GONGCHENG LIXUE LILUN HE XITI

〔美〕 W.G.麦克莱恩
E.W.纳 尔 逊 著

工程力学理论和习题

——静力学及动力学——

中 国 铁 道 出 版 社

Theory and Problems
of
Engineering Mechanics
Statics and Dynamics
Third edition
by
W.G.McLEAN and E.W.NELSON
McGraw.Hill Book Company 1978

工程力学的理论和习题
〔美〕W.G.麦克莱恩 E.W.纳尔逊著
马寿鹤 吴家骥 译 倪成禄 校
中国铁道出版社出版
责任编辑 王能远
封面设计 翟 达
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：25.25 字数：634千
1 9 8 2年2月第1版 1 9 8 2年2月 第1次印刷
印数：0001—24,000册 定价：2.60 元

内 容 简 介

本书内容包括静力学及动力学。每章开头介绍简明的定义、原理及有关定理。全书共有460道例题，均做出详细解答，能帮助读者抓住重点和运用理论来分析解决具体问题。此外还有715道补充题，供读者复习巩固之用。本书是学习工程力学的良好参考书。

读者对象：理工科院校、电视大学、业余大学、函授大学师生，工程技术人员，中学物理教师及自学者。

本书是为了补充基本教材而编写的，主要帮助理工科学生全面地熟练地掌握分析力学和应用力学的知识。作者们深信，大量解题是理解和牢记基本原理的最好方法之一。本书虽然并不和某一本教材紧密地配合，但作者们认为，这样可使本书成为对所有教材都适用的参考书。

本书的前几版都受到热烈欢迎。和前几版中主要应用美国习惯单位制和偶然也应用厘米-克-秒（cgs）单位制相比，在本版中则混合使用美国习惯单位制和国际单位制。在习题中约有50%采用美国习惯单位制，其余50%采用国际单位制，但在任一个习题中都不使这两种单位混用。作者们试图应用符合目前大学二年级学生水平的最好的数学方法，因而在有些章中应用矢量方法，它们在理论和习题中提供了巧妙的和简洁的方法。另一方面，我们在别的地方毫不犹豫地应用数量方法，因为它们在很多习题中提供了完全适当的解法。第一章是全书中所需要的最简要的矢量定义和运算方法的完整复习，并且，这导论章的应用贯穿于全书。本书中的习题都可用计算器（或计算尺）来求解。

各章标题相应于在基本初等力学课程中所涉及的内容。每章都以有关的定义、原理和定理的叙述开始，接着的内容就是渐次加深的一组题解和一组补充题。题解用来说明和阐述理论，描述分析方法，提供实际例子，并重点讨论那些使学生能正确地和有信心地应用基本原理的细节。在题解中还包括了很多定理的证明和公式的推导。许多补充题对于各章所包括的内容起到全面复习的作用。

在第一版中，作者们向保罗·B·伊顿教授和J·沃伦·吉伦先生表示衷心的感谢。在第二版中，作者们从查尔斯·L·贝斯脱博士和约翰·W·麦克纳勃博士处得到很多有益的意见和批评；在该版中，拉里·弗里特和保罗·加里先生核对了习题的解答。在本版中，我们感谢詹姆士·施瓦尔博士帮助准备了在附录D中的计算机解法。我们并感谢麦克格劳-希尔图书公司的尼克·蒙蒂先生、约翰·阿里略先生、埃伦·巴巴拉女士在编辑方面给予的帮助。对于本书的打字工作，我们对伊丽莎白·布洛克夫人表示感谢。

W·G·麦克莱恩
E·W·纳尔逊

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 矢 量

1.1 定 义

标量只具有大小，例如时间、体积、能量、质量、密度、功等。标量按照普通代数方法相加，例如2 sec＋7 sec＝9 sec；14 kg－5 kg＝9 kg。

矢量既具有大小又具有方向*，例如力、位移、速度、冲量等。矢量可用沿已知倾角的箭矢来表示，其箭头表示方向，而其长短表示矢量的大小。本书中矢量的符号用黑体字母来表示，例如**P**；其大小用 |**P**| 或 P 表示。

自由矢量可以在空间中任意移动，只要它保持相同的方向及大小。

滑动矢量可以作用于其作用线上的任意一点。根据可传性原理，滑动矢量的外效应保持不变。

约束矢量或固定矢量必须保持其作用点不变。

单位矢量是长度等于一个单位的矢量。

矢量**P**的负矢量就是矢量－**P**，它具有相同的大小及倾角，但指向相反。

一个矢量系的合矢量就是能代替原系统的最少的矢量数。

1.2 两矢量的加法

（a）平行四边形法则规定两个矢量**P**及**Q**的合矢量**R**就是以**P**及**Q**为邻边的平行四边形的对角线。这三个矢量**P**、**Q**及**R**都相交于一点，如图1-1所示。

（b）三角形法则。将任一矢量的矢端与另一个矢量的尾端相连接，合矢量就由第一个矢量的尾端指向另一个矢量的矢端。三角形法则是从平行四边形法则得出来的，因为平行四边形的对边都是自由矢量，如图1-2所示。

