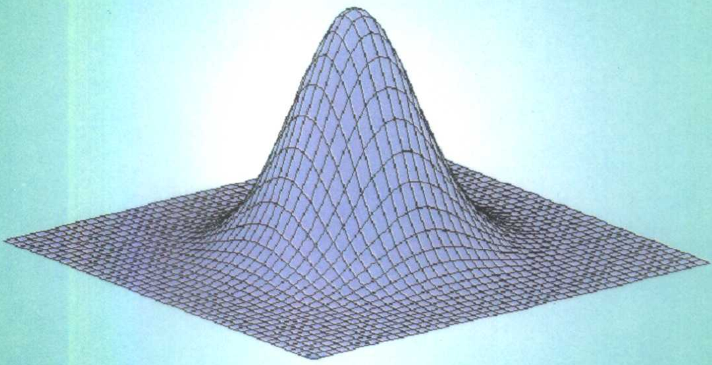
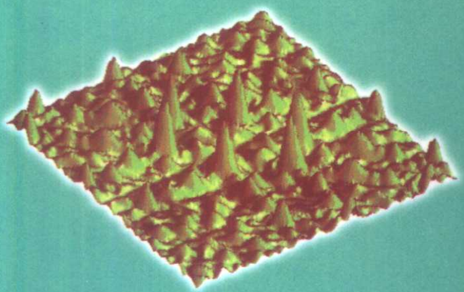
赵淑清 郑薇 编著

SUIJI
XINHAO
FENXI





随机信号分析

哈尔滨工业大学出版社

随机信号分析

赵淑清　郑　薇　编著

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内 容 简 介

全书共分五章，主要包括随机信号的基本理论、随机信号的各种分析方法及应用。本书从分布律、数字特征和特征函数引出随机信号的基本概念，分别在时域和频域讨论随机信号的特点，并将连续时间的随机信号扩充到时间序列，将相关理论的内容引申到高阶统计量。本书还讨论了离散随机信号的仿真方法，同时给出一些常用的C语言程序。

本书的目的是为读者打下牢固的随机信号的基础，使之适应现代信号处理的发展。本书可作为电子信息类高年级本科生和相关学科研究生的教材，对从事相关领域研究的科技人员亦有重要的参考价值。

随机信号分析

Suiji Xinhao Fenxi

赵淑清　郑 薇　编 著

*

哈尔滨工业大学出版社出版

肇 东 粮 食 印 刷 厂 印 刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 13　字数 288 千字

1999 年 6 月 1 日第 1 版　1999 年 6 月第 1 次印刷

印数 1~4 000

ISBN 7-5603-1402-3/TN·45　定价 15.00 元

前　言

本书系国家“九·五”重点《航天科学》丛书中的一种，按电子工业部的《1996—2000年全国电子信息类专业教材编审出版规划》，由电子工程教学指导委员会编审、推荐出版。本书由哈尔滨工业大学赵淑清担任主编，主审刘福声。

本书的参考学时数为 50 学时，书中标有*的为选学内容。全书共分五章。第一、二、五章是随机信号的基本理论，第三、四章则以无线电技术领域中的应用为背景，给出随机信号的各种分析方法。第一章，首先对已经学过的随机变量进行了较系统的回顾，然后讨论了特征函数，本章还分析了基于高斯分布变换后的一些分布的相互关系。第二章，在时域（相关）和频域（功率谱）中讨论随机过程及平稳随机过程的定义和性质，同时还对随机序列进行了相应的讨论。第三章，介绍随机信号通过线性系统和非线性系统的分析方法。第四章，讨论无线电系统中常用的窄带随机过程的一些性质和应用。第五章是马尔可夫过程。

随机信号与确定信号一样，是通信、信号与信息处理、自动控制等领域中必须涉及的信号形式。因此，工科院校中电类甚至一些机械类的学生应该对随机信号有必要的了解，并掌握一些随机信号理论、仿真及分析处理的基本方法。本书以讨论随机信号的基本分析方法为主，考虑到计算机及数字信号处理设备的应用，还讨论了离散随机信号的仿真及分析方法，同时给出一些常用的 C 语言程序。尽管按教学大纲要求，在学习本课程之前，学生应掌握必要的概率论和信号理论知识，我们仍在部分章节中对学过的知识做了必要的重复，以便与新的内容进行有机的衔接。

