重力测量与地球形狀学

上　册

方　俊著

科学出版社

重力测量与地球形状学

上 册

重 力 测 量 学

方 俊 著

科 学 出 版 社

1965

内 容 簡 介

全书分上、下两册，上册为重力测量学，下册为地球形状学．是作者根据自己多年的研究成果，同时比較全面地收集了国内外現有資料綜合編写而成，本书是重力测量学及地球形状学的上册，全书共分八章．

第一章至第四章，介紹了重力的基本概念及影响测量精度的因素和常用的重力测量仪器，尤其对沃登高精度重力仪作了全面的介紹．第五章海洋重力测量，作者收集了大量的資料，全面論述了：(1)由于海浪的运动，产生了水平、垂直加速度及仪器旋轉对测量精度的影响和消除法；(2)介紹了几种海洋重力仪的应用問題和仪器构造；(3)海洋重力测量二次項及其他改正問題．第六章中，作者論述了航空测量使用的仪器以及試驗工作的情况，并指出航空重力测量的新途徑．第七、八两章，論述了重力値归算的各种方法，及测量重力位二次微商的仪器和工作方法．

本书可作为测量方面的科研人員及其测量工作者的参考书，也可供有关高等院校师生参考．

重力测量与地球形状学

上 册

重 力 测 量 学

方 俊 著

*

科学出版社出版

北京朝阳門大街117号

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

上海新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1965年3月第一版 开本：787×1092 1/16

1965年3月第一次印刷 印張：16

精装：1—2,000 插頁：3

平装：1—1,550 字数：333,000

統一书号：13031·2020

本社书号：3102·13—15

定价：[科七]精装本 3.00 元 平装本 2.30 元

作 者 序

当1849年英国的物理学家司督克斯发表他的著名公式——司督克斯公式——时，很少人能认識到这个公式的实际意义，更沒有人会料到司督克斯这方面的研究是奠定近代大地測量学中的旁支学科物理的大地測量学或地球形状学的基础．因为当时人們对大地測量的精度要求不高，同时又只限于較小的区域內进行；此外，当时的重力測量技术水平甚低，只能在少数的实驗室內进行，世界上还只有少数的重力点；因此，应用重力資料来研究地球形状問題一方面未被大地測量学家所接受，同时也似乎很少可能来进行普遍的重力測量，以实現司督克斯的理想．到了本世紀的初年，德国測量学家赫尔默特(F. R. Helmert)首先认識到这种研究的重要性而予以提倡．几十年来，人們逐漸理解到重力資料对于研究地球形状以及提高大地測量精度的重要性，而大力推行重力測量工作；同时由于仪器制造事业和精密量測技术的不断发展和改进，重力測量工作也越来越簡便而精确．时至今日，重力測量已普及各大陆，并且开始在海洋上进行測量．司督克斯的理論也获得了进一步的发展．重力測量資料以及近年来发展起来的司督克斯理論，正越来越多地在大地測量学的研究和实踐中起着作用．

重力資料的应用不仅限于大地測量学，它同时也是地质学和地球物理学中有关研究的重要依据．就广义来說，全球的或大区域的重力資料，可以与地震資料相配合，协助地质或地球物理学家进行地壳构造的研究，而在小区域所进行的詳細的重力測量結果，則为物理勘探的重要数据．

此外，在远程导弹的精确导航系統以及人造卫星軌道的精密推算中，重力資料也是不可缺少的重要因素．

由此可見，重力資料在科学研究以及在生产中的应用是多方面的，它的重要性也是十分明显的．而这种資料的获得，則有賴于广泛地开展重力測量工作．

重力測量学是研究重力測量的方法和仪器的一門学科．近几十年来，特别是在第二次世界大战以后的二十多年来，重力測量的技术获得了迅速的发展．以絕对重力測量来說，过去一直是依賴絕对摆来进行，現在則除了应用近代的量測技术，大大地提高絕对摆的測量精度以外，同时还发展了应用自由落体的原理以及其他原理来測量絕对重力的新方法．以相对重力測量来說，則发展了各种型类的高精度重力仪．这些新方法的原理都十分簡单．但是，如果沒有現在的精密仪器制造的高度水平和精密的量測技术，則这种理論是很难实現的．近代的重力測量不但可以在陆地上进行，同时也可以在海洋上进行，而

