# 《地球物理学》习题解析

〔澳〕FRANK D. STACEY 著





地震出版社

# 《地球物理学》习题解析

〔澳〕Frank D. Stacey 著
中国科学技术大学地球物理教研室 译

地 震 出 版 社

1981

«地球物理学» 习题解析

〔澳〕Frank. D. Stacey 著

中国科学技术大学地球物理教研室 译

地 震 出 版 社 出版

北京复兴路63号

北 京 印 刷 一 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

787×1092 1/32 2 7/8 印张 65千字

1981年7月第一版 1981年7月第一次印刷

印数:0001—0000

统一书号:13180·127 定价:0.38元

# 出 版 说 明

这本小册子是«地球物理学»（« Physics of the Earth » Frank D. Stacey 著。中国科学技术大学地球物理教研室译，地震出版社出版）一书的习题解答。为便于使用这本书，我们在每道题解前补加了原题目（原书无题目）。书中所涉及的章节及公式的序号，均为«地球物理学»中的有关序号。

本书前六章由徐文骏译，后四章由刘来泉译，全书由郭自强、冯洛玗校核。

译者 1980.4

**1.1** 考虑一个球形黑体，距太阳一个天文单位，它以某种方式旋转和翻滚，以使其整个表面的温度相等，求表面温度是多少？（利用附录 F 中的太阳常数值）

**解**：地球（横截面 $\pi R^2$）所截获的功率为

$$P=\pi R^2 S.$$

温度为 $T$（°K）的辐射表面（面积 $4\pi R^2$）以下述速率损失能量：

$$P=4\pi R^2\sigma T^4.$$

（$\sigma$=Stefan-Boltzmann常数，见附录 F）

令两式相等，求得

$$T=\left(\frac{S}{4\sigma}\right)^{1/4}=\left[\frac{1360}{4\times5.67\times10^{-8}}\right]^{1/4}=278^\circ\mathrm{K}.$$

虽然地球并不是一个黑体，但这是地球平均表面温度的一个比较好的估计值。

**1.2** 如果习题 1.1 中的物体以固定的一面对着太阳，那末此物体正对着太阳的点上的平衡温度是多少？（物体内的热传导忽略不计）

**解**：在这种情况下，同一表面积既接收、又辐射太阳功率。因此，对于面积 $A$，

$$P=AS=A\sigma T^4,$$

$$T=\left(\frac{S}{\sigma}\right)^{1/4}=394^\circ\mathrm{K}=121^\circ\mathrm{C}.$$

如果地球相对于太阳无转动，而且没有大气把热量从热区域传递到冷区域，则这个温度就是正对着太阳的点的平衡温度。

**1.3** 太阳（半径 $6.96\times10^8$米）表面的等当黑体温度为多少？

**解**：太阳表面单位面积的功率是

$$P=S\left(\frac{R_{轨道}}{R_{日}}\right)^2=\sigma T_S^4 \quad (R_{日}=6.96\times10^8米),$$

$$T_S=\left(\frac{S}{\sigma}\,\frac{R^2{}_{轨道}}{R^2{}_{日}}\right)^{1/4}=5770^\circ\ \mathrm{K}\,(=5496^\circ\mathrm{C}).$$

**1.4** 行星平衡温度与轨道半径间的关系如何？

**解**：行星单位面积接收到的功率$\propto R_{轨道}^{-2}$，行星单位面积辐射出的功率$\propto T_{行星}^4$，
因此

$$T_{行星}^4\propto R_{轨道}^{-2} \quad 或 \quad T_{行星}\propto 1/\sqrt{R_{轨道}}.$$

**1.5** 由于太阳的旋转，从相反的(指接近和远离观察者)边缘部分上的辐射见到有 Doppler 移动 (分别为蓝移和红移)，这样辐射场带走了太阳的一部分角动量，由于这种效应，太阳旋转减慢的相对速率为多少？(假定太阳转动惯量为 0.3 $MR^2$。)

**解**：对于在太阳表面上的观察者来说，太阳表面的辐射不会出现 Doppler 移动。太阳朝所有方向均等地辐射能量的事实就意味着，因辐射带走动量从而对太阳表面的净作用与太阳表面垂直，因此对太阳的转动没有施加阻力矩。

然而，如果我们假设太阳的半径 $r$ 完全保持恒定，同时转动惯量保持为 0.3 $Mr^2$，那末，由太阳辐射能量$\left(即\frac{dM}{dt}=-\frac{1}{c^2}\frac{d\varepsilon}{dt}，这里\frac{d\varepsilon}{dt}是辐射功率\right)$所引起的质量亏损，必由从太阳内部向外运动的质量来补偿。而在这个过程中，角动量守恒导至角速度减小。因为辐射和所伴随的质量从表面上亏损，而半径 $r$ 的薄球壳的转动惯量为$\frac{2}{3}r^2dM$，所以，角

