学习线性代数指导　备考硕士研究生指南

线性代数
解题方法技巧归纳
（第二版）

毛纲源

华中理工大学出版社

学习线性代数指导　备考硕士研究生指南

线性代数解题方法技巧归纳

（第二版）

毛纲源

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题方法技巧归纳(第二版)/毛纲源
武汉:华中理工大学出版社， 2000 年 3 月
ISBN 7-5609-0894-2

Ⅰ. 线…
Ⅱ. 毛…
Ⅲ. 线性代数-解题方法-技巧归纳
Ⅳ. O151.2

线性代数解题方法技巧归纳(第二版) 毛纲源

责任编辑:李立鹏
封面设计:周 俐
责任监印:熊庆玉

出版发行:华中理工大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

经销:新华书店湖北发行所

录排:武汉皇荣文化发展有限责任公司排版
印刷:核工业中南三〇九印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:15.5 字数:373 000
版次:2000 年 3 月第 2 版 印次:2000 年 9 月第 8 次印刷 印数:38 001—44 000
ISBN 7-5609-0894-2/O·117 定价:18.00 元

内容提要

本书是学习线性代数的指导书，也是备考硕士研究生的应试指南．它将线性代数主要内容按问题分类，通过对精选例题的分析，归纳解题方法技巧，总结解题规律．例题和习题主要来自两部分：一部分来自同济大学数学教研室编的线性代数（第三版）中较难解的典型习题，另一部分是历届全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷一和数学试卷二中的线性代数试题．题型广泛，内容丰富，基本上覆盖了线性代数的主要内容．读者可从中加深理解线性代数的主要内容，熟练掌握各种解题方法、技巧和规律，提高解题和应试能力．

本书可供本（专）科学生学习线性代数阅读和参考，对于自学者和有志攻读硕士学位研究生的青年，本书更是良师益友；对于参加成人教育、自考和文凭考试的读者，本书也不失为一本有指导价值的很好的参考书；对于从事线性代数教学的教师亦有一定的参考价值．

前　言

本书将线性代数的主要内容按问题分类，通过引例，归纳各类问题的解题规律、方法和技巧．例题类型广，有一定梯度，除给出基本概念和基本运算的例题外，还有不少典型例题，其中大部分选自非数学专业的研究生入学试题．

由于本书着重基本解题方法、技巧的归纳和应用，不同于一般的教科书、习题集和题解，它自具特色，对学习线性代数有很好的参考价值．

本书可供大专院校、电大、职大、函大等广大学生学习线性代数时阅读和参考；对于自学者及有志攻读硕士研究生的青年，本书更是良师益友；对于从事线性代数教学的教师也有一定的参考价值．

本书的编写和出版工作得以顺利进行，是与华中理工大学出版社的大力支持和帮助分不开的，武汉大学熊全淹教授对本书提出了许多宝贵意见，湘潭大学唐佑华教授对初稿作了仔细的审校，提出了很好的修改意见，在此一并表示衷心感谢．

限于作者水平，书中不当之处在所难免，敬请读者指正．

毛纲源　1993 年 5 月于武汉工业大学

第二版前言

本书自1993年出版以来，印刷多次，一直受到广大读者的欢迎与好评，与此同时广大读者对本书也提出了不少宝贵意见，这些意见对本书的修改帮助很大，在此深表谢意.

此次修订较大，增补了不少内容，这些内容都是学好线性代数、备考硕士研究生的重要内容.

本书对同济大学数学教研室编的线性代数(第三版)中较难解的典型习题和历届全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷一和数学试卷二中线性代数试题，都作了详细解答，供学习线性代数和备考硕士研究生的读者阅读参考.

本书虽经修改，限于编者水平，不妥与错误之处仍在所难免，敬请指正.

毛纲源　1999年7月于武汉工业大学

目　　录

第一章　行列式计算

§1.1　如何用定义计算行列式及其部分项

(一)行列式中某项所带符号的确定方法

调换项中元素位置,使每项所对应的行下标(即第一个下标)为自然排列,然后求其列下标所组成的排列的逆序数.根据行列式定义,由其奇偶性,确定该项所带符号.