最近的几年，还在飞机上开展了重力测量的試驗工作．总之，重力测量技术和仪器制造的进展是十分迅速的．

我国的重力测量工作和科学研究是在解放以后才发展起来的．十几年来，各方面都开展了巨大的工作，重力資料已日漸积累起来，从而大大地推动了有关的研究工作．但是，我国的重力测量仪器的研究和制造还是十分落后的．目前我国工业水平正在不断地提高，仪器制造事业已有了相当的基础，相信在今后的几年中，我国的重力测量研究和仪器制造也一定会迅速地发展起来．

本书是重力测量学与地球形状学一书的上册，以討論重力测量学为主．全书共分为八章：第一章緒論，主要介紹了重力测量的基本原理以及本門学科的发展概况；第二章討論了絕对重力测量，其中包括絕对摆、自由落体以及其他方法的原理，仪器結构和有关問題；第三、四两章討論了相对重力测量，前一章为应用相对摆的测量方法和仪器以及各种影响的消除方法；后一章則介紹了各种型类的重力仪，而以較多的篇幅介紹和討論了在我国应用較广或較有发展前途的少数几种型类；第五、六两章則分別討論了海洋和航空重力测量，其中以討論扰动加速度的产生以及消除它們的途徑和仪器設备为主；第七章討論实测重力值的各种归算方法，它們的物理意义和計算公式；第八章則討論了重力位二次导数．

作者知識有限，书中缺点在所难免，尙望讀者指正为幸．

最后，本书插图大多由唐立秋同志繪画，又承張善言等同志代为校閱原稿，特此致謝．

1963 年 11 月于武昌小洪山

目　　录

第一章 緒　論

§1.1. 什么是重力

地球对于它周圍的物体具有一种吸引的力量，我們称它为地球引力或称为地心吸力．这种現象是人类生活中經常接触到的．我們常常看到悬在空中的物体，只要支悬它的力量一消失，它就会墜落下来，而墜落的方向总是对着地心．我們也知道，要将一个物体从地面上举起来时，必須用一定的力量．这个力量是和物体的质量成正比例的．我們通常称举起一个物体所需的力为这个物体的重量．这是一种十分普通的現象，人們对于它已习以为常．但是，为了了解它的規律，探索它的根源，却經过了漫长的岁月和不少知名科学家的努力．首先，是意大利的物理学家伽里略(G. Galileo)，1590 年在比薩斜塔上的試驗，証明了物体下落速度与它的质量无关．他并且作了不少其他的实驗，并广泛地闡明了力学的基本定律，为力学奠定了基础．他的实驗与数学分析相結合的研究方法，更为近代科学探求眞理的途徑創造了先进的范例．

其次是牛頓的貢献．他认为引力的作用不仅存在于地球与其周圍物体之間，它也存在于宇宙內任何物体之間．因此，他认为月亮之所以能按一定軌道繞地球运行的原因，就是因为地球与月亮之間彼此存在着引力．这就是牛頓的經典力学中的万有引力定律．按照这个定律，任何两个物体之間存在一个相互作用的力，它的大小与物体质量的乘积成正比例，而与其間距离的平方成反比例．設两物体的质量为 m_1 及 m_2，其間的距离为 r，则引力 F 为

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}, \tag{1.1}$$

G 为一常数，称为引力常数．

牛頓的万有引力定律是总結了前人的經驗，特別是研究了科普勒关于行星繞日运动的三定律之后推导出来的．后者是从历年的天文观測数据所推出的經驗定律，而牛頓则根据万有引力定律，用数学方法推导，他所得的行星运动的定律与科普勒(Kepler)的完全吻合，只是在第三定律中略有修正．他的公式考虑了行星的质量．行星的质量对于太阳来說是很小的$\left(\text{行星中质量最大的木星也只有太阳的 }\frac{1}{1047}\right)$．古代的天文观測数据根本不能反映出这种微小的差別[7]．

牛頓的万有引力定律以及他的运动学三大定律，为近代力学奠定了基础．在此以后，又經过了不少数学家和物理学家，特别是 19 世紀初期，法国的数学家，如泊松(S. D. Poisson)、

拉普拉斯 (P. S. Laplace)、拉格朗什 (J. L. Lagrange) 和达朗白 (J. de R. D'Alembert) 的努力,他的理論得到了很大的发展,达到了十分完备的地步.