动量的变化率为

$$\frac{da}{dt}=\frac{2}{3}r^2\omega\frac{dM}{dt}, \tag{1}$$

其中 $$a=I\omega=0.3\,Mr^2\omega, \tag{2}$$

故

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt}=\frac{20}{9M}\frac{dM}{dt}. \tag{3}$$

如果 $r$ 是常数，对(2)式求导得到

$$\frac{1}{a}\frac{da}{dt}=\frac{1}{M}\frac{dM}{dt}+\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}, \tag{4}$$

因此

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}=\frac{11}{9M}\frac{dM}{dt}=-\frac{11}{9}\frac{1}{Mc^2}\frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{5}$$

令 $\frac{d\varepsilon}{dt}=3.8\times10^{26}$ 瓦，$M=1.99\times10^{30}$千克，

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}=-2.6\times10^{-21}\text{秒}^{-1}=-8.2\times10^{-14}\text{年}^{-1}.$$

这是一个微不足道的数值，其实质在于由辐射造成的质量亏损，只占总质量的极其微小的部分。

**1.6** 假定由于小行星带的碰撞，不断地产生行星际尘埃，其大小分布为，在任意质量范围 $m$ 到 $(m+dm)$ 中粒子数为 $dN$，$dN\propto m^{-n}dm$，此处 $n>1$（根据 Dohnanyi，$n\approx 1.83$，1968)。一旦产生尘埃，由于 Poynting-Robertson 效应(节 1.4)它们将螺旋状地旋进太阳，那末被地球拦截的粒子质量分布如何？假定被拦截的质量只是总质量的很小一部分，并由靠近地球轨道时的停留时间所确定，而且所有粒子密度相同。

**解**：在任一质量范围 $m$ 到 $(m+dm)$ 的生成数是 $dN\propto$

$m^{-n}dm$，它也必须是由于 Poynting-Robertson 效应在向太阳旋进的过程中穿过任意轨道半径的个数。在微粒产生的区域里，任意半径处空间的数密度与 $dN$ 成正比，也与 $v_r^{-1}$成正比。$v_r$ 是旋进运动的(朝里的)径向速度。由方程 1.17 得 $v_r \propto d^{-1}$，$d$ 是微粒的直径，而 $d \propto m^{1/3}$。所以，空间的数密度是

$$dN' \propto m^{-(n-\frac{1}{3})}dm.$$

因为地球只截获很少的一部分，所以可以将其当作这种分布的抽样。

**1.7** 假定陨星分为两类，即 100% 为金属的铁陨星和金属平均含量为 10% 的球粒陨石，并假定它们的总的金属含量与地球相同，那末陨星的总质量中球粒陨石占多大比例？

**解**：从附录 F 查得内、外核和整个地球的总质量，则有

$$\frac{金属质量}{总质量}=\frac{M_{内核}+M_{外核}}{M_{总}}=0.326.$$

而

$$M_{球粒}+M_{铁质}=M_{总},$$

$$0.1\,M_{球粒}+M_{铁质}=M_{金属},$$

$$0.9\,M_{球粒}=M_{总}-M_{金属}=(1-0.326)M_{总},$$

因此

$$\frac{M_{球粒}}{M_{总}}=\frac{1-0.326}{0.9}=0.75.$$

**1.8** 考虑月球在某瞬间正处于太阳和地球之间（日蚀时），试计算太阳和地球对月球引力的比例；因为太阳引力较强，试解释月球依然在绕地球的轨道上，而不进入绕太阳的独立轨道的原因。

**解：**
$$\frac{g_{日}}{g_{地}}=\frac{M_{日}/R^2_{日}}{M_{地}/R^2_{地}}=\frac{M_{日}}{M_{地}}\left(\frac{R_{地}}{R_{日}}\right)^2=2.20.$$

可见，太阳的引力比地球要强两倍多，因此月球的净加速度不是向着地球而是向着太阳。但是，地球也在绕太阳运动，也受到指向太阳的径向加速度的作用。所以月球不是脱离地球而是与地球一起留在绕太阳的轨道上。

