

统 计

数值分析

〔日〕 高桥磐郎 出居 茂 著
小林竜一 小柳芳雄

工 科 数 学 丛 书

5

辽 宁 人 民 出 版 社

工科数学丛书之五

统 计 数 值 分 析

〔日〕 高桥磐郎 出居 茂 著
小林竜一 小柳芳雄

潘 德 惠 关 颖 男 译

辽 宁 人 民 出 版 社

1981年·沈阳

译 者 的 话

这套丛书译自日本庆应大学教授田岛一郎和东京大学名誉教授近藤次郎主编的《工科の数学》。全书共分五册：《微分、积分》《线性代数、向量分析》《微分方程、傅里叶分析》《复变函数》和《统计、数值分析》。该丛书逻辑清晰、结构严谨，取材广泛，内容新颖；每册编有相应的习题集，并与基础部分紧密结合。该丛书当前在日本国内各工科大学已被广为采用，并深受读者欢迎。

为适应我国工科院校广大师生与有关人员的学习需要，特将此书全部译出。由于水平有限，误译之处在所难免，恳切地希望读者提出批评指正。

参加本丛书翻译的有：王运达、潘德惠、刘俊山、于溶波、傅文章、关颖男等同志。总校：赵惠元教授和熊民旦同志。在翻译过程中，党恺谦和田永成同志做了部分工作，在此谨致谢意。

一九八〇年五月

目 录

第一章 概率论基础	1
1.1 样本空间、事件	1
1.1.1 事件	1
1.1.2 事件的运算	2
1.1.3 不相容事件	6
1.1.4 事件的分枝图示	6
习题 1.1	7
1.2 概率	8
1.2.1 概率	8
1.2.2 加法定理与乘法定理	11
1.2.3 三个以上的事件	15
1.2.4 全概率定理	17
1.2.5 巴叶斯定理	19
习题 1.2	20
1.3 随机变数	21
1.3.1 随机变数的定义	21
1.3.2 概率函数与累积分布函数	22
1.3.3 离散随机变数的例子	26
习题 1.3	33
1.3.4 连续随机变数	33
1.3.5 数学期望、方差	41
1.3.6 车贝雪夫不等式	47
1.3.7 矩母函数	48
1.3.8 数据处理	52

第二章 样本	58
2.1 抽样	58
2.1.1 总体	59
2.1.2 总体分布	60
2.1.3 随机样本	60
2.1.4 统计量	62
2.2 统计量及其分布	63
2.2.1 样本平均值的分布	63
2.2.2 样本方差的分布	65
2.2.3 t -分布 (Student- t 分布)	70
2.2.4 F -分布	72
2.2.5 顺序统计量的分布	74
2.3 估计	77
2.3.1 点估计	77
2.3.2 区间估计法	86
2.4 假设检验	90
习题 2.1	93
〔附录〕	93
2.5 最优检验	93
2.6 复合假设检验	96
2.7 均匀最大功效检验	97
2.8 似然比检验	99
第三章 回归分析	107
3.1 多维分布与相关系数	107
习题 3.1	111
3.2 回归直线	112
3.3 多元回归. 偏相关系数. 复相关系数	115
3.4 相关系数的检验	121
3.5 最小二乘法. 正交多项式	124
3.5.1 回归直线的估计	124

3.5.2	回归分析的行列式表示	134
3.5.3	正交多项式	137
习题 3.2		141
第四章	方差分析与试验设计	143
4.1	因子与数据构造	143
4.2	一种方式分组的方差分析	145
习题 4.1		150
4.3	两种方式分组的方差分析	151
习题 4.2		159
4.4	拉丁方方法	161
习题 4.3		166
4.5	正交设计	167
4.5.1	正交表	167
4.5.2	正交试验设计	169
习题 4.4		181
〔附录〕		182
第五章	函数计算	187
5.1	插值法	188
5.1.1	拉格朗日插值公式	188
5.1.2	等间隔插值公式	192
5.1.3	插值公式的误差	195
习题 5.1		195
5.2	数值微积分	196
5.2.1	数值微分	196
5.2.2	数值积分	198
习题 5.2		200
5.3	函数逼近	200
5.3.1	最小二乘逼近多项式	201
5.3.2	最大最小逼近多项式	204
5.3.3	车贝雪夫多项式逼近	206