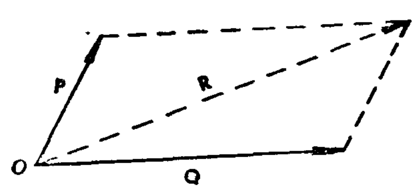

图 1-1

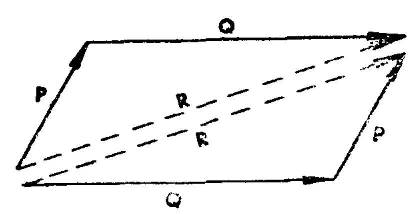

图 1-2

（c）矢量加法符合交换律，即**P**＋**Q**＝**Q**＋**P**。

1.3 矢量减法

矢量减法可用加以负矢量来完成，即

$$\mathbf{P}-\mathbf{Q}=\mathbf{P}+(-\mathbf{Q})$$

* 方向的含义同时包含有作用线与一固定参考线段之间的倾斜角度及沿作用线的矢量的指向。

并且注意

$$-(\mathbf{P}+\mathbf{Q})=-\mathbf{P}-\mathbf{Q}$$

1.4 零矢量

一个矢量减去它自己就得到零矢量，即 $\mathbf{P}-\mathbf{P}=0$。它又称为空矢量。

1.5 矢量合成

矢量合成就是决定矢量系的合矢量。矢量多边形是按照次序将每一矢量的尾端与前一矢量的矢端相接，如图 1-3 所示。合矢量就从第一个矢量的尾端指向最后一个矢量的矢端（终点）。以后将看到，并不是所有的矢量系可以简化为单个的矢量。由于作图时与矢量的先后次序没有关系，所以对于三个已知矢量 $\mathbf{P}$，$\mathbf{Q}$ 及$\mathbf{S}$可以得到

$$\mathbf{R}=\mathbf{P}+\mathbf{Q}+\mathbf{S}=(\mathbf{P}+\mathbf{Q})+\mathbf{S}=\mathbf{P}+(\mathbf{Q}+\mathbf{S})=(\mathbf{P}+\mathbf{S})+\mathbf{Q}$$

上式可以推广到任意个矢量。

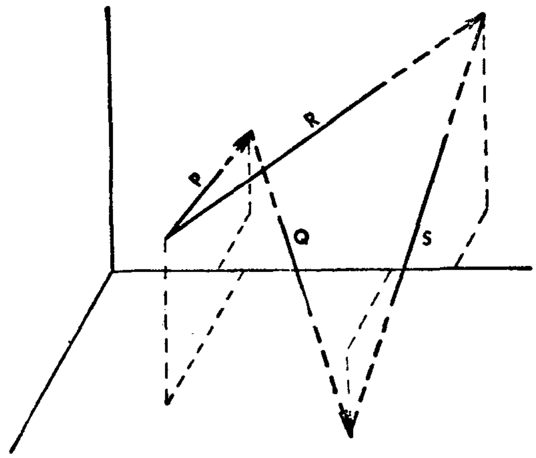

图 1-3

1.6 矢量与标量的乘法

（a）矢量$\mathbf{P}$与标量m的乘积是矢量$m\mathbf{P}$，它的大小为$\mathbf{P}$的大小的 $|m|$ 倍，而它是与$\mathbf{P}$ 同向或反向则取决于m是正的或是负的。

（b）其余与标量m及n的运算规则为

$$(m+n)\mathbf{P}=m\mathbf{P}+n\mathbf{P}$$

$$m(\mathbf{P}+\mathbf{Q})=m\mathbf{P}+m\mathbf{Q}$$

$$m(n\mathbf{P})=n(m\mathbf{P})=(mn)\mathbf{P}$$

1.7 三个相互正交单位矢量

三个相互正交单位矢量$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$及$\mathbf{k}$是由分别沿x、y及z轴的三个单位矢量所组成。在图1-4中表示一个右手坐标系。

矢量$\mathbf{P}$可以写为

$$\mathbf{P}=P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k}$$

式中$P_x\mathbf{i}$、$P_y\mathbf{j}$及$P_z\mathbf{k}$分别为矢量 $\mathbf{P}$沿x、y及z轴的分量，如图1-5所示。