本书由赵淑清编写第一、二章及第三章的 3.1~3.4 节，郑薇编写第四、五章及第三章的 3.5 节。刘永坦院士、孟宪德教授为本书提出许多宝贵意见，在此表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

1998 年 12 月

目　　录

第一章　随机信号基础

在大多数工程问题中，被处理的信号往往不是确定信号而是随机信号与确定信号的混合信号。随机信号与一般的确定性信号有本质上的不同，因此其分析方法也不尽相同。

随机信号理论的基础是概率论和信号理论,这里我们假定读者已经掌握了这些知识。本章将首先对随机变量的要点做一系统的回顾；然后介绍描述随机变量的另一种方法。本章的后半部分将给出通信与信息处理领域中经常用到的一些随机变量的分布，并重点讨论高斯随机变量。这一章还将给出一些随机变量仿真的方法和程序，供读者参考和选用。

1.1　随机变量要点回顾

设随机试验的样本空间为 $S=\{e_i\}$，如果对样本空间的每一个元素$e_i \in S$，都有一实数$X\{e_i\}$与之对应，对所有的元素$e \in S$，就得到一个定义在空间 S 上的实单值函数 $X\{e\}$，称$X\{e\}$为随机变量，简写为 X。一般用大写字母 X，Y，Z 来表示随机变量，而用小写字母 x，y，z 表示对应随机变量的可能取值。

引入随机变量可以将随机试验的所有可能结果与对应的概率联系起来。如一段导体中的电子运动引起的电流，接收机的噪声电压，这些都与数值有关。即使像发现目标这样的事件，也可以规定一个数值来表示“发现目标”或“未发现目标”。分布律便表明了随机变量与概率的对应关系。

根据随机变量的取值是可列还是不可列的，把随机变量分为离散随机变量和连续随机变量。离散随机变量的样本空间是离散的点，因而取值也是离散的，如图 1.1(a)。连续随机变量的样本空间是连续区间，如图 1.1(b)，所以取值是连续地占据某一区间。接收机的噪声电压是连续随机变量，而探测是否存在目标的试验则是离散随机变量。

(a) 离散随机变量　　　　(b) 连续随机变量

图 1.1 随机变量

描述不同的随机试验用不同的随机变量，例如可用随机变量 X 来描述随机信号的电压，但若用它来描述一个随机信号的幅度和相位是不够的，必须用两个随机变量 X 和 Y。对于更复杂的随机试验，可能用更多的随机变量。因此根据实际情况，还可以把随机变量分为一维、二维和多维随机变量。

1.1.1 随机变量的分布律

研究确定函数可以利用其函数关系，而随机试验的某一结果是否出现并不能根据函数关系决定。譬如，掷硬币“出现正面”的概率为 0.5 这一结论是根据大量的试验得到的。这种通过大量试验得到的结果就是统计规律，那么如何研究随机变量的统计规律呢？分布律就是研究随机变量统计规律的一种方法，它描述了随机变量各可能取值与相应的概率之间的对应关系。

一、概率分布函数

我们定义随机变量 X 取值不超过 x 的概率为概率分布函数或累积分布函数

$$F(x) = P(X \le x) \tag{1.1.1}$$

如果把一维随机变量看成是数轴上的一个随机点，则上式说明了随机变量 X 落在区域 $(-\infty, x]$ 内的概率，显然它既适用于离散随机变量，也适用于连续随机变量。概率分布函数也可说明随机变量在某一区间内取值的概率。根据概率分布函数的定义，可得到如下性质。