**1.9** 水星的不可压缩密度估计为 5300 千克米$^{-3}$，如果它由一个核和幔所构成，其成分类似于地球，则核半径与总半径之比为多少？

**解：**
$$\bar{\rho}=r^3\rho_{核}+(1-r^3)\rho_{幔}.$$

其中 $r$ 是核半径占总半径的百分数。[为了证明这一结论，令总体积为$V$，核体积为$Vr^3$，核质量为$Vr^3\rho_{幔}$。同样，幔质量为$V(1-r^3)\rho_{幔}$，因此 $\bar{\rho}$=总质量/$V$。]

取 $\rho_{幔}=3300$千克米$^{-3}$，$\rho_{核}=7100$ 千克米$^{-3}$，则

$$r=\left(\frac{\bar{\rho}-\rho_{幔}}{\rho_{核}-\rho_{幔}}\right)^{1/3}\approx 0.8_1.$$

(水星的质量小，我们可以近似引用不可压缩密度值，见附录A，表 A.1)。地球的相应值是 $r=0.55$，如采用不可压缩密度值，则 $r$ 略大些。

**1.10** 从太阳系外自由下落的流星体到达地球的平均速度有多大？如何将它与从地球上逃逸的速度相比较？

**解：**在太阳系里，任何物体"自由下落"时，如不处于受行星引力扰动的范围，都径向地坠向太阳。在这里，我们认为唯一的扰动来自地球本身。因此在合成朝着太阳自由下落的速度 $v_1$ 与地球的轨道速度 $v_2$ 时，还要加上地球引力的影响。忽略引力的贡献，因 $v_1$ 和 $v_2$ 相互垂直，所以相对速度 $v_r=(v_1^2+v_2^2)^{1/2}$。

而 $$v_1=\left(\frac{2GM}{r_E}\right)^{1/2},$$

$$v_2=\left(\frac{GM}{r_E}\right)^{1/2}$$

其中$M$是太阳的质量，$r_E$ 是地球轨道的半径，$G$是引力常数。因此，

$$v_r=\left(\frac{3GM}{r_E}\right)^{1/2}=5.16\times10^4\text{米秒}^{-1}.$$

这个速度大大超过地球上的逃逸速度

$$v_E=\left(\frac{2Gm_E}{a}\right)^{1/2}=1.12\times10^4\text{米秒}^{-1},$$

其中 $m_E$ 和 $a$ 分别是地球的质量和半径。所以，由地球引起的微粒偏转相当小。把与 $v_r$ 和 $v_E$ 对应的动能相加，则得出自由下落微粒到达地球的速度

$$v=(v_r^2+v_E^2)^{1/2}=5.28\times10^4\text{米秒}^{-1}.$$

**2.1** 推导式(1.4)和(1.5)。

**解**：如果所涉及的宇宙线通量是 $\phi$，则单位体积内稳定核素的生成率是$\frac{dS}{dt}=\phi\sigma_S P$，放射性核素的生成率是$\frac{dR}{dt}=\phi\sigma_R P$，这里 $P$ 是生成它们的同位素的浓度。如果 $\phi$ 在曝光期间 $t$ 内为常数，则稳定同位素的总累积量是

$$S=\int_0^t\phi\sigma_S P\,dt=\phi\sigma_S Pt.$$

如 $t$ 比活性同位素的半衰期长很多，则其生成和衰变达到平衡，故得

$$\frac{dR}{dt}=\phi\sigma_R P-\lambda R=0\quad[\text{见}(2.4)].$$

联立这些方程以消去 $P$ 和 $\phi$，得

$$t=\frac{S}{R}\frac{\sigma_R}{\sigma_S}\frac{1}{\lambda}=\frac{S}{R}\frac{\sigma_R}{\sigma_S}\frac{t_1/2}{\ln 2}. \qquad (1.4)$$

如果稳定同位素既由放射性同位素的衰变生成又能直接生成的话，那末平衡生成率为$\frac{dS}{dt}=\phi(\sigma_S+\sigma_R)P$，而式(1.4)中的$\sigma_S$这时应该用式(1.5)中的$(\sigma_S+\sigma_R)$来代替。