注意$P_x=P\cos\theta_x$，$P_y=P\cos\theta_y$，$P_z=P\cos\theta_z$。

1.8 矢径

空间中一点（x，y，z）的矢径（Position Vector）可写为

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

式中　$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，如图1-6所示。

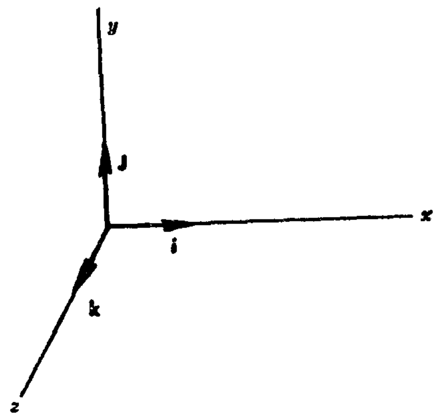

图 1-4

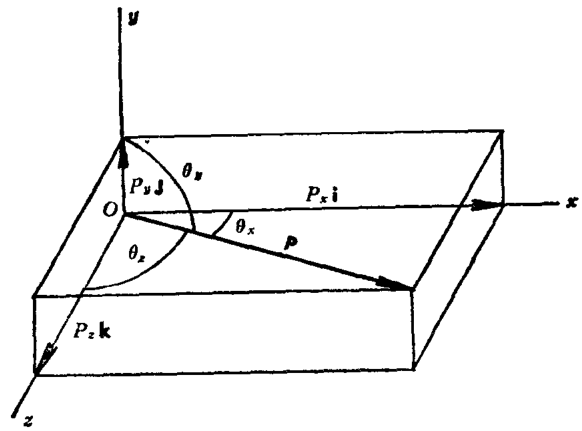

图 1-5

1.9 点积或数性积

两矢量P及Q的点积或数性积P·Q是一个标量，并规定为两矢量的大小与它们之间夹角θ的余弦的乘积（见图1-7）。因此

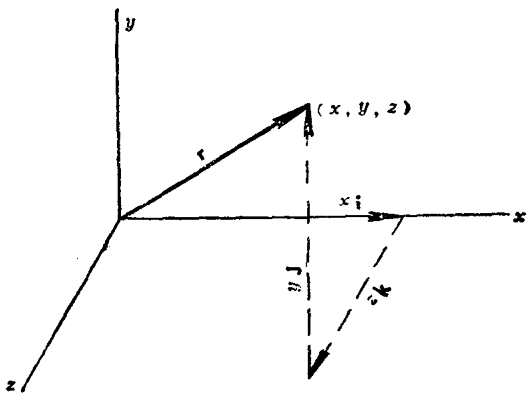

图 1-6

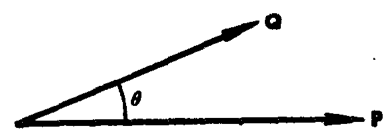

图 1-7

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = PQ\cos\theta$$

下面各个定律适用于点积，其中m为一标量：

$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{Q}\cdot\mathbf{P}$

$\mathbf{P}\cdot(\mathbf{Q}+\mathbf{S})=\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}+\mathbf{P}\cdot\mathbf{S}$

$(\mathbf{P}+\mathbf{Q})\cdot(\mathbf{S}+\mathbf{T})=\mathbf{P}\cdot(\mathbf{S}+\mathbf{T})+\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{S}+\mathbf{T})=\mathbf{P}\cdot\mathbf{S}+\mathbf{P}\cdot\mathbf{T}+\mathbf{Q}\cdot\mathbf{S}+\mathbf{Q}\cdot\mathbf{T}$

$m(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})=(m\mathbf{P})\cdot\mathbf{Q}=\mathbf{P}\cdot(m\mathbf{Q})$

因为i、j及k都正交，

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=(1)(1)\cos 90^\circ=0$

$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=(1)(1)\cos 0^\circ=1$

而且，如$\mathbf{P}=P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k}$及$\mathbf{Q}=Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k}$，则有

$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z$

$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}=\mathbf{P}^2=P_x^2+P_y^2+P_z^2$

矢量P沿直角坐标轴的分量的大小可以写为

$$P_x = \mathbf{P}\cdot\mathbf{i} \qquad P_y = \mathbf{P}\cdot\mathbf{j} \qquad P_z = \mathbf{P}\cdot\mathbf{k}$$

因为，例如，

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{i} = (P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k})\cdot\mathbf{i} = P_x + 0 + 0 = P_x$$

同理，矢量P沿任一线段L的分量可以写为$\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_L$，这里$\mathbf{e}_L$为沿线段$L$的单位矢量（有些作者用u表示单位矢量）。图1-8中表示经过矢量P尾端A的平面及经过矢端B的平面，这两个平面都垂直于线段L，并与线段L相交于点C及D。矢量CD就是P沿L的分量，它的大小等于$\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_L$。

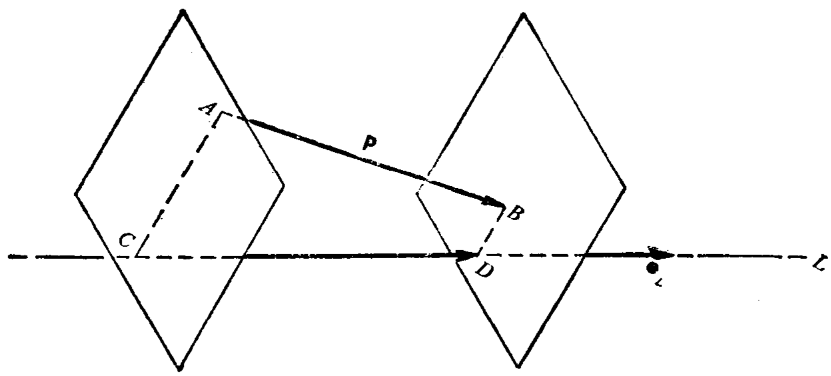

图 1-8

例题1.1 试求线段L的单位矢量$\mathbf{e}_L$，L的起点为（2,3,0)，经过的点为(−2,4,6)。并求矢量$\mathbf{P} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$沿线段$L$的投影。