性质 1 $F(x)$是 x 的单调非减函数，对于 $x_2>x_1$，有

$$F(x_2) \ge F(x_1) \tag{1.1.2}$$

性质 2 $F(x)$非负，且取值满足

$$0 \le F(x) \le 1 \tag{1.1.3}$$

性质 3 随机变量在 x_1,x_2 区间内的概率为

$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) \tag{1.1.4}$$

性质 4 $F(x)$右连续，即

$$F(x^+) = F(x) \tag{1.1.5}$$

性质 4 对离散随机变量特别有用。对于任意一个函数，看它是否为概率分布函数的正确表达式，只要用性质 1、性质 2 和性质 4 判断即可。离散随机变量的分布函数除满足以上性质外，还具有阶梯形式，阶跃的高度等于随机变量在该点的概率，即

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i)\ u(x - x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i\ u(x - x_i) \tag{1.1.6}$$

式中，$u(x)$为单位阶跃函数，P_i 为 $X=x_i$ 的概率。

二、概率密度函数

分布律的另--种形式是概率密度函数，定义为概率分布函数 $F(x)$对 x 的导数

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.1.7}$$

或写成积分形式

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{1.1.8}$$

如果概率分布函数是连续的，其导数一定存在，故概率密度存在。如果概率分布函

数存在有限个间断点，则可引入 δ 函数，因此概率密度总是存在的。根据概率分布函数的性质，可得到概率密度的性质。

性质 1 概率密度函数非负

$$f(x) \geq 0 \tag{1.1.9}$$

性质 2 概率密度函数在整个取值区间积分为 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{1.1.10}$$

性质 3 概率密度函数在 (x_1, x_2) 区间积分，给出该区间的取值概率

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.11}$$

这三条性质与概率分布函数的前三条性质是互相对应的。性质 1 和性质 2 说明概率密度函数是一条在横轴上方且与横轴所围的面积为 1 的曲线，它们也是检验一个函数是否为概率密度的条件。离散随机变量的概率密度为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i)\delta(x - x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \delta(x - x_i) \tag{1.1.12}$$

式中，$\delta(x)$为单位冲激函数。

概率分布函数和概率密度可以充分地说明离散随机变量取值落在某点和某个区间的概率，而连续随机变量取值落在某一区间的概率也可由 $F(x)$和 $f(x)$求出。值得注意的是：连续随机变量在某点取值的概率为零。因此，对于连续随机变量，取值区间写成开区间和闭区间是一样的，但对于离散随机变量，开区间和闭区间则是不同的。图 1.2 和图 1.3 示出了连续随机变量和离散随机变量的分布律。

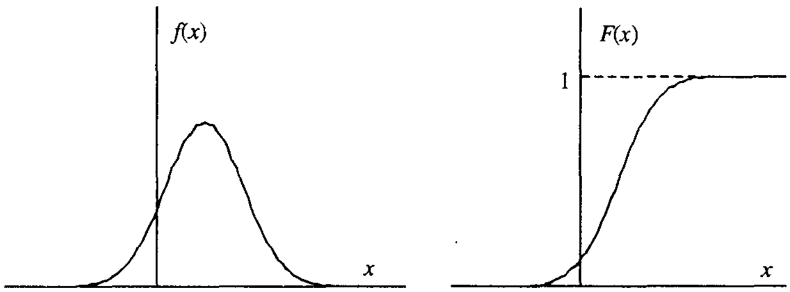


图 1.2 连续随机变量概率密度和概率分布函数

三、多维随机变量的分布律

二维随机变量用(X, Y)表示，它可认为是二维平面上的一个随机点（图 1.4）。n 维随机变量则用$(X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n)$表示，它可推广为 n 维空间上的一个随机点。

多维随机变量不是几个一维随机变量的简单组合，作为一个整体，多维随机变量的统计规律不仅取决于各个随机变量的统计规律，还与几个随机变量之间的关联程度有关。由一维随机变量的分布律不难推广到二维随机变量的分布律（图 1.5）。二维随机变量的