或者直接分别计算该项行下标和列下标所组成的排列的逆序数,由这两个逆序数之和的奇偶性,确定该项所带符号.

例 1　在 6 阶行列式 $D_6=|a_{ij}|_{6\times 6}$中证明 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$是 D_6 的一项,并求这项应带的符号.

解　调换项中元素位置,使其行下标为自然排列,得到

$$a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}=a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}.$$

此时右端的行下标排列为自然排列,列下标排列为 362415,为 6 元排元.因而右端是位于 D_6 的不同行不同列的 6 个元素的乘积,故它是 D_6 的一项.

该项所带符号既可由右端列下标排列的逆序数,也可由左端行下标排列与列下标排列的逆序数之和的奇偶性确定.

因 $\tau(362415)=8$ 或 $\tau(531462)+\tau(123456)=8+0=8$,故所给项应带正号.

例 2　问 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,$a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$是不是下列 4 阶行列式 D_4 中的项.若是应带什么符号?

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} \\ a_{21} & a_{32} & a_{23} & a_{34} \\ a_{31} & a_{14} & a_{42} & a_{43} \\ a_{12} & a_{41} & a_{13} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

解 注意到 a_{ij}的下标并不表示 a_{ij}在 D 中的位置，不能形式地根据下标判别所给两项是不是 D 中的项．应根据这些元素实际在 D_4 中所处位置的行下标，列下标来断定．

由于 a_{11}，a_{22}均位于 D_4 的第一行，即为同行元素，$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$不是 D_4 的一项．而 $a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$中 4 元素依次位于 D_4 中的第 4，3，1，2 行，第 3，2，4，1 列．因而它们是位于 D_4 中不同行不同列 4 个元素的乘积，故 $a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$是 D_4 中一项．因

$$\tau(4312)+\tau(3241)=5+4=9,$$

故这一项在 D_4 中带负号．

(二)用定义计算行列式的方法

对于含零元素较多的行列式可用定义计算．因行列式的项中有一因数为零时，该项的值为零，故只须求出所有非零项即可．如何求出呢？常用下述两法．

法一 求出位于不同行、不同列的非零元素乘积的所有项．

当行列式含大量零元素，尤其是行列式的非零元素乘积项只有一项时，用此法计算简便．

例 3 用行列式定义计算

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \begin{array}{l} (a_{ij}\neq 0, i=k, j=k+1, \\ \quad k=1,2,3,4, \\ a_{5t}\neq 0, t=1,2,3,4,5). \end{array}$$

解 由行列式定义，每一非零项由不同行、不同列的 5 个非零元素乘积所组成．第 1 行的非零元素只有 a_{12}，它位于第 2 列，于是

该项第 2 行的非零元素不能在第 2 列，那只有 a_{23}. 同法可求第 3、4 两行中不同行、不同列的非零元素只能取 a_{34}，a_{45}. 第 5 行虽有 5 个非零元素，但与前面 4 个元素不同列的只有 a_{51}，于是该项 5 个非零元素的乘积为 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$.

再确定该项所带符号. 由于行下标已按自然顺序排，而列下标的排列为 2 3 4 5 1，且该排列的逆序数 $\tau(2\ 3\ 4\ 5\ 1)=4$，故带正号. 因除这一项外，其他不同行、不同列的元素乘积全等于零，所以 $D_5=a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$，解毕.

注意 用上法求非零元素乘积项时，不一定从第 1 行开始，哪行的非零元素最少(最好只有一个)就从哪一行开始，例如可从最后一行开始计算习题 1.1 第 3(1)题.

例 4 一个 n 阶行列式中等于零的元素个数如果比 n^2-n 多，则此行列式等于零.

解法一 根据行列式定义，该行列式展开后都是 n 个元素相乘，而 n 阶行列式共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数就会小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，因而该行列式的每项都至少含一个零元素，所以每项必等于零，故此行列式等于零.

法二 求出非零元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列，即可求出行列式的所有非零项.