线段L在x方向由+2变化到−2，即变化量为−4；在y方向的变化量为4−3=+1；在z方向的变化量为6−0=+6。单位矢量为

$$\mathbf{e}_L = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2 + (+1)^2 + (+6)^2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{53}}\mathbf{j} + \frac{6}{\sqrt{53}}\mathbf{k} = -0.549\mathbf{i} + 0.137\mathbf{j} + 0.823\mathbf{k}$$

并得P的投影为

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_L = 2(-0.549) + 3(0.137) - 1(0.823) = -1.41$$

1.10 叉积或矢量积

两矢量P及Q的叉积或矢量积$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$是一个矢量R，它的大小等于两矢量的大小与两矢量之间夹角的正弦的乘积。矢量$\mathbf{R} = \mathbf{P}\times\mathbf{Q}$垂直于P及Q组成的平面，它的方向为按照右手螺旋规则从P经过较小的夹角θ转到Q时螺旋的前进方向，如设e为沿$\mathbf{R} = \mathbf{P}\times\mathbf{Q}$方向的单位矢量，就可将叉积写为

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}\times\mathbf{Q} = (PQ\sin\theta)\mathbf{e} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 180°$$

图1-9中表示$\mathbf{P}\times\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}\times\mathbf{P}$（即不符合交换律）。

下面各个定律适用于叉积，其中m为一标量：

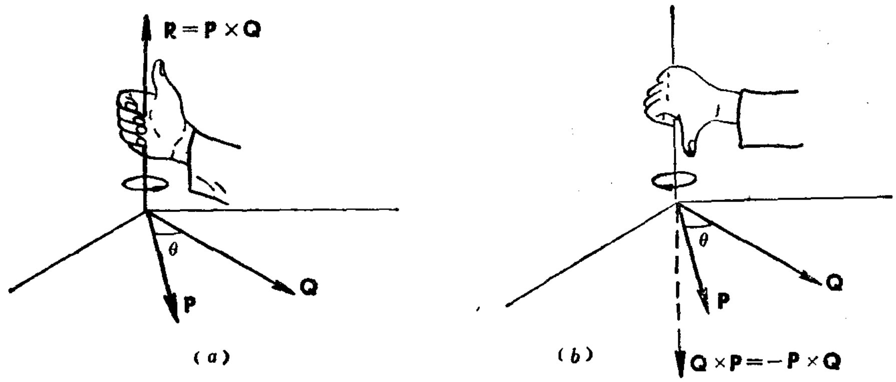

图 1-9

$\mathbf{P}\times(\mathbf{Q}+\mathbf{S})=\mathbf{P}\times\mathbf{Q}+\mathbf{P}\times\mathbf{S}$

$(\mathbf{P}+\mathbf{Q})\times(\mathbf{S}+\mathbf{T})=\mathbf{P}\times(\mathbf{S}+\mathbf{T})+\mathbf{Q}\times(\mathbf{S}+\mathbf{T})=\mathbf{P}\times\mathbf{S}+\mathbf{P}\times\mathbf{T}+\mathbf{Q}\times\mathbf{S}+\mathbf{Q}\times\mathbf{T}$

$m(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=(m\mathbf{P})\times\mathbf{Q}=\mathbf{P}\times(m\mathbf{Q})$

因为i、j及k都正交，

$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$

$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$

而且，如$\mathbf{P}=P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k}$及$\mathbf{Q}=Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k}$，则有

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}=(P_yQ_z-P_zQ_y)\mathbf{i}+(P_zQ_x-P_xQ_z)\mathbf{j}+(P_xQ_y-P_yQ_x)\mathbf{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\P_x&P_y&P_z\\Q_x&Q_y&Q_z\end{vmatrix}$$

关于这一叉积结论的证明见题1.12。

1.11 矢量微积分

（a）随标量（例如时间t）而变化的矢量P的微分按下面规则进行。

假设$\mathbf{P}=\mathbf{P}(t)$，即P是时间t的函数。当时间从t变化到$t+\Delta t$，P的变化量$\Delta\mathbf{P}$为

$$\Delta\mathbf{P}=\mathbf{P}(t+\Delta t)-\mathbf{P}(t)$$

于是

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{P}(t+\Delta t)-\mathbf{P}(t)}{\Delta t}$$

如$\mathbf{P}=P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k}$，其中$P_x$、$P_y$及$P_z$都是时间$t$的函数，我们可得

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(P_x+\Delta P_x)\mathbf{i}+(P_y+\Delta P_y)\mathbf{j}+(P_z+\Delta P_z)\mathbf{k}-P_x\mathbf{i}-P_y\mathbf{j}-P_z\mathbf{k}}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P_x\mathbf{i}+\Delta P_y\mathbf{j}+\Delta P_z\mathbf{k}}{\Delta t}$$

$$=\frac{dP_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{dP_y}{dt}\mathbf{j}+\frac{dP_z}{dt}\mathbf{k}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

下列各运算式都成立：

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}+\mathbf{Q})=\frac{d\mathbf{P}}{dt}+\frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})=\frac{d\mathbf{P}}{dt}\cdot\mathbf{Q}+\mathbf{P}\cdot\frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})=\frac{d\mathbf{P}}{dt}\times\mathbf{Q}+\mathbf{P}\times\frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\psi\mathbf{P})=\psi\frac{d\mathbf{P}}{dt}+\frac{d\psi}{dt}\mathbf{P}$$ 其中ψ为t的标量函数。