5.3.4 勒让德多项式及车贝雪夫多项式	209
----------------------------	-----

习题 5.3	211
--------------	-----

第六章 线性计算	212
----------------	-----

6.1 解一次联立方程组的扫除法	213
------------------------	-----

6.1.1 扫除法	214
-----------------	-----

6.1.2 主元素的选择	218
--------------------	-----

习题 6.1	220
--------------	-----

6.2 逆矩阵及行列式的计算	222
----------------------	-----

习题 6.2	225
--------------	-----

6.3 线性规划的解法	225
-------------------	-----

6.3.1 标准型的单纯形解法	226
-----------------------	-----

6.3.2 单纯型解法的根据	230
----------------------	-----

6.3.3 一般型线性规划的解法	232
------------------------	-----

习题 6.3	236
--------------	-----

6.4 特征值及特征向量的计算	233
-----------------------	-----

6.4.1 对称矩阵特征值及特征向量的计算	239
-----------------------------	-----

6.4.2 一般矩阵特征值及特征向量的计算	242
-----------------------------	-----

6.4.3 用牛顿法解方程	245
---------------------	-----

习题 6.4	248
--------------	-----

习题解答	249
------------	-----

附表	276
----------	-----

1. 二项分布表	276
----------------	-----

2. 普阿松分布表	278
-----------------	-----

3. 正态分布表	284
----------------	-----

4. χ^2 -分布表	287
------------------------	-----

5. F -分布表	289
-------------------	-----

6. t -分布表	293
-------------------	-----

7. r -表	295
-----------------	-----

8. z -变换表	296
-------------------	-----

9. 随机数表	298
---------------	-----

索引	300
----------	-----

第一章 概率论基础

所谓概率，是研究不确定事件发生的“确定程度”的一个概念。为此我们首先要着眼于学习描述什么样的事件。

概率这个词平时常用到它，但在没有把它作为一个数学分支处理以前，使用它还不能说有一个明确的概念。不按照系统地建立起的理论体系来重新看待每一个现实对象，是无法应用的。

工程专业方面应用概率的重要性，已经是不必解释的常识了。特别是在质量控制、可靠性等分支里，把伴有随机变动的现象作为直接研究的对象。

避免不了随机变动的生产问题，或者产品性能问题，都是工程里不可以忽视的，必须进一步解决的问题。

第一章作为试图解决这些问题的第一步，叙述了建立随机思想的基本概念以及它们的数量化问题。

1.1 样本空间·事件

1.1.1 事件 某试验结果一切可能发生的情况的总体叫做样本空间，用 S 来表示。样本空间是每个发生结果——叫做 S 的元素——的集。

将这些元素写成 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 时¹⁾，因 S 是以此为元素

1) 暂时设 S 是由有限个元素构成的。1.3.3 中再把 S 扩充到无限个元素。

的集，故可写成

$$S = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}. \quad (1)$$

例 1 在掷一次骰子的试验里，规定

$$E_i = \text{出现 } i \text{ 点}, i = 1, 2, \dots, 6$$

则

$$S = \{E_1, E_2, \dots, E_6\} \quad (2)$$

例 2 5 个试样检验用通过、不通过的尺度来检查。规定

$$E_i = 5 \text{ 个中间有 } i \text{ 个通过}, i = 0, 1, 2, \dots, 5$$

则

$$S = \{E_0, E_1, E_2, \dots, E_5\} \quad (3)$$

S 的子集叫事件。例 1 中“出现偶数点”的事件就是子集 $\{E_2, E_4, E_6\}$ ，例 2 中“3 个以上通过”的事件是子集 $\{E_3, E_4, E_5\}$ 。

S 的元素本身也可以说成是事件（基本事件）。例如例 1 中“出现 6 点”的事件可考虑成仅由元素 E_6 构成的子集。

一个试验的样本空间不能说是唯一的。例如例 1 中令

$$F_1 = \text{出现奇数点}, F_2 = \text{出现偶数点}$$

时，则有

$$S = \{F_1, F_2\} \quad (4)$$

但 F_1 实际上是例 1 中 (2) 式的 $\{E_1, E_3, E_5\}$ ， F_2 是 $\{E_2, E_4, E_6\}$ 。这样，(4) 式是从 (2) 推导出的表达形式。这种情况，可以说 (2) 式是比 (4) 式更为基本的表达形式。