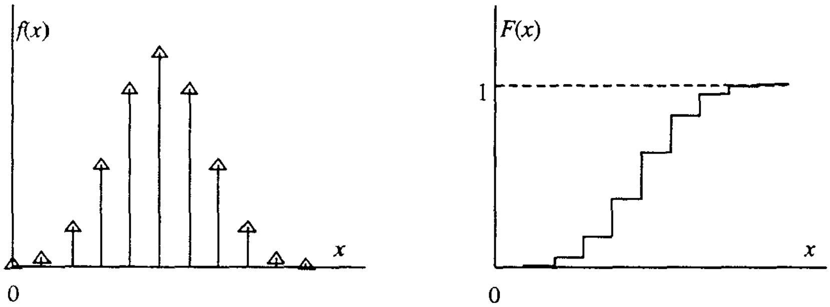


图 1.3　离散随机变量的概率密度和概率分布函数

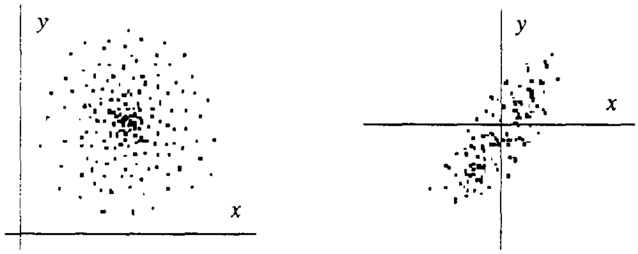


图 1.4　二维随机变量——平面上的随机点

概率分布函数和概率密度分别由式(1.1.13)和式(1.1.14)决定

$$F_{XY}(x,y)=P(X\le x,Y\le y) \tag{1.1.13}$$

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\partial y} \tag{1.1.14}$$

由于分布函数与概率密度的对应关系，这里我们只考虑二维概率密度的性质。

性质 1　二维概率密度函数非负

$$f_{XY}(x,y)\ge 0 \tag{1.1.15}$$

性质 2　二维概率密度函数在整个取值区域积分为 1

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1 \tag{1.1.16}$$

性质 3　二维概率密度函数在某个区域积分，给出该区域的取值概率

$$P(x_1<X\le x_2,y_1<Y\le y_2)=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.17}$$

性质 4　对二维概率密度函数在一个随机变量的所有取值区间上积分，将给出另一个随机变量的概率密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}y \tag{1.1.18a}$$

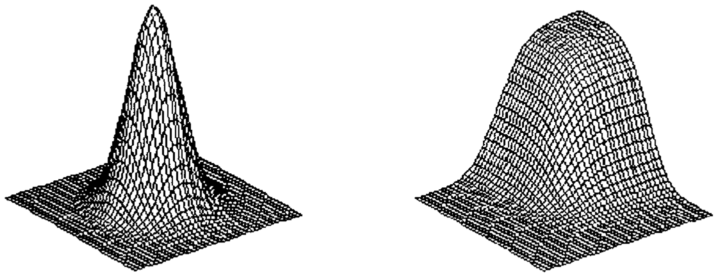


图 1.5 二维概率密度和概率分布函数

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\mathrm{d}x \tag{1.1.18b}$$

在二维分布律中，我们称 $F_{XY}(x,y)$为联合概率分布函数，$f_{XY}(x,y)$为联合概率密度，$F_X(x)$和 $F_Y(y)$为边缘概率分布函数，$f_X(x)$和 $f_Y(y)$为边缘概率密度。如果将条件概率的概念引入到分布律中，我们还可得到条件概率分布函数 $F_Y(y|x)$和条件概率密度 $f_Y(y|x)$。在表示概率分布函数和概率密度时，为了区别不同的随机变量，常把随机变量作为下角标。

在$X \le x$的条件下，随机变量 Y 的条件概率分布函数和条件概率密度函数可分别表示为

$$F_Y(y\mid x)=\frac{F_{XY}(x,y)}{F_X(x)} \tag{1.1.19}$$

$$f_Y(y\mid x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \tag{1.1.20}$$

与概率论中定义两个事件独立相似，我们定义两个随机变量 X,Y 独立的条件。对于所有的x和y，若

$$f_X(x\mid y)=f_X(x) \tag{1.1.21a}$$

$$f_Y(y\mid x)=f_Y(y) \tag{1.1.21b}$$

成立，则称 X,Y 是相互统计独立的两个随机变量。将式(1.1.20)与式(1.1.21)联合，便得到两个随机变量X,Y相互统计独立的充要条件

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{1.1.22}$$

即随机变量X,Y的二维联合概率密度等于X和Y的边缘概率密度的乘积。

二维分布律是多维分布律最简单的情况，对于 n 维随机变量$(X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n)$，仍可仿式(1.1.13)和式(1.1.14)定义 n 维分布函数和概率密度