（b）随标量（例如时间t）而变化的矢量P的积分按下面规则进行。设$\mathbf{P}=\mathbf{P}(t)$，即P是时间t的函数，于是

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{P}(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}(P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k})dt$$

$$=\mathbf{i}\int_{t_0}^{t_1}P_xdt+\mathbf{j}\int_{t_0}^{t_1}P_ydt+\mathbf{k}\int_{t_0}^{t_1}P_zdt$$

1.12 力矢用的单位

很久以来，工程师都应用重力单位制。可是，当前的发展趋势是应用绝对国际单位制（现代国际米制），通常称为SI制。

为了理解在静力学问题中这两种单位制的差别，让我们考虑牛顿第二运动定律的常见形式

$$\mathbf{R}=M\mathbf{a}$$

式中 R——作用于质点上所有外力的合力；

a——质点的加速度；

M——比例常数，称为质量。

我们可以通俗地说，若物体受到一单位力作用而产生一单位加速度，则其物质的量就是一单位质量。

在工程单位制（美国习惯用的）中，力的单位是磅（lb），加速度的单位是每平方秒英尺（ft/sec²）。注意在这单位制中长度的单位是英尺，时间的单位是秒。在地球表面附近，一个自由落体受到以磅计量的重力W（称为重量）作用。重力加速度g的单位为 ft/sec²。所以牛顿第二定律成为

$$\overline{W}=Mg$$

式中 $\overline{W}$——以磅表示的重力；

M——质量。

已将上式写成为标量形式，并使方向（指向）为竖直（朝下）。若物体受到一磅引力作用而产生一每平方秒英尺的加速度，则质量M就是一单位，并称之为斯勒格（slug）。如设g等于32.2ft/sec²（对地球上大多数地点已足够准确），一个重一磅的自由落体将有加速度32.2ft/sec²，而它的质量为

$$M=\frac{W}{g}=\frac{1\ \text{lb}}{32.2\ \text{ft/sec}^2}=\frac{1}{32.2}\ \frac{\text{lb-sec}^2}{\text{ft}}=\frac{1}{32.2}\text{slug}$$

在静力学问题中应用工程单位制(美国习惯用的)，在地球表面或附近重量为1 lb的物体将受到1 lb的地球引力作用，通常并不说明其质量。在月球表面，作用于同一物体的重力约为六

分之一磅，但是质量不变仍为$\frac{1}{32.2}$ slug。

另一方面，在国际单位制（SI）中质量的单位为千克（kg），长度的单位为米(m)，时间的单位为秒（s）。根据牛顿第二定律，一千克的质量当受到称为牛顿（N）的单位力作用时，将产生一每平方秒米(m/s^2)的加速度。即

$$1\ N=(1\ kg)(1\ m/s^2)=1\ kg\cdot m/s^2=1\ kg\cdot m\cdot s^{-2}$$

在地球表面附近，1 kg质量的重力加速度g将从9.77 m/s^2变化到9.83 m/s^2。在本书中，我们将采用$g=9.80\ m/s^2$。于是作用在1 kg质量上的重力为

$$W=Mg=(1\ kg)(9.80\ m/s^2)=9.80\ kg\cdot m/s^2=9.80\ N$$

当然，在静力学问题中包含力；但在习题中用千克表示的质量并不是一个力，而必须用作用于此质量上的重力。在所有运算中遇到质量时，读者必须注意将用千克表示的质量乘以9.80m/s^2，才能得到用牛顿(N)表示的重力。5 kg的质量将受到$5\times9.8=49$ N的重力作用。

读者还应注意，在SI制中毫米(mm)是工程制图中的标准长度单位，所以，所有工程制图的尺寸都必须用毫米来表示($1\ mm=10^{-3}\ m$)*。此外，在数字与单位符号之间必须空一小格，例如2.85 mm，不要写成2.85mm。当遇到五位或更多位数字时，将它从小数点开始每三个数字分成一组，如12 832.325。在SI制中不可用逗号。四位数字可以不留空格，但当其包含在成列的五位或更多位数字中时例外。