构成样本空间的集的元素是什么，什么样的子集能定为事件等，要在解决问题时，对该问题用适当的标准来考虑。这些技巧要从例题和习题求解中学到。

1.1.2 事件的运算 事件与事件之间规定有和，积，非三种运算。二事件进行这些运算的结果，仍是一个事件。

设 A, B, C 等表示事件。以上运算的定义如下。

事件之和：或是事件 A 发生，或是事件 B 发生的事件（事件 A 与事件 B 同时发生的情形也在内）。

事件之积：事件 A 与 B 同时发生的事件。

事件之非：事件 A 未发生。

事件之非，即事件 A 未发生是指属于样本空间 S ，但不属于事件 A 的事件发生了。

如下规定和、积、非的运算符号。

事件之和： $A \cup B$

事件之积： $A \cap B$

事件之非： A^c ¹⁾

例 3 在掷一次骰子的试验中，样本空间 S 由 (2) 式确定。此时事件 A, B 是

$A =$ 偶数点发生

$B =$ 4 以上的点数发生

时，它们的和，积，非分别由如下元素构成。

$A \cup B = \{E_2, E_4, E_5, E_6\}$

$A \cap B = \{E_4, E_6\}$

$A^c = \{E_1, E_3, E_5\}$

$B^c = \{E_1, E_2, E_3\}$

问题 1 事件 A, B 如下定义。

$A =$ 甲去学校

$B =$ 乙去学校

此时，(1) $A \cup B$ ，(2) $A \cap B$ ，(3) $A^c \cap B^c$ 分别表示什么事件。

问题 2 事件 A, B 如下定义。

$A =$ 开关 A 发生故障

1) A 右上方的 c 表示余事件 (complement) 的字头。也有写成 A_c 的。 A^c 表示 S 中不属于 A 的点对应的事件，写成 $S-A$ 也行。因此，如不定义样本空间 S ，则无法明确地定义 A^c 。

$B =$ 开关 B 是正常的

此时, (1) $A^c \cup B$, (2) $A \cap B$, (3) $A^c \cap B$ 分别表示什么事件.

问题 3 事件 A 、 B 如下定义.

$A =$ 机器正常

$B =$ 操纵设备正常

此时, 试用以上运算符号表示事件 “机器正常但认为操纵设备反常”.

对于和、积、非三种运算有以下八个关系式成立.

$$[1] \quad A \cup B = B \cup A$$

$$[2] \quad (A^c)^c = A$$

$$[3] \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$[4] \quad A \cap B = (A^c \cup B^c)^c, \text{ 或由 } [2] \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$[5] \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$[6] \quad A \cap A^c = \phi^{1)}$$

$$[7] \quad A \cap S = A$$

$$[8] \quad A \cup \phi = A$$

对于这些关系, 还可以补充以下的关系.

$$[9] \quad A \cap B = B \cap A$$

$$[10] \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$[11] \quad A \cup B = (A^c \cap B^c)^c, \text{ 或 } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$[12] \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$[13] \quad A \cup A^c = S$$

$$[14] \quad A \cup S = S$$

$$[15] \quad A \cap \phi = \phi$$

[9]~[15]这些关系是将 [1]~[8] (除去 [2]) 的关系中的 $\cup$ 换成 $\cap$, $\cap$ 换成 $\cup$ 得到的.

1) ϕ 表示空事件 (不可能事件), 即样本空间中设有与它对应的元素的事件.

例如关系〔9〕中

左边由〔4〕与〔1〕得 $A \cap B = (B^c \cup A^c)^c$

右边由〔4〕得 $B \cap A = (B^c \cup A^c)^c$

所以得到 $A \cap B = B \cap A$ 〔9〕

因而有了〔1〕与〔4〕也可以不要〔9〕。

以上诸关系是作为事件运算的基本关系列出的。此外还可以推导出各种各样的关系。例如

由〔5〕可得 $A \cup (A \cap A^c) = (A \cup A) \cap (A \cup A^c)$

由〔6〕、〔13〕得 $A \cup \phi = (A \cup A) \cap S$

由〔8〕得到 $A \cup \phi = A$

由〔7〕得到 $(A \cup A) \cap S = A \cup A$

由〔9〕，〔13〕得 $A \cup A = A$

等等。

问题4 问题1的事件中补加一个事件

$C =$ 丙去学校

时，下边的事件中去学校的有几个人？

(1) $A \cap (B \cup C)$ (2) $A \cup (B \cup C)$ (3) $(A \cup B)^c \cup C$

问题5 问题2的事件中补加一个事件

$C =$ 开关C发生故障

时，设所考虑这套设备的A，B，C三个开关中有两个或两个以上正常工作，则这套设备就能运转。以下哪一个情况设备能正常运转？

(1) $A^c \cap (B \cap C^c)$ (2) $A^c \cup (B \cap C)$ (3) $A \cap (B^c \cup C^c)$