**2.2** 推导式(2.2)。

**解**：在质量成球对称分布情况下，半径$r$（不论$r$在球内还是在球外）处的引力场仅仅由$r$内部的质量决定。因此，我们可以通过剥离球壳并把它们移到无穷远来计算$E_G$。密度为$\rho$,位于$r$处且厚度为$dr$的壳层质量是$dm=4\pi r^2\rho dr$。$r$里面的质量是$m=4/3\pi r^3\rho$，相应的引力位是$V(r)=-Gm/r$。这个壳层对$E$的贡献是

$$dE=Vdm=-\frac{16}{3}\pi^2G\rho^2r^4dr,$$

故

$$E=-\frac{16}{3}\pi^2G\rho^2\int_0^R r^4dr=-\frac{16}{15}\pi^2G\rho^2R^5,$$

而 $$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho,$$

所以 $$E=-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}.$$

这是从无穷远处将质量$M$聚集起来时，引力所作的功。

**2.3** 对于衰减常数为$r$的放射性同位素原子，证明其平均寿命为$\lambda^{-1}$。

**解**： $$N=N_0e^{-\lambda t},$$

$$dN^*=-dN=\lambda N_0e^{-\lambda t}dt,$$

它是寿命在$t$和$(t+dt)$之间的个数。所以平均寿命是

$$\bar{t}=\frac{1}{N_0}\int_{t=0}^{\infty} t dN^{*}=\int_0^{\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt=\frac{1}{\lambda}.$$

**2.4** 考虑一块岩石，它产生如下的等时线数据：

$$\frac{d(Ar^{40})}{d(K^{40})}=0.098\pm0.005,$$

$$\frac{d(Sr^{8}/Sr^{86})}{d(Rb^{87}/Sr^{86})}=0.0215\pm0.007,$$

$$\frac{d(Pb^{207}/Pb^{204})}{d(Pb^{206}/Pb^{204})}=0.090\pm0.005.$$

(a) 从上述每条等时线及等时线数据推出的误差求岩石“年龄”。

(b) 找出不同的“年龄”间之所以有歧离的原因及可能的衰变历史。

**解**：(a)根据方程(2.9)，$\frac{d(Ar^{40})}{d(K^{40})}=0.105(e^{\lambda_K t}-1)=$ $0.098\pm$ $\pm0.005$，因此，

$$t_{Ar}=(1.20\pm0.05)\times10^9\text{年}.$$

根据方程(2.14)，$\frac{d(Sr^{87}/Sr^{86})}{d(Rb^{87}/Sr^{86})}=(e^{\lambda_{Rb} t}-1)=0.0215\pm$ $\pm0.0007$，因此

$$t_{Sr}=(1.50\pm0.05)\times10^9\text{年}$$

根据方程(2.17)，$\frac{d(Pb^{207}/Pb^{204})}{d(Pb^{206}/Pb^{204})}=\frac{U^{235}}{U^{238}}\frac{e^{\lambda_{235}t}-1}{e^{\lambda_{238}t}-1}=$ $=0.090\pm0.05$，因此

$$t_{Pb}=(1.43\pm0.10)\times10^9\text{年}$$

(b) 年龄的差别大大地超过了各个“年龄”公式中的误差。Ar 年龄最小，意味着氩有丢失，在误差小的情况下，这一论断对所有所用的矿物都是适用的。可以推想约在 $1.2\times10^9$ 年前，氩就差不多完全丢失了，而不只是部分地损失。Sr和

Pb 年龄没有明显的差别，而与 U-Pb 微小的扩散符合。在这种情况中，应该看到 Pb 年龄的误差最大，这意味着扩 散程度的可变动性大。所以应取 Sr 年龄为最可信的生成年龄 估 计值；而把 Ar 年龄当作大约 $1.2\times10^9$ 年前某种变质事件的证据，尽管没有显著的加热也能发生氩的扩散。

**2.5** 在通常的地球水中(在大气、海洋等)，氢原子中大约有 0.014%为重同位素 D 或 $H^2$ 原子。在释气过程中， 从地球内部露出的年青水中，D 的含量比上述 含量约少 10%，假定所有的地球水都是释气的产物，这种成分上的差异可以解释为高层大气中水的分解，以及轻同位素 $H^1$ 有 选 择地向空间耗散。问曾有多少大气中的氧是如此被存留下的？如何将此与大气中氧的数量相比较？［注意： 由于地壳中新生矿物的氧化使大气中氧不断地损失，例如磁铁矿 ($Fe_3O_4$) 变成赤铁矿 ($Fe_2O_3$)，以及火山气体中甚至包含有 氢 而 缺 乏 氧。因此，如果不是有选择地使氢向空间逸散，在大气中不可能有足够的氧含量，这是显然的。］