将SI单位制，SI十进位倍数词冠及现代米制(SI)的转换系数等表格都列在附录中。在本书中，约有50%的习题采用美国习惯单位制，50%则采用SI单位制。

题　　解

1.1　应用平行四边形法则，将在同一平面内沿30°角的120 lb力与沿 90° 角的－100 lb 力相加，见图1-10(a)。

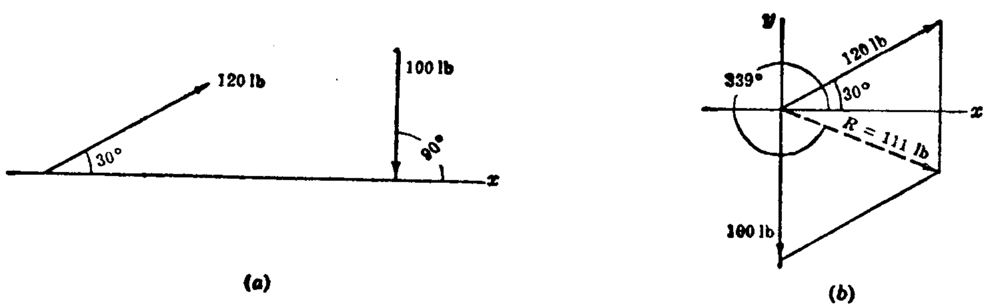

图 1-10

解：先不按比例尺画出本题的草图。负号表示100 lb的力沿90°线朝下指向原点，根据可传性原理，这相当于沿270°线作用的正值的100 lb力。

在图1-10(b)中，按照适当比例尺，将这两个矢量的尾端放在同一点，画出两矢量。作出平行四边形，按所选用的比例尺量得合力R为111 lb，用量角器量得它与x轴的角度为$\theta_x=339°$。

译注：1 斯勒格＝14.5939千克

* 译注：除另有注明者外。

1.2 应用三角形法则解题1.1，见图1-11。

解： 首先画出那一个矢量是无关紧要的。若先画出120 lb的力，并将100 lb力的尾端放在它的矢端，则从120 lb力的尾端到100 lb力的矢端画出合力。用所选用的比例尺量出其大小并决定其方向，结果与题1.1相同。

1.3 平面内二力的合力为800 N并沿60°角，若其中一力为160 N并沿30°角，试求另一力。见图1-12。

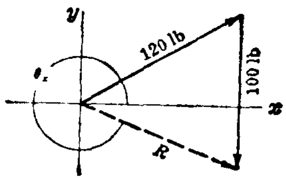

图 1-11

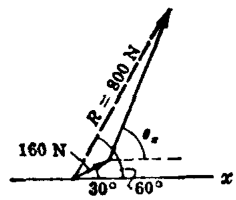

图 1-12

解： 按适当比例尺，从任意一点画出合力及已知力。

连接合力和已知力的矢端，即可作出一线段，在此线段靠近合力处画一箭头，这矢量就表示未知力。用比例尺量得它为667 N，并有$\theta_x=67°$。

1.4 在一平面内，从280 N，320°中，减去130 N，60°。见图1-13。

解： 将280 N，320°的力与负的130 N，60°的力相加，就得到合力为330 N，297°。所有角度都从x轴量起。

1.5 试求下列平面力系的合力：26 lb，10°；39 lb，114°；63 lb，183°；57 lb，261°。见图1-14。

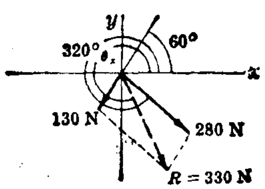

图 1-13

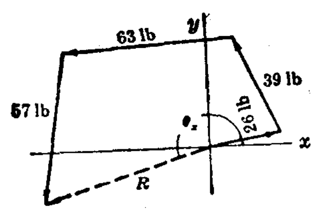

图 1-14

解： 应用多边形法则，顺序将每个矢量的尾端与前一个矢量的矢端相接。

合力就是从第一个矢量尾端画到最后一个矢量矢端的合矢量。

按比例尺量得，$R=65$ lb，并有$\theta_x=197°$。

1.6 已知35 lb力与x轴成140°夹角，试求它沿与x轴的夹角为30°及240°线段上的分力。见图1-15。

解： 按比例尺从任意一点O，画出35 lb力OB，经过点O分别画出与x轴夹角为30°及240°的线段OC及OD。

经过点B画出线段BE及BF分别平行于OC及OD，延长OC与BF相交于G，延长OD与BE相交于H。OG(−68.9 lb)就是所求的沿30°线段的分力，而OH(−65.8lb)就是沿240°线段的分力。

1.7 重160 lb的人站在与水平面成20°的倾斜木板上，试求人的重量，沿（a）正交（垂直）于木板的分力及（b）平行于木板的分力各为多大？见图1-16。

解： 法向分力与重力矢量的夹角为20°，从重力矢量的矢端向法线作一垂线。按比例尺，

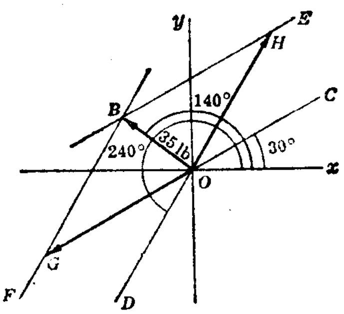

图 1-15

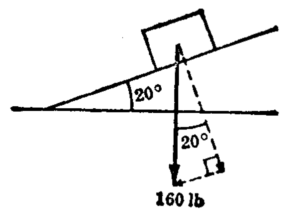

图 1-16

量出法向分力为150 lb及平行分力为55 lb。根据三角关系，

$$\text{法向分力} = 160\cos 20° = 150\ \text{lb}$$

$$\text{平行分力} = 160\sin 20° = 55\ \text{lb}$$

1.8 大小为235 N的力P与水平面的夹角为60°，作用于放置在22°斜面的物体上，见图1-17(a)。试用解析法求(a)力P的水平和竖直分力及(b)力P垂直于和沿着斜面的分力。