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n) \tag{1.1.23}$$

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n} \tag{1.1.24}$$

n 维概率密度的性质也类似二维概率密度的性质，对应式(1.1.18)的一条重要性质为

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_m)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n-m} f_X(x_1,x_2,\cdots,x_m,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_{m+1},\cdots,\mathrm{d}x_n \tag{1.1.25}$$

上式说明了高维概率密度可以通过积分降低维数。式(1.1.18)是 n=2，m=1 时的情况。

n 维随机变量相互统计独立的充要条件为：对于所有的 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，满足

$$f_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \tag{1.1.26}$$

若 n=2，上式简化为式(1.1.22)。

1.1.2 随机变量的数字特征

分布律描述随机变量的统计特征是利用随机变量取值与取值概率的对应关系。在许多实际问题中，概率分布函数和概率密度需要大量的试验才能得到。幸运的是有时我们并不需要对随机变量进行完整的描述，而只要求知道随机变量统计规律的主要特征。另一方面，有时虽然掌握了随机变量的概率分布函数和概率密度，但需要更直观地了解它的平均值和偏离平均值的程度，这时也用到数字特征。

数字特征也称为特征数。数字特征有很多，但主要的数字特征是描述随机变量的集中特性、离散特性和随机变量之间的相关性。

一、数学期望

数学期望又称为统计平均或集合平均，有时更简单地称为均值。数学期望描述随机变量的集中特性，用 $E[X]$或 m_X 表示。对于离散随机变量 X，其数学期望

$$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i \tag{1.1.27}$$

如果 X 是连续随机变量，则有

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1.28}$$

数学期望有着明确的物理意义，如果把概率密度看成是具有一定密度的曲线，那么数学期望便是曲线的重心。

描述随机变量集中特性的统计量还有中位数和众数。使下式成立的 M_e 称为随机变量的中位数

$$P(X<M_e)=P(X>M_e) \tag{1.1.29}$$

连续随机变量的中位数将随机变量概率密度下的面积一分为二。离散随机变量的中位数不唯一。概率最大（离散随机变量）或概率密度最大（连续随机变量）的点 x_M 称为众数，记为 M_o。在图像处理中，灰度直方图描述了一幅图像的灰度分布。灰度直方图的众数反映了图像的基调，在图像上众数这一点的灰度最多。

数学期望、中位数和众数的相对关系如图 1.6 所示，若概率密度曲线有单峰且关于峰值点对称，三者重合。

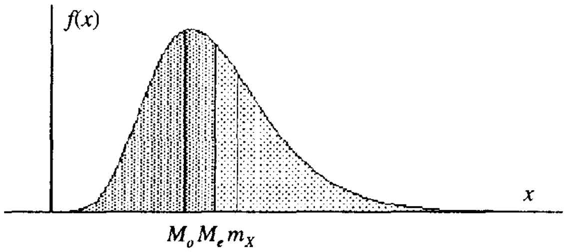


图 1.6　表示随机变量集中特性的数字特征

二、方差

方差是用来度量随机变量偏离其数学期望的程度，或者说是随机变量在数学期望附近的离散程度。因此它描述的是随机变量取值分布的离散特性，方差用 $D[X]$或σ_X^2 表示。对于离散和连续随机变量，分别有

$$D[X]=E\{(X-E[X])^2\}=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E[X])^2P_i \tag{1.1.30a}$$

$$D[X]=E\{(X-E[X])^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1.30b}$$

方差开方后称为均方差或标准差

$$\sigma_X=\sqrt{D[X]} \tag{1.1.31}$$

在图像处理中，灰度直方图的方差大致反映了图像的反差。

数学期望和方差是随机变量分布的两个重要的特征，图 1.7 给出了具有不同数学期望和方差的概率密度。因为概率密度曲线下的面积恒为 1，数学期望的不同表现为概率密度曲线在横轴上的平移，而方差的不同则表现为概率密度曲线在数学期望附近集中的程度。