但是,牛頓的經典力学的应用范圍是有一定限制的. 首先,它只能应用于宏观物体之上. 对于微观物体(单个的原子或粒子), 它是不正确的. 微观物体的运动定律应建立在量子力学之上. 并且就是对于宏观物体来說,也必須物体运动速度远較光速为小,經典力学的各种定律才是正确的. 卽便如此,在天体力学中,还出現了某些現象,不能用經典力学得到完满的解釋. 水星近日点的超前(实际观测数据比应用行星方程所求出的結果每世紀要超过 43″ 左右)就是一个突出的例子. 关于这个問題,天文学家曾經作过不少的努力,建立了一些假說,例如介质的阻力等, 皆无法得到完满的解釋. 这个矛盾直到爱因斯坦的相对論出現以后才得到解决[4, 6, 13].

牛頓的經典力学是建筑在伽里略的坐标轉換基础之上的, 卽一个坐标系以直綫等速相对于另一坐标系而运动,两系中坐标的轉換关系为[4, 6]:

$$x'=x-vt,\ \ y'=y,\ \ z'=z,\ \ t'=t, \tag{1.2}$$

式中坐标系的相对运动沿 x 方向, v 为其速度. 由此可知,不論采用什么坐标系作为我們的参考坐标系, $\frac{d^2x'}{dt'^2}=\frac{d^2x}{dt^2}$: 也就是說,一个固定的力将产生一定的加速度,不論所采用的坐标系为何. 这样, 就使我們不論应用何种力学实驗, 都无法发現在宇宙內的絕对运动. 这就是經典力学中的相对性原則. 二百年来,这个原則一直被物理学家所承认,沒有人对它发生过怀疑. 直到 1865 年,英国物理学家麦克斯韦尔(J. C. Maxwell)建立了他的电磁場的动力学. 在他的方程中, 发現电磁波也存在于沒有物质的空間. 因而认为在空間的絕对运动是可以用光学方法来測驗的. 这种实驗最初由美国物理学家曼克尔逊(A. A. Michelson)在 1881 年, 后来又由他和化学家莫萊(E. W. Morley)在 1887 年共同完成. 实驗証明,光速是恒等的,它不受地球运动的影响. 这說明相对性的原則还是正确的. 但是,爱因斯坦认为麦克斯韦尔的方程也是严格无誤的.矛盾的产生在于我們过去一直把空間和时間看成是独立而不相关联的因素,这个观念必須修改. 所以,他认为过去所采用的伽里略轉換是不严格的, 应当采用罗倫兹(H. A. Lorentz)的轉換来代替. 根据罗倫兹, 在任何坐标系中,光綫的傳播方程应为

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0, \tag{1.3}$$

式中 c 为光速. 由此得到轉換的关系如下:

$$x'=\gamma(x-\beta ct),\ \ y'=y,\ \ z'=z,\ \ t'=\gamma\left(t-\frac{\beta x}{c}\right), \tag{1.4}$$

式中 $\beta=v/c$, $\gamma=(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$, v 为坐标系的相对运动的速度(沿 x 方向). 由此可知, 一个在 (x, y, z) 系中放在 x 方向的直尺,在本系中所測量的长度为 L', 但在 (x', y', z') 系中所量测的結果則应为 $L'=L(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$; 也就是說,短了一些. 对于时間, 如果在 (x, y, z)

系中，同一地点两件事件的发生时間間隔为 t，在另一系中看来則为 $t'=t(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$；也就是說时間延长了一些．从上列的轉換关系中还可以得到速度的变化为

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+u'_xv/c^2},\quad u_y=\frac{u'_y}{1+u'_xv/c^2},\quad u_z=\frac{u'_z}{1+u'_xv/c^2},\tag{1.5}$$