根据 n 阶行列式的定义

$$|a_{ij}|_{n\times n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

可知，非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有多少个，相应地该行列式就含多少个非零项；如果一个也没有，则不含非零项，行列式等于零，这里 $\sum\limits_{j_1\cdots j_n}$ 表示对数码 $1,2,\cdots,n$ 的所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

为求出非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列，先由第 1 行的非零元素及其位置，写出 j_1 可能取的数码；再由第 $2,3,\cdots,n$ 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2,j_3,\cdots,j_n$ 可能取的数码. 在所有可能取的数码中，求出 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列.

例 5 用定义，计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix} \quad (a_i,b_i,c_i,d_i\neq 0,i=1,2).$$

解 设 $D_4=|a_{ij}|_{4\times 4}$，则 D_4 中第 1 行的非零元素为 $a_{11}=a_1$，$a_{13}=b_1$，故 $j_1=1,3$. 同法可求：$j_2=2,4$；$j_3=1,3$；$j_4=2,4$. 因 j_1,j_2,j_3,j_4 能组成四个 4 元排列：

$$1\,2\,3\,4;1\,4\,3\,2;3\,2\,1\,4;3\,4\,1\,2,$$

故 D_4 中相应的非零项共有四项，它们分别为

$$(-1)^{\tau(1\,2\,3\,4)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_1\,c_1\,b_2\,d_2,$$
$$(-1)^{\tau(1\,4\,3\,2)}a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}=-a_1\,d_1\,b_2\,c_2,$$
$$(-1)^{\tau(3\,2\,1\,4)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=-b_1\,c_1\,a_2\,d_2,$$
$$(-1)^{\tau(3\,4\,1\,2)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}=b_1\,d_1\,a_2\,c_2,$$

其代数和即为 D_4 的值，整理后得

$$D_4=(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1).$$

例 6 用定义，计算下列行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解 由 D_5 中第 1,2,3,4,5 行的非零元素分别得到

$$j_1=2,3;\quad j_2=1,2,3,4,5;\ j_5=2,3;$$
$$j_3=1,2,3,4,5;\quad j_4=2,3.$$

因 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 在上述可能取的数码中,一个 5 元排列也不能组成,故 $D_5=0$.

注意 一个 n 阶行列式 D 中如果存在某些非零元素 $a_{i_1j_1}$,$a_{i_2j_2},\cdots,a_{i_sj_s}(2\leqslant s\leqslant n)$,其列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 所能取的不同数码个数小于行数 s,则 $D=0$. 这是因为 D 中非零元素的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_s,j_{s+1},\cdots,j_n$ 连一个 n 元排列也不能组成,即 D 中没有 n 个非零元素相乘的项,从而 $D=0$. 例如,在 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

中第 1,4,5 行的非零元素的列下标取值为

$$j_1=1,3;\quad j_4=1,3;\quad j_5=1,3.$$

因它们所取的不同数码只有两个(1 与 3),其个数小于行数($s=3$),故 $D_5=0$.

上述 $D=0$ 的结论如从 D 中所含零元素个数来看,则可说成:

若 n 阶行列式 D 中位于某 s 行,k 列交叉处元素全为 0,且 $s+k>n$,则此行列式 D 等于 0.

例 7 用定义,计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1985 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1986 \end{vmatrix}.$$

解　为求 D 的值，只须求出 D 中所有非零项.

D 中第 1 行的非零元素只有 $a_{1,1985}$，因而 j_1 只能取 1985，即 $j_1=1985$. 同理 $j_2=1984$，$j_3=1983$，…，$j_{1985}=1$，$j_{1986}=1986$，于是 $j_1,j_2,\cdots,j_{1985},j_{1986}$在可能取的数码中，$j_1j_2\cdots j_{1985}j_{1986}$只能组成一个 1986 元排列：

$$1\ 9\ 8\ 5\quad 1\ 9\ 8\ 4\cdots 2\quad 1\quad 1\ 9\ 8\ 6,$$

故 D 中非零项只有一项，即

$$D=(-1)^{\tau(1985,1984,\cdots,2,1,1986)}a_{1,1985}a_{2,1984}\cdots a_{1985,1}a_{1986,1986}.$$

因 $\tau(1985,1984,\cdots,2,1,1986)=1984+1983+\cdots+2+1=1985\times 992$ 为偶数，故

$$D=(-1)^{1985\times 992}1\times 2\times 3\cdots\times 1985\times 1986=1986!\ .$$

（三）行列式中含特定元素的所有项的求法

一般用行列式的定义求出.

