工程结构优化设计基础

程耿东

水利电力出版社

工程结构优化设计基础

程耿东

水利电力出版社

工程结构优化设计基础
程耿东
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
水利电力印刷厂印刷
*
850×1168毫米 32开本 9印张 236千字
1984年3月第一版 1984年3月北京第一次印刷
印数 00001—11640册 定价1.15元
书号 15143·5326

内 容 提 要

本书着重介绍工程结构优化设计的基本概念和常用方法。在较全面地叙述准则法和规划法的同时，也注意了反映该领域在当前国内外的新动向。

全书共分五章：结构优化的基本概念；准则设计法；数学规划法；线性规划与二次规划；数学规划法和准则法的结合。

本书可供土建、水利、航空、机械和造船等专业的工程技术人员参考或作为短训班教材之用；也可供高等院校上述专业（也包括力学专业）高年级学生和研究生作教材之用。

本书是与钱令希教授的专著《工程结构优化设计》（1983年3月水利电力出版社出版）相配合的，可为阅读该书的读者提供基础知识。

前　言

结构优化设计是计算力学的一个分支，它致力于研究系统地和高效率地改进结构设计的方法，以达到帮助工程结构设计人员设计出既经济又可靠的工程结构的目的。

本书着重介绍工程结构优化设计的基本概念、理论和常用方法，并充分注意反映最近几年来国内外结构优化研究的新成就和新动向。全书共分五章：结构优化的基本概念；准则设计法；数学规划法；线性规划与二次规划；数学规划法和准则法的结合。各章均有许多例题，其中部分选材于书末参考文献。每章的最后还附有少量习题。章节的这种安排是为了较全面地向读者介绍结构优化中的两大方法：规划法和准则法。在叙述准则法时力争突出这个方法的数学基础，在介绍规划法时着重强调那些在结构优化中常用的方法，并逐步引导读者注意这两个方法的结合。在内容取舍上还注意到和钱令希教授的专著《工程结构优化设计》相配合，尽可能提供学习该专著所需的基础知识。

不仅仅在本书撰写过程中，而且在笔者近年来学习和研究计算结构力学的过程中，钱令希教授一直给予悉心的指导和热诚的鼓励。本书内容的安排参考了1979年钱令希教授为大连工学院工程力学研究所研究生班开设该课程时的提纲。在修改书稿的过程中，孙焕纯副教授抽出了宝贵的时间对书稿进行了仔细的审阅，提出了许多宝贵的意见。隋允康、李兴斯同志对本书的内容亦提供了一些见解。笔者在此向钱令希教授、孙焕纯副教授、隋允康和李兴斯同志表示衷心的感谢。

作者

1983年２月

目　录

前　言
第一章　结构优化的基本概念 ……………………………………1
　第一节　设计变量、约束条件和目标函数 ……………………1
　第二节　结构优化问题的几何表示和凸性 ……………………7
　第三节　求解结构优化问题的途径 ……………………………12
　习题 ………………………………………………………………18
第二章　准则设计法……………………………………………20
　第一节　同步失效准则设计 ……………………………………20
　第二节　满应力设计及其推广 …………………………………26
　第三节　受约束最优化问题的库-塔克必要条件………………48
　第四节　受到单个位移约束的优化准则 ………………………67
　第五节　基于最优准则的迭代法 ………………………………74
　第六节　结构反应的灵敏度分析（梯度表达式） ……………84
　第七节　多工况、多约束下的优化准则法 ……………………98
　习题 ………………………………………………………………117
第三章　数学规划法 ……………………………………………120
　第一节　数学规划问题的分类及解法…………………………120
　第二节　基本的下降算法、收敛速度和停止迭代准则………123
　第三节　一维搜索………………………………………………129
　第四节　无约束优化的单纯形法………………………………137
　第五节　无约束优化的梯度算法………………………………143
　第六节　求解受约束非线性规划的原方法……………………155
　第七节　序列无约束优化方法…………………………………179
　习题………………………………………………………………200
第四章　线性规划与二次规划 …………………………………202
　第一节　标准的线性规划问题提法……………………………202
　第二节　线性规划的基本性质…………………………………207