式中 u_x, u_y, u_z 等为速度的分量．此外，在运动中的物体的质量也增加了，即若物体在靜止时的质量为 m_0，則在按速度 u 运动时，质量变为

$$m=\frac{m_0}{(1-u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}.\tag{1.6}$$

由此可知，牛頓的經典力学并不是十分严密的．只有当运动速度远較光速为小时，由它所推出的結果才能与实測結果完全相符．水星繞日运动的速度只有每秒 47.8 公里(約为光速的 1.6×10^{-4})，就可以产生可以观測出来的偏差．

爱因斯坦根据前人的經驗，以及前人的各种理論研究，創造了相对論原理．这种原理是近代物理学和力学研究的基础．所謂特殊相对論是：观測者的相对运动是直綫等速度的．而当相对运动是任意的，不受上列限制时，則属于广义相对論的范疇．

爱因斯坦的相对論得到很多实驗的証实．上述水星近日点前进率的偏差問題就是一个显著的例子．

按照牛頓力学，行星圍繞太阳的运动方程为[7]

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{\mu}{h^2},$$

式中 u 为矢徑 r 的倒数；θ 为矢徑角，即等于近点角 f 加近日点到升交点的角度 ω；$\mu=GM$，G 为引力常数，M 为太阳与行星质量之和；$h=an^2\sqrt{1-e^2}$，a 为軌道长半徑，e 为离心率，n 則为平均角速度．但是，根据相对論，則方程中应加入一項 αu^2，$\alpha=\frac{3\mu}{c^2}$，c 为光速[7]．由此所計算出来的改正数为每百年 $43''.03\pm0''.03$，而实际测量与牛頓理論的差别則为 $43''.56\pm0''.94$[1]．按照相对論計算地球軌道近日点移动率的差别应为 $3''.84$，近年来也已得到了实驗的証实．此外，爱因斯坦在 1914 年曾預言通过太阳边緣的光綫将被折射 $1''.78$，这在第一次世界大战期間就已被日蝕观測队所証实．在 1947 和 1952 年的两次日蝕观測中，所得的結果各为 $2''.01$ 及 $1''.70$，与理論所推算的数值十分接近．

以上所述是万有引力理論发展的概况．在本书中我們所討論的只限于地球对于其周圍物体的引力問題．因此应用牛頓的經典理論已足够了．

如果地球是靜止的，也就是說它沒有自轉运动，則作用于物体之上的力只有引力．但是，地球是圍繞着它的短軸(地軸)而旋轉的．因此，地面的物体随着地球的旋轉而产生离心力．这个离心力是垂直于地軸的，并且是向外的．它的大小为

$$R\cos\varphi\cdot\omega^2,$$

式中 R 为地球半徑，φ 为物体所在的緯度，ω 則为地球自轉的角速度．这个数值可以很准

确地从天文测量中求得,为

$$\omega=\frac{2\pi}{86164}.$$

而 r 和 φ 則可从物体在地面上的位置来确定. 所以,离心力是可以根据理論計算出来的.

地球对于单位质量的物体的引力和上述的离心力的合力称为重力. 但是,离心力与引力相較为量很小,在赤道上也不过为引力的千分之三. 所以,重力的主要部分是引力.

根据牛頓第二运动定律: 作用于一个物体上的力等于物体的质量乘其所产生的加速度. 这个加速度是假定物体在自由降落时受到地球引力所产生的. 由于这个力和重力一样,所以,我們經常将重力和重力加速度两个名詞并用. 力的单位是 1 克质量获得单位加速度(厘米/秒^2)之力,在物理学中称为达因. 但是在重力学中則名为伽(Gal),以紀念偉大的物理学家伽里略而命名的. 有时,我們也用厘米/秒^{2}来表示. 在重力测量中,我們常以千分之一伽作为单位,称为毫伽.