问题6 问题3的事件中补加事件

$C =$ 操纵使用正确

时，试用事件及运算的符号表达“操纵设备与机器都不正常，但操纵使用正确”的事件。

问题7 证明以下关系式成立。

(1) $A \cup B = [A - (A \cap B)] \cup B$

$$(2) (A \cup B)^c \cap C = A^c \cap B^c \cap C$$

1.1.3 不相容事件 A 、 B 二事件有

$$A \cap B = \phi$$

的关系时，称 A 与 B 是不相容事件。换句话说，是样本空间中
没有包含两个事件对应子集的共同元素的情形。

例 4 样本空间 S 表示成 (2)。事件 A 、 B 是

A = 出现偶数点

B = 出现奇数点

时， $A \cap B = \phi$ ，所以 A 与 B 是不相容的。事实上

$$A = \{E_2, E_4, E_6\}$$

$$B = \{E_1, E_3, E_5\}$$

样本空间中并没有包含 A 、 B 的共同元素。

问题 8 从装有 3 个红球 4 个黑球的罐子里依次任意取出
二球，令三个事件是

A = 第一次取出红球，第二次是黑球

B = 两次取出同样颜色的球

C = 两次都是红球

A 与 B ， A 与 C ， B 与 C 中哪两个是不相容的？

1.1.4 事件的分枝图示 有 100 圆与 50 圆两枚日本硬币，
从中取一个掷出， H 表示出现正面， T 表示背面。(100, H) 表
示取 100 圆硬币掷出正面的事件，则此试验的样本空间是

$$S = \{(100, H), (100, T), (50, H), (50, T)\}$$

这可表示如图 1.1。

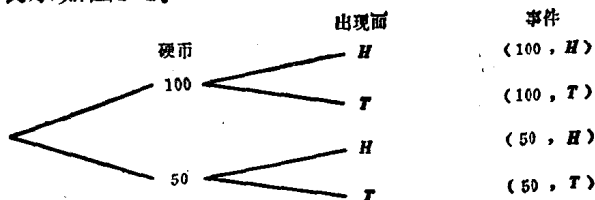


图 1.1

象这种将样本空间用分枝图表示出来；叫作事件的分枝图
示。

例5 有两个罐，第一个里装4个红球(R)，2个白球(W)。第二个罐里装R 1个、W 3个。开始先任取一个罐，再从中依次取两个球，这种试验的样本空间的分枝图 示如图1.2。

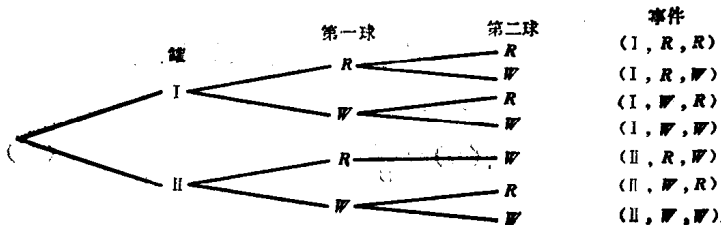


图 1.2

习 题 1.1

- 某人衣袋中装100圆、50圆、10圆、5圆（日圆）硬币各一枚。写出他连取两枚硬币时，产生的样本空间。
- 1中衣袋内装的硬币是100圆2枚，50圆，10圆各1枚，5圆2枚时，样本空间如何？
- 1中取出的2枚硬币掷出后，正面、背面分别记为H、T，样本空间的点当掷100圆出正面时记成(100, H)，试写出样本空间的一切点。
- 掷红蓝两个骰子的试验的样本空间中
事件A= 两个点数和在9以上
事件B= 至少有一个骰子点数为6
时，说明 $A \cup B$, $A \cap B$ 都是由多少点数的情况构成的？
- 就4中两个事件，说明事件间关系〔1〕到〔15〕成立。
- 掷一枚硬币，到连续出现两次同一面就停止，又到连续5次出现同一面就停止时，各写出样本空间。
- 掷一枚骰子，进行到连续出现两次同一点数时停止，又到连续

6 次出现同一点数时停止。写出各个样本空间。

1.2 概 率

1.2.1 概率 设样本空间 S 是

$$S = \{E_1, E_2, \dots, E_n\},$$

由 n 个元素构成。考虑这 n 个元素中任一个发生的可能性都相同的情形（或称等可能的情形）。

我们关心的事件 A 由 S 中的 m 个 ($m \leq n$) 个元素构成时， A 的概率（或者 A 发生的概率）定为

$$p_r(A) = \frac{m}{n}, \quad (1)$$

$p_r(A)$ 表示 A 的概率。

由此定义可知，由 n 个等可能发生的元素构成 S 时，事件 A 的非 A^c 的概率是

$$P_r(A^c) = \frac{n-m}{n} = 1 - P_r(A) \quad (2)$$

例 1 随机数骰子是在正 20 面体每个面上适当地标上 0, 1, 2, ..., 9 中的一个，每个数字各标在两个面上。这 10 个数字各有 $\frac{1}{10}$ 的出现概率。

