这种选法与顺序无关, 是组合问题, 共有 C_{50}^3 种选法. 另一种是分别选出工会主席、副主席和委员, 这种选法与顺序有关, 是排列问题, 共有 P_{50}^3 种选法. 但有时两者可以互相利用, 如第二种选法也可以先选出三人, 再由三人进行排列, 即 $C_{50}^3 \cdot 3! = P_{50}^3$, 两者结果相同.

9. 条件概率为什么是概率? 它与无条件概率有什么区别?

答 因为可以验证, 条件概率满足概率定义中的三个条件, 所以它是概率.

条件概率是在试验 E 的条件上加上一个新条件(如 B 发生)求事件(如 A)发生的概率. 条件概率 $P(A|B)$ 与 $P(A)$ 的区别就是在 E 的条件上增加了一个新条件. 而无条件概率是没有增加新条件的概率.

10. 条件概率 $P(A|B)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 有什么区别?

答 $P(AB)$ 是在样本空间 S 内, 事件 AB 的概率, 而 $P(A|B)$ 是在试验 E 增加了新条件 B 发生后的缩减样本空间 S_B 中计算事件 A 的概率. 虽然都是 A 、 B 同时发生, 但两者是不同的, 有 $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$, 仅当 $P(B) = P(S) = 1$ 时, 两者相等.

11. 两事件 A 、 B 独立与两事件 A 、 B 互斥这两个概念有什么关系?

答 这两个概念并无必然的联系. 两事件 A 、 B 独立, 则 A 中任一个事件的发生与另一个事件的发生无

关; 而两事件互斥, 则其中任一个事件的发生必然导致另一个事件不发生, 所以说, 两事件的发生是有影响的.

可以用图形作一直观解释. 图 1.1 中 A 是左上半个正方形, B

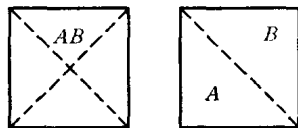


图 1.1

是右上半个正方形, $P(A)=P(B)=1/2, P(AB)=1/4$, 表示样本空间中两独立事件间关系. 右图中左下半个正方形是 A , 右上半个正方形是 B , $P(A)=P(B)=1/2, P(AB)=0$. 表示样本空间中两互斥事件间关系. 读者能明确看出其中的不同.

12. 什么是先验概率和后验概率? 两者间有什么关系?

答 先验概率是指根据以往经验和分析得到的概率, 如全概

率公式 $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$ 中的 $P(B_i)$, 它往往作为“由因果求果”问题中的“因”出现. 后验概率是指在得到“结果”的信息后重新修正的概率, 如贝叶斯公式 $P(B_i|A) = P(A|B_i)P(B_i)/P(A)$ 中的 $P(B_i|A)$, 是“执果寻因”问题中的“因”.

先验概率与后验概率有不可分割的联系, 后验概率的计算要以先验概率为基础. 如求 $P(B_i|A)$ 要先求 $P(A)$, 一定要知道 $P(A|B_i)$.

13. 什么是小概率事件? 它有什么实际的意义?

答 小概率事件是指一次试验中发生的概率很小的事件. 但从理论上讲, 一个事件发生的概率不论多小, 只要不断重复试验下去, 事件迟早会出现的概率是 1.

因为, 若设 $P(A) = \epsilon > 0$, A_k 为 A 在第 k 次试验中出现, 则 $P(A_k) = \epsilon, P(\bar{A}_k) = 1 - \epsilon. P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) = (1 - \epsilon)^n$, 于是在前 n 次试验中, A 至少出现一次的概率为

$$P_n = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n) = 1 - (1 - \epsilon)^n \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

其实际意义是, 我们可以借助它判断事情的真实性. 因为根据实际推断原理, 小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的. 而某一认为概率很小的事件, 居然在一次试验中发生了, 人们就有理由怀疑其正确性.