§1.2. 引力常数的测定

在公式(1.1)中,如果两个物体的质量 m_1, m_2 为已知,其間的距离(中心距离)也可以量出,而假如我們能用一种方法测出引力 F,則常数 G 即可算出. 測定 G 的課題一直为物理学家所重視. 但是,在从前,人們更关心的是地球的密度問題. 測定 G 的目的主要是要知道地球的平均密度. 但是,这两个問題是密切联系着的,因为地球对单位质量的引力为

$$F_0=\frac{GE}{R^2}=\frac{G}{R^2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\delta\right), \tag{1.7}$$

式中 E 为地球质量, δ 为其平均密度; F_0 为引力,它可以从实测的重力值中去掉离心力求得. 簡化(1.3)式,得

$$G\delta=\frac{3F_0}{4\pi R}, \tag{1.8}$$

R 也可以根据观测地点的位置来推算. 所以,知道了 G 就可求得 δ. 反之,如果已知 δ,也可以推算 G.

測定 G 的方法很多. 最早的測定当推英国卡文迪(H. Cavendish),他在 1797—1798 年的扭秤实驗中,利用人造的吸引体使扭秤扭轉,直接求出已知质量和已知距离之間的引力,然后求出引力常数. 卡文迪的扭秤是一个 6 呎长的横杆,两端各悬一个直徑为 2 吋的小鉛球,横杆中央用細絲悬挂. 另将两个直徑为 12 吋的大鉛球悬挂在扭秤的两边,使他們与相当的小鉛球十分接近,并且使球心的联結綫垂直于横杆. 設大球的质量各为 M,小球的质量各为 m,大小球的球心距离为 d,則两对大小球之間的引力各为

$$f=\frac{GMm}{d^2}. \tag{1.9}$$

由于这个引力使扭秤横杆旋轉一个角度．现在，若将两个大球各換到小球的另一边（位置与以前位置相对称），則扭秤旋轉一个相反而相等的角度．这两个角度之和是可以用仪器观测出的．設这个角度为 2θ，則

$$f\cdot l=\tau\cdot\theta, \tag{1.10}$$

式中 l 为横杆的长度，也就是两个小球球心之間的距离，D 則为扭秤的扭力常数，它可以用扭秤自由摆动的周期来測定．因为这个周期等于

$$T=2\pi\sqrt{\frac{K}{\tau}}, \tag{1.11}$$

K 为悬挂系統的轉动慣量，是可以根据横杆以及悬挂在它上面的小球的尺寸和质量計算出来的．所以，測定了 T，就可推算出 τ．因而可以从(1.10)式推算出 f．在(1.9)式中 M，m 和 d 都是已知的，因此 G 就可以計算出来．

其次，是利用人造的吸引体与地球引力的比較来求 G．将一个质量为 m，而重量为 W 的球悬挂在一个普通天秤的一头．設地球的质量为 E，其半徑为 R，則

$$W=\frac{GEm}{R^2}.$$

現在，如果在 m 之下安放一个质量为 M 的球，它和 m 之間的中心距离为 d，則重量将增加 $\delta W=GMm/d^2$，由此得：

$$\frac{\delta W}{W}=\frac{MR^2}{Ed^2},$$

即地球的质量可从 M 球的质量計算出来：

$$E=M\left(\frac{W}{\delta W}\right)\left(\frac{R^2}{d^2}\right). \tag{1.12}$$

自(1.7)式，有

$$F_0=\frac{GE}{R^2}, \tag{1.13}$$

故

$$G=\frac{F_0R^2}{E}. \tag{1.14}$$

按照这个原理測定 G 的有德国的焦里(Ph. von Jolly)和美国的波英丁(J. H. Poynting)等．除此以外，还有英国的博艾斯(C. V. Boys)，匈牙利的厄特弗斯(R. Eötvös)和美国的海尔(P. R. Heyl)等，他們所根据的原理都大同小异．現在所采用的数值，为海尔1930年的数值，它等于[1, 2]

$$G=6.670\pm0.005\times10^{-8}\ \text{厘米}^3\cdot\text{克}^{-1}\cdot\text{秒}^{-2}.$$