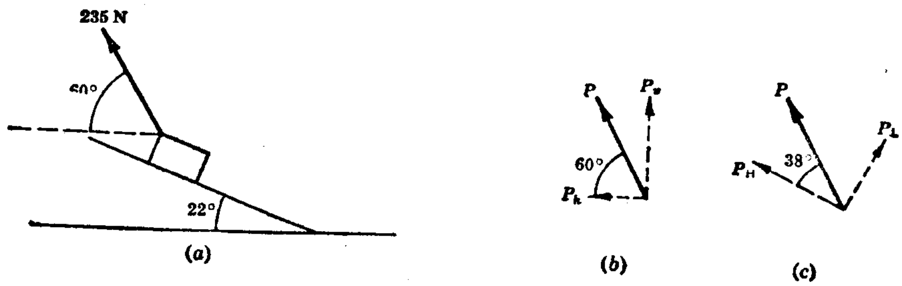

图 1-17

解：(a)指向左方的水平分力$P_h = 235\cos 60° = 118$ N。

指向上方的竖直分力$P_v = 235\sin 60° = 204$ N，如图1-17(b)所示。

(b) 平行于斜面的分力$P_{/\!/} = 235\cos(60° - 22°) = 185$ N，指向斜面的上方。

垂直于斜面的分力$P_\perp = 235\sin 38° = 145$ N，如图1-17(c)所示。

1.9 试将20 N的力分解为两个分力，其中之一将与已知的10 N水平力平衡，见图1-18。

解：下部用水平虚线表示的就是所求的一个分力。因为它是已知的10 N力的平衡力，所以它一定与已知力共线、大小相等、但指向相反。另一个分力与上述两力相交于O，并平行于连接20 N力矢端及平衡力矢端的线段，作出图示平行四边形，量得它为26.5 N，并沿41°。

1.10 直角平行六面体的x、y、z棱边长分别为4、3及2 m，如图1-19所示。如由原点画出的对角线OP表示50 N的力，试求这力沿x、y、z的分力，并将此力表示为用单位矢量i、j、k表示的矢量。

解：设θ_x、θ_y、θ_z分别表示对角线OP与x、y、z轴的夹角，则得

$$P_x = P\cos\theta_x \quad P_y = P\cos\theta_y \quad P_z = P\cos\theta_z$$

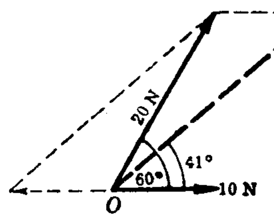

图 1-18

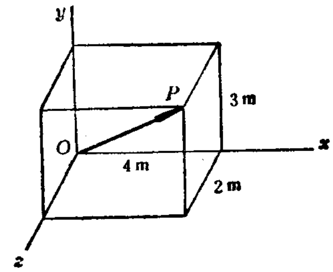

图 1-19

$$\text{长度}OP=\sqrt{4^2+3^2+2^2}=5.38\ \text{m，所以}$$

$$\cos\theta_x=\frac{4}{5.38}\qquad \cos\theta_y=\frac{3}{5.38}\qquad \cos\theta_z=\frac{2}{5.38}$$

因为图中每个分力都沿相应的坐标轴的正向作用，

$$P_x=50\cos\theta_x=37.2\ \text{N}\quad P_y=50\cos\theta_y=27.9\ \text{N}\quad P_z=50\cos\theta_z=18.6\ \text{N}$$

$$\text{矢量}\mathbf{P}=P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k}=37.2\mathbf{i}+27.9\mathbf{j}+18.6\mathbf{k}\text{N}$$

1.11 试求从原点经过点（2、－4、1）的100 N力沿 x、y、z 的分力，并用单位矢量i、j、k表示此力矢。

解：力作用线的方向余弦为

$$\cos\theta_x=\frac{2}{\sqrt{(2)^2+(-4)^2+(1)^2}}=0.437\quad \cos\theta_y=\frac{-4}{\sqrt{21}}=-0.873$$

$$\cos\theta_z=\frac{1}{\sqrt{21}}=0.218$$

所以$P_x=43.7$ N，$P_y=-87.3$ N，$P_z=21.8$ N；力矢为 $\mathbf{P}=43.7\mathbf{i}-87.3\mathbf{j}+21.8\mathbf{k}$ N。

1.12 证明两矢量P及Q的叉积可以写为

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix}$$

解：将已知矢量写成分量形式，并将叉积展开，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\times\mathbf{Q}&=(P_x\mathbf{i}+P_y\mathbf{j}+P_z\mathbf{k})\times(Q_x\mathbf{i}+Q_y\mathbf{j}+Q_z\mathbf{k})\\&=(P_xQ_x)\mathbf{i}\times\mathbf{i}+(P_xQ_y)\mathbf{i}\times\mathbf{j}+(P_xQ_z)\mathbf{i}\times\mathbf{k}\\&\quad+(P_yQ_x)\mathbf{j}\times\mathbf{i}+(P_yQ_y)\mathbf{j}\times\mathbf{j}+(P_yQ_z)\mathbf{j}\times\mathbf{k}\\&\quad+(P_zQ_x)\mathbf{k}\times\mathbf{i}+(P_zQ_y)\mathbf{k}\times\mathbf{j}+(P_zQ_z)\mathbf{k}\times\mathbf{k}\end{aligned}$$