**解**：氕($H^1$)的损失最小与氘($H^2$) 没有损 失 的资料是一致的。若用下标“0”表示原始值 (具有原生比 $H^2/H^1$)，用下标 $a$ 表示现在大气圈和水圈的值，则有

$$\left(\frac{H^2}{H^1}\right)_0=0.9\left(\frac{H^2}{H^1}\right)_a$$

而
$$H_0^2=H_a^2,$$

因此
$$H_0^1=\frac{1}{0.9}H_a^1=1.11\ H_a^1.$$

所以损失的氕($H_0^1-H_a^1$)$=0.11\ H_a^1$， 即损失量是目前海洋中氢的 11%。估计海洋的总质量是 $1.4\times10^{21}$ 千克 (附录 F)，由于失去氢所留下的氧就为

$$\frac{16}{18}\times 0.11\times 1.4\times 10^{21}\text{千克}=1.4\times 10^{20}\text{千克}.$$

这个值可以与大气圈的氧比较一下：大气圈中含氧$5.1\times 10^{18}\times 23\%$千克$=1.2\times 10^{18}$千克。可见，残留下来的氧的99%已在氧化过程中消失。

**2.6** 如果核合成过程以相同的原子丰度产生 $I^{127}$ 和$I^{129}$，并在时间 $\tau$ 内以均一速率继续进行这个过程，而在此时间以前和以后都不发生合成过程；在核合成停止后的时间 $t$，开始在一个特定的陨星中积累 $Xe^{129}$。求陨星中比值（$Xe^{129}/I^{127}$）与 $\tau$、$t$ 的关系式，并求 $I^{129}$ 的衰变常数 $\lambda$。进一步考虑 $\tau\ll\lambda^{-1}$ 和 $\tau\gg\lambda^{-1}$ 两种特殊情况。

**解**：在时间间隔 $\tau$ 内，$I^{129}$ 的生成率是 $I^{127}/\tau$，这里 $I^{127}$ 表示该种同位素的总生成量。因而在这一时间间隔内，$I^{129}$ 的净生成率

$$\frac{d}{dt}(I^{129})=\frac{I^{127}}{\tau}-\lambda I^{129},$$

因此

$$\int_0^{(I^{129})}\frac{d(I^{129})}{\frac{I^{127}}{\lambda\tau}-I^{129}}=\int_0^{\tau}\lambda dt,$$

由此得出
$$\left(\frac{I^{129}}{I^{127}}\right)_{\tau}=\frac{1}{\lambda t}(1-e^{-\lambda\tau}).$$

在陨星中最终生成的 $Xe^{129}$ 相当于合成终止以后在时间 $t$ 留下的 $I^{129}$，即

$$\frac{Xe^{129}}{I^{127}}=\left(\frac{I^{129}}{I^{127}}\right)_{\tau+t}=\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda t}(1-e^{-\lambda\tau}).$$

对于 $\tau\ll\lambda^{-1}$，

$$\frac{Xe^{129}}{I^{129}}=\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda t}(1-1+\lambda\tau-\cdots)=e^{-\lambda t}.$$

对于$\tau\gg\lambda^{-1}$，

$$\frac{Xe^{129}}{I^{129}}=\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda\tau}.$$

**2.7** 如果海水中 NaCl 的钠总量为海水量的 1.07%，且由于岩石的侵蚀和分解而不断地积累，这些岩石 1%的质量为钠，问在地质年代中有多少岩石已被侵蚀？占目前地壳的多大比例？(引用估算出的侵蚀速率和海洋中盐的积累速率曾推测地球的大致年龄。)

**解**：海洋质量的 1.07%是 $1.5\times10^{19}$千克，表明被侵蚀的岩石有 $1.5\times10^{21}$千克，相当于地壳质量的 6%。假定大部分地质时期具有恒定的侵蚀速率，即大约为 $3.75\times10^{11}$千克年$^{-1}$，这相当于在整个洋底平均沉淀速率为 $10^{-3}$ 千克米$^{-2}$年$^{-1}$ 或者每年沉积厚 $5\times10^{-7}$ 米的密度为 2000 千克米$^{-3}$的沉积物。

**2.8** 为什么不能用衰变 $K^{40}\to Ca^{40}$ 求岩石年龄？

**解**：地球上 $K^{40}$ 的总含量约 $10^{18}$ 千克(2.3 节)，而 $Ca^{40}$ 的总含量大概是 $10^{23}$ 千克（见表 1.1)。无法区别放射性产生的 $Ca^{40}$ 和丰度为前者 $10^5$倍的原生 $Ca^{40}$。