§1.3. 重 力 位

在 §1.1 中，我們已知重力是地球对它表面上单位质量的引力，和这个质量随着地球

旋轉所产生的离心力的合力．假如地球的质量分布是均匀的，我們就可以利用公式(1.1)来計算引力．此时，m_1 和 m_2 中之一等于单位质量，另一则为地球的总质量，假定它是集中在地球的重心之上．因此，距离 r 就是地心到被吸引的单位质量之間的距离．但是，地球的质量不是到处均匀的，它的密度随着位置而变．这样，我們就不可能用象(1.1)式这样簡单的公式来計算引力．假設一个直角坐标系統以地球的重心为原点，自轉軸为 z 軸，x 和 y 軸在赤道平面之上，x 軸指向某一固定的子午綫，y 軸与之相垂直．又設地球体中的一个微分元素的质量为 dm，它的坐标为(x, y, z)；P 为被吸引的单位质量，坐标为(x', y', z')．P 与 dm 之間的距离为

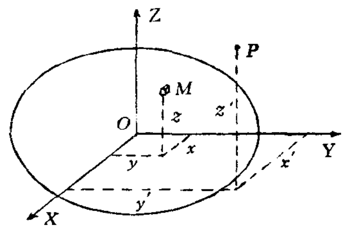

图 1.1

$$\rho=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}. \tag{1.15}$$

dm 对于 P 的引力为

$$f=\frac{Gdm}{\rho^2}=\frac{G\delta d\tau}{\rho^2}, \tag{1.16}$$

δ 为地球在 dm 点上的密度，$d\tau$ 为微分体积．如果用直角坐标，则

$$d\tau=dx\,dy\,dz,$$

dx, dy, dz 为 x, y, z 方向的微分长度．将(1.16)式的引力 f 分解为沿着 x, y, z 方向的分力，则有

$$f_x=\frac{G\delta}{\rho^2}\frac{(x'-x)}{\rho}d\tau,\ f_y=\frac{G\delta}{\rho^2}\frac{(y'-y)}{\rho}d\tau,\ f_z=\frac{G\delta}{\rho^2}\frac{(z'-z)}{\rho}d\tau. \tag{1.17}$$

对整个地球进行积分，则得地球对 P 点引力的三个分力为

$$F_x=G\int_T\frac{\delta(x'-x)}{\rho^3}d\tau, \tag{1.18}$$

以及类似的 F_y 和 F_z 两式．这里的积分是一个体积分，如用直角坐标，則应当是就 dx, dy, dz 进行的三重积分．δ 是随着坐标而变的，是一个位置函数．

从(1.18)式和(1.15)式可以看出，F_x, F_y, F_z 是同一个函数对于 x', y', z' 的偏导数．这个函数是

$$V=G\int_T\frac{\delta\,d\tau}{\rho}, \tag{1.19}$$

也就是說，

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x'},\ F_y=-\frac{\partial V}{\partial y'},\ F_z=-\frac{\partial V}{\partial z'}. \tag{1.20}$$

我們称 V 为地球引力場在 P 点上的位．所謂位就是位置能量的簡称．位的起算点可以任意选擇，但在重力学中，我們以无穷远处的位为零．所以，P 点的位就是将单位质量从 P 点移到无穷远时所付出的能量．

我們上文已經說过，地球上除了引力之外，还有离心力．离心力的三个分力为

$$x'\omega^2,\ y'\omega^2,\ 0.$$

按照同一理由，我們不难看出这三个分力是下列离心力位 U，对于 x', y', z' 的偏导数：

$$U=\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)\omega^2. \tag{1.21}$$

地球重力場的位是引力位 V 和离心力位 U 之和，即

$$W=V+U. \tag{1.22}$$

故重力的三个分力为

$$g_x=-\frac{\partial W}{\partial x'},\quad g_y=-\frac{\partial W}{\partial y'},\quad g_z=-\frac{\partial W}{\partial z'}. \tag{1.23}$$