但是$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$；$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$及$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$，等等。所以

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}=(P_xQ_y)\mathbf{k}-(P_xQ_z)\mathbf{j}-(P_yQ_x)\mathbf{k}+(P_yQ_z)\mathbf{i}+(P_zQ_x)\mathbf{j}-(P_zQ_y)\mathbf{i}$$

这些项可以合并为

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}=(P_yQ_z-P_zQ_y)\mathbf{i}+(P_zQ_x-P_xQ_z)\mathbf{j}+(P_xQ_y-P_yQ_x)\mathbf{k}$$

上式可以写成行列式的形式

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix}$$

应该注意，叉积中第一个矢量P的投影分量应该写在行列式的中间一行。

1.13 力$\mathbf{F}=2.63\mathbf{i}+4.28\mathbf{j}-5.92\mathbf{k}$ N经过原点作用，试问此力的大小及此力与x、y、z轴所成的角度为多少？

解：

$$F=\sqrt{(2.63)^2+(4.28)^2+(-5.92)^2}=7.75\ \text{N}$$

$$\cos\theta_x=\frac{2.63}{7.75},\ \theta_x=70.2°;\ \cos\theta_y=\frac{4.28}{7.75},\ \theta_y=56.3°;\ \cos\theta_z=-\frac{5.92}{7.75},\ \theta_z=139.8°。$$

1.14 试求$\mathbf{P}=4.82\mathbf{i}-2.33\mathbf{j}+5.47\mathbf{k}$ N与$\mathbf{Q}=-2.81\mathbf{i}-6.09\mathbf{j}+1.12\mathbf{k}$ m的点积。

解：

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}&=P_xQ_x+P_yQ_y+P_zQ_z\\&=(4.82)(-2.81)+(-2.33)(-6.09)+(5.47)(1.12)=6.72\ \text{N}\cdot\text{m}\end{aligned}$$

1.15 试求力$\mathbf{P}=10\mathbf{i}-8\mathbf{j}+14\mathbf{k}$ lb在从点（2、－5、3）开始并经过点（5、2、－4）的有向线段L上的投影。

解：沿L的单位矢量为

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_L&=\frac{5-2}{\sqrt{(5-2)^2+[2-(-5)]^2+(-4-3)^2}}\mathbf{i}+\frac{2-(-5)}{\sqrt{107}}\mathbf{j}+\frac{-4-3}{\sqrt{107}}\mathbf{k}\\&=0.290\mathbf{i}+0.677\mathbf{j}-0.677\mathbf{k}\end{aligned}$$

P在L上的投影为

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\cdot\mathbf{e}_L&=(10\mathbf{i}-8\mathbf{j}+14\mathbf{k})\cdot(0.290\mathbf{i}+0.677\mathbf{j}-0.677\mathbf{k})\\&=2.90-5.42-9.48=-12.0\text{lb}\end{aligned}$$

负号表示此投影与L的指向相反。

1.16 试求$\mathbf{P}=2.85\mathbf{i}+4.67\mathbf{j}-8.09\mathbf{k}$ ft与$\mathbf{Q}=28.3\mathbf{i}+44.6\mathbf{j}+53.3\mathbf{k}$ lb的叉积。

解：

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\times\mathbf{Q}&=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\P_x&P_y&P_z\\Q_x&Q_y&Q_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2.85&4.67&-8.09\\28.3&44.6&53.3\end{vmatrix}\\&=\mathbf{i}[(4.67)(53.3)-(44.6)(-8.09)]-\mathbf{j}[(2.85)(53.3)\\&\quad-(28.3)(-8.09)]+\mathbf{k}[(2.85)(44.6)-(28.3)(4.67)]\\&=\mathbf{i}[249+361]-\mathbf{j}[152+229]+\mathbf{k}[127-132]\\&=610\mathbf{i}-381\mathbf{j}-5\mathbf{k}\ \text{lb-ft}\end{aligned}$$

1.17 试求矢径$\mathbf{r}=2x\mathbf{i}-3y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$对时间的导数，式中i、j、k为固定矢量。

解： 直接可得$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=2\frac{dx}{dt}\mathbf{i}-3\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k}$。

1.18 试求从时间$t_1=1$ sec到时间$t_2=3$ sec，速度矢量

$$\mathbf{v}=t^2\mathbf{i}+2t\mathbf{j}-\mathbf{k}\ \text{ft/sec}$$

对时间的积分，式中i、j、k为固定矢量。

解：

$$\begin{aligned}\int_1^3(t^2\mathbf{i}+2t\mathbf{j}-\mathbf{k})dt&=\mathbf{i}\int_1^3t^2dt+\mathbf{j}\int_1^3 2t\,dt-\mathbf{k}\int_1^3dt\\&=8.67\mathbf{i}+8.00\mathbf{j}-2.00\mathbf{k}\end{aligned}$$

补 充 题

1.19 试求平面力系100 N，0°及200 N，90°的合力。

答：224 N，$\theta_x=64°$

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com