**3.1** 把地球看做质量$M$和半径$R$的球体，它由两部分组成，即厚为 $R/2$ 的地幔以及半径为 $R/2$ 的地核。每一部分都有均匀的密度，而地核密度为地幔密度的 $f$ 倍。地球的转动惯量为 $1/3\ MR^2$，求 $f$ 值为多少？

**解**：最简单的办法是把地球看成两个叠加的球，其一密度为 $\rho$、半径为 $R$，另一个密度$(f-1)\rho$、半径为 $R/2$。于是总的转动惯量和质量是

$$I=0.4\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)R^2+0.4\left[\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3(f-1)\rho\right]\left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$=0.4\frac{4}{3}\pi R^5\rho\left(1+\frac{f-1}{32}\right),$$

$$M=\frac{4}{3}\pi R^3\rho+\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3(f-1)\rho$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3\rho\left(1+\frac{f-1}{8}\right),$$

因此
$$\frac{I}{MR^2}=0.4\frac{\left(1+\frac{f-1}{32}\right)}{\left(1+\frac{f-1}{8}\right)}=\frac{1}{3},$$

$$f=\frac{23}{7}=3.29.$$

**3.2** (a) 火星以角速度 $\omega=7.0882\times10^{-5}$ 弧度秒$^{-1}$ 自转，其引力势的椭率系数为$J_2=0.001972$，假定它完全处于流体静力学平衡中。试估算其表面扁率和转动惯量系数 $C/Ma^2$。(其它有关资料可从表 A. 1 和附录 F 中得到。)

(b) 如火星赤道面与轨道面的倾角为 24°，根据以上求出的数值，求由于太阳的转矩引起火星岁差的变化速率为多少？

**解**：(a) 利用表 A. 1 中火星相对于地球的质量和半径值，以及附录 F 中地球的数据，对于火星得出

$$m=\frac{\omega^2a^3}{GM}=4.588\times10^{-3},$$

然后利用方程(3.25)

$$f=\frac{3}{2}J_2+\frac{1}{2}m=5.25_2\times10^{-3}.$$

假定有流体静力学平衡，$f=f_H$，根据式(3.29)，得

$$\frac{C}{Ma^2}=\frac{2}{3}\left[1-\frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}\frac{m}{f}-1\right)^{1/2}\right]=0.37.$$

(b) 应用式(3.34)可得

$$\omega_P=-\frac{3}{2}\frac{G}{\omega}\frac{(C-A)}{C}\frac{M_{日}}{R^3}\cos\theta$$

$$=-\frac{3}{2}\frac{G}{\omega}J_2\left(\frac{ma^2}{C}\right)\frac{M}{R^3}\cos\theta,$$

其中 $m$ 为火星质量，$M$ 为太阳质量，$R$ 为间距。

$\omega_p=1.10\times10^{-12}$ 弧度秒$^{-1}$=7.15 弧秒年$^{-1}$(观察值是 7.5 弧秒年$^{-1}$)。

**3.3** 根据表 G.1 中的密度关系，内核的质量和转动惯量是多少？它们各占整个地球相应数值的多大比例？

**解：** $$M=\int_0^{r_{max}}dm=\int_0^{r_{max}}4\pi r^2\rho dr,$$

其中 $$\rho=A-B\left(\frac{r}{r_0}\right)^2,$$

$$r_{max}=1.2171\times10^6\text{米},$$

$$r_0=6.371\times10^6\text{米},$$

$$A=1.301219\times10^4\text{千克米}^{-3},$$

$$B=8.45292\times10^3\text{千克米}^{-3},$$

$$M=4\pi r^3_{max}\left[\frac{A}{3}-\frac{B}{5}\left(\frac{r_{max}}{r_0}\right)^2\right]=9.69\times10^{22}\text{千克}$$

$$=1.6\%M_E,$$

$$I=\frac{2}{3}\int_0^{r_{max}}r^2dm=\frac{8}{3}\pi r^5_{max}\left[\frac{A}{5}-\frac{B}{7}\left(\frac{r_{max}}{r_0}\right)^2\right]$$

$$=5.72\times10^{34}\text{千克米}^2,$$

它比地球转动惯量的 1%还小（注意，薄球壳的转动惯

* “弧秒”即角度的单位“秒”——译注。