例 8[1.3]* 　写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$的项.

解　设四阶行列式为 $D_4=|a_{ij}|_{4\times 4}$，D_4 中含有因子 $a_{11}a_{23}$的所有项数为 4 元排列，$13j_3j_4$ 的个数，而 $13j_3j_4$ 能组成的 4 元排列共有两个，即 1 3 2 4 与 1 3 4 2 相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(1\,3\,2\,4)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},$$

$$(-1)^{\tau(1\,3\,4\,2)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

因而四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$的项只有上述两项.

例 9　试求 $f(x)$中 x^4 的系数，已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} \text{[illegible]} & \text{[illegible]} & 1 & 3 & 0 \\ x & \text{[illegible]} & x & 11 & 4 \\ -1 & \text{[illegible]} & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & \text{[illegible]} & 5 \\ 1 & -7 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

* [1.3]表示该例(或习题)是同济大学数学教研室编的《线性代数》(第三版)中习题一第 2 题. 下同.

解 $f(x)$中含 x 为因子的元素有

$a_{11}=-x$， $a_{21}=x$， $a_{23}=2x$， $a_{32}=x$，

$a_{35}=3x$， $a_{44}=x$， $a_{52}=-7x$.

因而，含有 x 为因子的元素 a_{ij_i}的列下标只能取：

$$j_1=1;\ j_2=1,3;\ j_3=2,5;\ j_4=4;\ j_5=2.$$

于是，含 x^4 的项中元素 a_{ij_i}的列下标只能取 $j_1=1, j_2=3, j_3=2, j_4=4$ 与 $j_2=1, j_3=5, j_4=4, j_5=2$；相应的 5 元排列只有 1 3 2 4 5 ，3 1 5 4 2，含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{\tau(1\,3\,2\,4\,5)}a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{44}\,a_{55}=4x^4,$$

$$(-1)^{\tau(3\,1\,5\,4\,2)}a_{13}\,a_{21}\,a_{35}\,a_{44}\,a_{52}=21x^4,$$

故 $f(x)$中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

习　题　1.1

1. 若$(-1)^{\tau(1\,k\,4\,l\,5)+\tau(1\,2\,3\,4\,5)}a_{11}a_{k2}a_{43}a_{l4}a_{55}$是 5 阶行列式$|a_{ij}|_{5\times5}$的一项，求 k,l 之值及该项所带符号.

2 3
3 2

2. 写出 4 阶行列式 $D=|a_{ij}|_{4\times4}$中所有含 a_{13}且带负号的项.

3. 用定义，计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. $=0$

4. 求出 $f(x)$中 x^4 与 x^3 的系数：$-3x^3$

$15x^4$

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3x \end{vmatrix}.$$

5. 由计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

证明奇偶排列各半.

§1.2 如何计算一行(列)与另一行(列)的分行(分列)成比例的行列式

为方便起见,以 r_i 表示行列(或矩阵)的第 i 行,以 c_i 表示其第 i 列,k 为常数.

(i)交换第 i,j 两行(列),记作 $r_{i\leftrightarrow j}(c_i\leftrightarrow c_j)$.

(ii)第 i 行(列)乘以 k(不等于 0),记作 $r_i(k)[c_i(k)]$.

(iii)第 j 行(列)乘以 k 加到第 i 行(列)上,记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

所谓一行(列)与另一行(列)的分行(列)成比例是指,该行(列)元素与另一行(列)的分行(列)的对应元素成比例.

一个行列式的第 i 行(列)元素乘以常数 k 加到第 j 行(列)($i\neq j$)上,消掉第 j 行(列)中的一分行(列),下称在第 j 行(列)中去掉与第 i 行(列)成比例的分行(列),即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1}+b_{j1} & ka_{i2}+b_{j2} & \cdots & ka_{in}+b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$