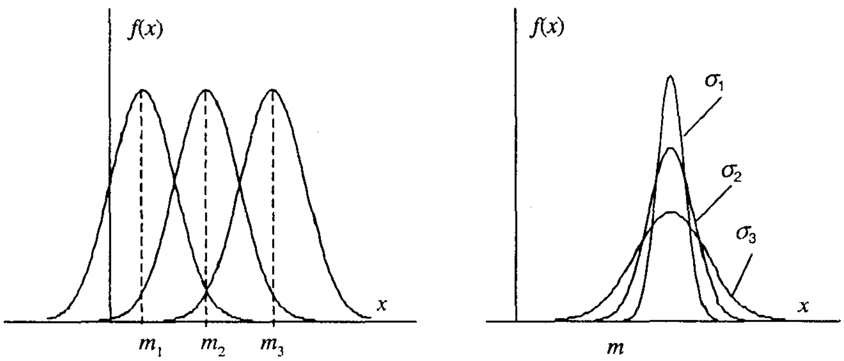


图 1.7　具有不同数学期望和方差的随机变量的概率密度

例 1.1.1 已知高斯随机变量 X 的概率密度

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

求它的数学期望和方差。

解：根据数学期望和方差的定义

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\ f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

令 $\qquad t=\dfrac{x-m}{\sigma},\quad \mathrm{d}x=\sigma\ \mathrm{d}t$

代入上式并整理

$$E[X]=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=0+\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=m$$

$$D[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x$$

与前面做同样的变换，即令 $t=\dfrac{x-m}{\sigma}$，整理后

$$D[X]=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

查数学手册中的积分表

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

令 n=1 及 a=1/2，利用上式的积分结果，可得

$$D[X]=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}=\sigma^2$$

可见，高斯变量的概率密度由它的数学期望和方差唯一决定。

三、矩函数

矩函数是一种数学定义，下面将会看到一阶原点矩正是曲线的几何重心。如果曲线是概率密度，那么一阶原点矩就是数学期望。

随机变量 X 的 n 阶原点矩定义为

$$m_n=E[x^n]\qquad n=1,2,\cdots \tag{1.1.32}$$

对于离散和连续随机变量，则分别有

$$m_n=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^n P_i\qquad n=1,2,\cdots \tag{1.1.33a}$$

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)\,\mathrm{d}\,x \qquad n = 1,2,\cdots \tag{1.1.33b}$$

随机变量 X 的 n 阶中心矩定义为

$$\mu_n = E\{(X - E[x])^n\} \qquad n = 1,2,\cdots \tag{1.1.34}$$

类似式(1.1.33)也可分别写出离散随机变量和连续随机变量中心矩的具体表达式。

当 n=1 时，一阶原点矩就是数学期望。

当 n=2 时，二阶中心矩就是方差。

当 n=3 时，$s = \mu_3 / \sigma^3$ 定义为偏态系数，偏态系数描述概率密度的非对称性，这是因为当概率密度 $f(x)$对称时，奇数阶中心矩为零。在图像处理中，灰度直方图的偏态系数是对图像灰度分布偏离对称程度的一种度量。当灰度直方图 s<0 时，图像呈高色调；而当灰度直方图 s>0 时，图像呈低色调。图 1.8 给出了具有不同偏态系数的概率密度。

当 n=4 时，$K = \mu_4 / \sigma^4$ 定义为峰态系数，峰态系数描述概率密度的尖锐或平坦程度。高斯分布的峰态系数等于 3，如图 1.9 所示。比较方差相同、具有不同分布的随机变量概率密度，当概率密度的主峰比高斯分布尖锐时，其峰态系数大于 3，反之当概率密度的主峰比高斯分布平坦时，峰态系数小于 3。图像的灰度直方图的峰态系数反映了图像灰值分布是聚集在数学期望附近还是散布在两端的情况。图像灰度直方图呈现窄峰时，图像的反差小。而当灰度直方图峰态系数较小，灰度分布较宽时，图像具有较多的层次。