而在方向 r 上的分力，則为

$$g_r=-\frac{\partial W}{\partial r}.$$

总的重力 g 为

$$g=\sqrt{g_x^2+g_y^2+g_z^2}. \tag{1.24}$$

很明显，如果 n 为重力的方向，則

$$g=-\frac{\partial W}{\partial n}.$$

§1.4. 重力測量簡史

物体受到地球重力而下落的規律，最初是意大利的物理学家伽里略所发現的．他在16世紀的80年代，已經注意到物体下落的速度与物体的重量无关．1590年，他在比薩的斜塔上投擲了两个重量不同的鉛球，发現它們同时到达地面，因而証实了他的理想．物体的下落不是等速度的，而是越来越快，也就是說物体下落时具有加速度．这个現象在亚里斯多德时已經知道了．伽里略利用球在斜面上的滚动速度来研究落体的下落規律．他发現球在斜面上滚动，在第二秒钟內所走的距离为第一秒的3倍，第三秒钟內所走的距离为第一秒钟的5倍．其数値第一秒钟走了4.9米，第二秒钟內走了14.7米，比第一秒钟所走的增加了9.8米；在第三秒钟走了24.5米，比第二秒钟也增加了9.8米．所以，地球重力加速度的粗略数値为9.8米/秒^2，这在伽里略时代就已經求出来了[2,11]．

伽里略在学生时代，已經注意到摆的运动規律．他在比薩的大教堂中发現每个吊灯的摆动周期始終是一律的，但是吊灯的悬綫长度不同时，則周期就不相同，悬綫越长，其周期越大．他开始利用摆作为衡量时間的工具．

1669至1670年，法国的測量学家毕加(J. Picard)在完成了他的弧度丈量以后，曾經精密地量測秒摆的长度．他的目的是想利用秒摆的长度来做一种天然的长度标准．他的方法很簡单．将一个金属球悬挂在一根細綫上，綫的上端用鉗夹住，然后逐漸将綫一点一

点地縮短或加长，使摆的周期准确地和时钟上的一秒相等．但是，他并沒有找出摆长与周期之間的关系．

現在，我們所常見的数学摆的公式，是荷兰物理学家惠更斯(C. Huygens)所发現的，它的形式是

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{1.25}$$

式中 T 为周期，l 为摆长，g 为重力．

所謂数学摆就是綫摆，是用一根細綫悬挂一个金属的球．綫极細，可以假定它沒有质量．所以长度 l 就是从球心到綫上端的支点的距离．在那个时代，誰也不会想到重力是随地而异的，因此也不会預料到钟摆的长度应随着緯度而改变．直到1672年，法国科学院派了天文学家里舍(J. Richer)到南美洲赤道附近的卡晏(Cayenne)观测火星．他带了一具在巴黎走得十分准确的天文钟．到了卡晏以后，他发現这个钟每天慢了两分半钟，必須将摆长縮短 $1\frac{1}{4}$ 巴黎綫(1个巴黎綫約合2.3毫米)，方能使钟恢复正常．两年之后，他回到巴黎，又須将摆长恢复到原来的长度．这时，他才得到一个結論，认为赤道上的重力要小于巴黎．但是这个見解是很难为当时的学者們所接受的．所以，这个巨大的发現就被擱置下来了．

不久以后，牛頓根据力学的研究认为地球应当是赤道膨脹两极略扁的扁球，里舍的摆长試驗也支持这一学說．但是，当时法国科学院在法国所进行的弧度測量的結果，却与此相反，认为地球是两极較长的长球．为了解决这个矛盾，法国科学院派了两个測量队，一队到南美的秘魯，另一队則到北欧的拉普兰(Lapland)进行弧度測量工作．測量的結果証实了牛頓理論的正确性．从此，重力随緯度而变才被人們所公认．不少科学家在不同的地点进行了重力測定(絕对重力測定)，但是他們的目的仍旧是要确定不同地点的秒摆长度．在这些工作中，做得比較精确的是法国的康达明(Ch. de La Condamine, 1735—1741年間参加秘魯測量者之一)．他在1735年在海地島(Haiti. I.)的三道明谷进行了測定．他用了长短两种綫摆，卽用一个2秒和一个1秒摆．經过各种改正之后，求得那里的秒摆长度应为36法寸 $7\frac{7}{30}$ 巴黎綫，約合99.08厘米．根据(1.25)式可以計算出当地的重力約为977.9伽．