例 2 随机数骰子中规定事件

$$A = \{0, 2, 4, 6\}$$

即出现这 4 个点数之一的事件，则 $P_r(A) = \frac{4}{10}$ 。

例 3 从装有 A 公司制造的 4 个半导体收音机， B 公司制造的 3 个半导体收音机的箱子里，随手取两个半导体收音机

1) p_r 是概率 Probability 的头两个字母。

时, 求两个都是A公司制造的概率。

【解】 从全部 $4 + 3 = 7$ 个中取两个的组合数是 C_7^2 ⁽¹⁾
 $= \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$ 。两个都是A公司制造的组合数为 $C_4^2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$ 。

21种组合都是等可能的, $n = 21$ 。两个都是A公司制造的事件是其中的6种。故所求的概率为 $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$ 。

象这样确定概率值, 当样本空间 S 由等可能发生的基本事件构成时是可以的, 但许多试验不一定有这样的条件。

现在试考虑一下明天的天气。样本空间是

$$S = \{F, F^c\}$$

由两个元素构成, 它们的意义是

F = 是晴天, F^c = 不是晴天

然而, 能说这两个事件有等可能性吗? 确是 $n = 2$, 对应晴天的事件是 F , $m = 1$, 但由此就确定

$$P_r(F) = \frac{1}{2}$$

是不行的。因为 F 与 F^c 二者不能说是等可能的。

关于天气而言, 今天晴, 晚霞也很美。看一下天气图, 气压分布没有变动的趋势, 属高压范围。预报也如此。于是 $P_r(F)$ 应该接近于1。其次反过来, 今天的雨时下时停, 天气图上不连续线满粘在一起不动。天气预报是雨, 于是 $P_r(F)$ 将近于0。如果天气易变, 什么判断也作不出来, 晴否各占一半, 于是可取 $P_r(F) = \frac{1}{2}$ 了。这不是由于有 F 与 F^c 两种情况,

而是由于二者哪一方都有同样的可能性。所以在保证不了有等

1) C_n^m 表示从 n 个中物体取 m 的组合个数, 有时也用 $\binom{n}{m}$ 或 ${}_nC_m$ 表示。——

可能性的时候，或者更进一步偏向某一方可能性大时，就不能说 $P_r(F)$ 的值是 $\frac{1}{2}$ 了。

再如，有一套机器突然停止运转。假设原因是 A, B 两个开关中某一个失灵造成的。让新来的机修工去修理。主任知道，至今为止，每 4 次出故障中有 3 次是由 A 出故障造成的。新工人不知道这一情况。样本空间

$$S = \{A, B\}$$

由两个元素形成，即 $A = A$ 开关出故障， $B = B$ 开关出故障两个基本事件。可是二者是否是等可能的呢？

主任认为 $P_r(A) = 3/4$ ， $P_r(B) = 1/4$ ，是靠过去经验得到的。然而，新工人没有这种经验， A, B 哪一个质量差些不清楚，只好一半一半地判断 $P_r(A) = P_r(B) = \frac{1}{2}$ 。这也是把 A, B

双方考虑成等可能的判断。主任则由 A 的故障次数是 B 的 3 倍，得到 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{1}{4}$ 这两个值的。

不论哪种情况，确定 $P_r(F)$ 与 $P_r(A)$ 时，由 $n=2$ ， $m=1$ 还不能说概率是 $\frac{1}{2}$ 。这时要根据各种各样的情报来确定概率的值。

象这样， r 次试验中事件 A 发生 k 次时，频率 $\frac{k}{r}$ 当 r 增大接近于 A 的概率 $P_r(A)$ 。 r 愈大愈接近于 $P_r(A)$ ，由这一趋向可经验地定义概率，即

$$\frac{k}{r} \rightarrow P_r(A) \quad (3)$$

概率用 (1) 的观点和 (3) 的观点来定义都可以，所以概率的值用哪种观点来定都行”。

1) 按：(1) 是古典定义，(3) 是统计定义，二者前提不同，后一情况一般不能用前一情况代替。——译者