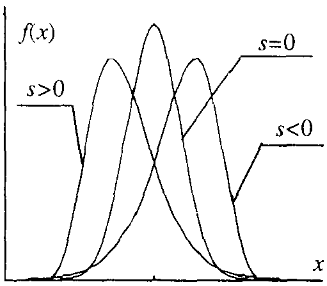


图 1.8　不同偏态系数的概率密度

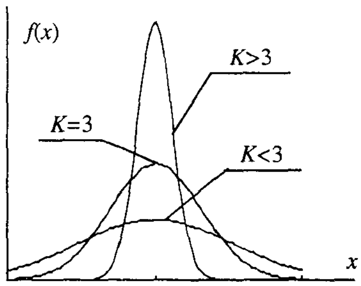


图 1.9　不同峰态系数的概率密度

仿一维随机变量，我们给出二维随机变量的矩函数。二维随机变量 X 和 Y 的 n+k 阶联合原点矩为

$$m_{nk} = E[X^n Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \tag{1.1.35}$$

n+k 阶联合中心矩为

$$\begin{aligned}\mu_{nk} &= E\{(X - E[X])^n (Y - E[Y])^k\} = \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^n (y - E[Y])^k f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\end{aligned} \tag{1.1.36}$$

这里只给出了连续随机变量的表达式，参考式(1.1.33a)也可得到离散随机变量的矩函

数表达式。

当 $n=1$，$k=0$ 和 $n=0$，$k=1$ 时，一阶原点矩分别是 X 和 Y 的数学期望

$$m_{10} = E[X] = m_X \tag{1.1.37a}$$

$$m_{01} = E[Y] = m_Y \tag{1.1.37b}$$

当 $n=2$，$k=0$ 和 $n=0$，$k=2$ 时，二阶中心矩分别是 X 和 Y 的方差

$$\mu_{20} = E\{(X - E[X])^2\} = \sigma_X^2 \tag{1.1.38a}$$

$$\mu_{02} = E\{(Y - E[Y])^2\} = \sigma_Y^2 \tag{1.1.38b}$$

当 $n=1$，$k=1$ 时，二阶联合原点矩和二阶联合中心矩分别是 X 和 Y 的相关矩和协方差

$$m_{11} = E[XY] = R_{XY} \tag{1.1.39a}$$

$$\mu_{11} = E\{(X - E[X])(Y - E[Y])\} = C_{XY} \tag{1.1.39b}$$

这两个统计量反映了两个随机变量之间的关联程度，此外协方差还反映了两个随机变量各自的离散程度。为了去除两个随机变量离散程度对相关程度的影响，可将协方差对两个随机变量的均方差进行归一化

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad -1 \le r_{XY} \le 1 \tag{1.1.40}$$

归一化协方差也称相关系数，它只反映两个随机变量之间的关联程度，与它们的数学期望和方差无关。当 $r_{XY}=0$ 时，称随机变量 X 和 Y 不相关，否则称为正相关($0 < r_{XY} \le 1$)或负相关($-1 \le r_{XY} < 0$)。

例 1.1.2 随机变量 $Y=aX+b$，其中 X 为随机变量，a，b 为常数且 $a>0$，求 X 与 Y 的相关系数。

解：根据数学期望的定义，若 $E[X]=m_X$，则

$$E[Y] = aE[X] + b = am_X + b = m_Y$$

先求协方差，再求相关系数

$$C_{XY} = E\{(X - E[X])(Y - E[Y])\} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])(y - E[Y]) f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

将 $Y = aX + b$，$m_Y = am_X + b$ 代入，并由概率密度性质，消去 y，得到

$$C_{XY} = a\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 [\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}y]\,\mathrm{d}x =$$

$$a\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = a\sigma_X^2$$

同理，将 $X = (Y - b)/a$，$m_X = (m_Y - b)/a$ 代入，并由概率密度性质，消去 x，则有

$$C_{XY} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y)^2 [\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,\mathrm{d}x]\,\mathrm{d}y =$$