1792年，法国波达(J. Borda)和卡西尼(J. Cassini)在巴黎天文台作秒摆的試驗，他們的摆还是采用綫摆的形式．但是，在观測周期时，第一次应用了符合法．他們将自由摆(卽需測定长度的摆)挂在钟摆的前面．钟摆的摆錘上貼一小片黑紙，上面画有白色的十字綫．在自由摆之前安一望远鏡，它的光軸正好安放在两摆的共同垂直面上．当两摆同时处于靜止状态时，在望远鏡中可以看見自由摆的摆綫正好将钟摆上的十字綫遮蔽．在望远鏡和綫摆之間安一屏，屏上有一条直綫，它的位置也校正好，使在两个摆的共同垂面

之上,所以,当十字綫,摆綫以及屏上直綫同时相合之时,卽为两摆符合之时. 时間观測的符合方法早在1735年已为梅朗(J. de Mairan)所发明,而为波达和卡西尼所采用. 这种方法是后来重力摆的主要观測方法.

在同一年代,法国的物理学家普隆尼(R. de Prony)創造了复摆,它的結构很复杂. 到1811年,德国天文学家波恩貝格(Joh. G. F. Bohnenberger)已經有了可倒摆的概念,但未能实現. 这种摆直到1817年才由英国的物理学家卡德(H. Kater)創造出来. 卡德的摆是一根135厘米长的黄銅条,两头略細,中間一米左右則比較寬. 在两头各安一刀口,位置互相对称,刀口的尖端相隔一米整. 另有三个金属錘,最重的一个重量为930克,固定在摆的一头,目的是使摆的重心到两刀口之間的距离不相同. 另外两个較小的錘,一个重230克,安在两刀口之間;另一个重125克,大約在摆的中央,可以用微动螺絲,将它向上或下移动. 它的目的是使正倒两次摆动的周期相等. 两个刀口之間的距离就是摆长,用来測量刀口距离的工具是一个比較器. 比較器上安有两个显微鏡,測量时将它們分别对准于两个刀口的尖端. 然后用标准尺来量显微鏡間的距离. 周期則用符合方法測定[5].

1826至1827年間,德国貝塞尔(F. W. Bessel)在科尼斯堡所进行的重力測量仍用綫摆. 理由是复摆的刀口不易磨制,若用不准确的刀口,精度反而不如綫摆为佳. 他应用摆长可以改变的綫摆来測定不同长度摆的周期. 假設摆长为 l_1 及 l_2, 所測量的周期各为 T_1 及 T_2, 则自(1.25)式有

$$T_1^2-T_2^2=\frac{\pi^2}{g}(l_1-l_2),$$

因而得

$$g=\pi^2\frac{l_1-l_2}{T_1^2-T_2^2}. \tag{1.26}$$

这里的 T 是半周期,卽摆从静止的垂直位置摆到一边之后,又回复到静止位置所需时間.

貝塞尔对于复摆的原理也有所发展. 根据他的理論,摆的外形必須上下对称,以便使正倒两个位置的摆动所受空气阻力的影响一律. 但是,就质量来說,則越不对称越好. 这样才能加大两个刀口到摆的重心的距离差别. 因此,必須将摆制成一半是实心的,另一半是空心的. 根据这个原理所制成的摆,首先在澳洲的墨尔本进行了观測.

在19世紀中叶,比較精密的重力摆当推雷白索尔特摆. 这种摆是德国的雷白索尔特工厂(Mechaniker A. Repsold und Söhne)在1862年受了瑞士測量委員会的委托,根据貝塞尔的設計制造的. 摆身由黄銅制成,呈柱形,长125厘米,两刀口相距1米. 刀口原来是鋼制的,后来改成瑪瑙. 支承架是一个三脚架,与刀口接触的刀承也用瑪瑙制成. 在这以后的一个比較长的时期內,这种摆在进行絕对重力工作中起了一定的作用. 1898至1904年,德国波茲坦大地測量研究所的居能和富特范格勒(F. Kühnen 及 Ph. Furtwängler)的絕对重力測量就是应用这种摆.