第三节　单纯形法……214
第四节　序列线性规划算法(SLP)……226
第五节　二次规划……235
习题……248
第五章　数学规划法和准则法的结合……249
第一节　序列近似规划……250
第二节　对偶规划……255
第三节　序列近似规划的对偶算法与原算法……269
第四节　提高结构优化效率的一些实际考虑……273
习题……278
参考文献……278

第一章　结构优化的基本概念

在生产和生活中，需要建造各式各样的结构物，例如航天的宇宙飞船；横渡重洋的万吨巨轮；水利工程中的闸、坝、厂房；人们居住的高楼大厦等等。设计这些结构时，工程师们除了应当考虑这些结构的基本效能外，总是希望把它们设计得尽可能地"优"。从这个意义上看，对工程师们来说，结构优化并不是一个陌生的课题。可是，要作出"优化"设计，必须先掌握"分析"设计的手段，一个实际结构物的分析常常需要复杂、冗长的计算。长期以来，由于缺乏高速的计算工具来进行结构分析，也由于缺乏系统的方法指导结构设计和改进结构设计，结构的优化是依靠人们世世代代累积起来的经验，以进化的方式缓慢地进行。六十年代以来，电子计算机的出现，有限元方法和数学规划理论的发展，使得人们不仅有了强大的结构分析工具，而且有了一套系统的方法来改进设计和优化设计。结构优化设计这一领域就得到了迅速发展，成为计算力学的一个重要分支。

第一节　设计变量、约束条件和目标函数

一个结构物的"优"和"劣"，总是以某一指标来衡量的，这个指标就是结构优化设计问题的**目标函数**。随问题的不同，目标函数可以很不相同。航空工业中的飞行器，一般地说，重量便是目标函数。我们希望一个飞行器设计得尽可能轻，如果飞行器设计得太重，不仅仅是消耗燃料多，每次使用时花钱多，而且可以使飞行器飞不到要求的高度和速度，从根本上损害这个设计；土木工程中的楼房，建造成本常常比重量更重要，因而目标函数通常取成成本；机械工业中的许多零部件设计，常常是以应力集

中系数为目标函数，因为降低了应力集中，结构的抗疲劳和断裂能力就可提高，结构的使用寿命也就得到延长；还有一些实际问题，我们同时要实现数个目标优化，这类问题称为**多目标优化**。

为了使结构设计得尽可能优，工程师们总是掌握一些设计参数，通过适当地调整它们来改进设计。例如，设计一个飞机的机身时蒙皮的厚度和横隔框的刚度均可以由设计人员在一定范围内调整；再如，一个拱桥的拱圈厚度和拱的高度，一个拱坝的上游面曲线形状和坝体厚度，也属于可调整之列。这一类可以由设计人员调整的参数称为**设计变量**。前面提到的目标函数就是以设计变量为变量的函数。与设计变量相对，一个结构的设计中，总存在一部分不允许修改的参数。例如，一个高层建筑的层高、层数和使用面积，一个飞行器将采用材料的许用应力、弹性模量等就都是给定的。这些量，称为**指定参数**。在结构设计中，除了设计变量和指定参数之外，还有一类**性态变量**，例如结构在给定荷载作用下的应力、位移，结构的自振频率、失稳临界荷载等，这类变量的特点是设计人员不能直接控制、修正它们，只有通过修改设计变量才能改变它们，它们也是设计变量的函数，但是这种函数关系往往是隐式的。

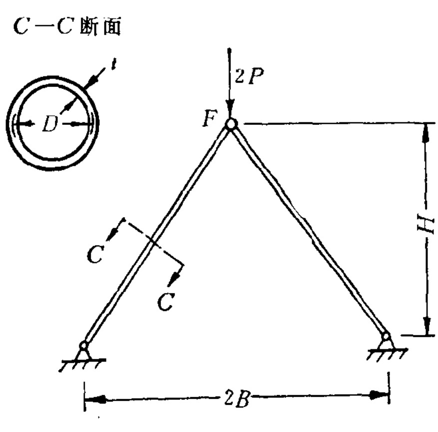

图 1-1

工程师虽然对设计变量可以进行修改和调整，但是这种修改和调整是受到各种各样限制的。例如，为了减少机翼重量而降低蒙皮厚度时，不允许蒙皮内的应力超过许用应力；再如，减少桁架式吊车梁中的杆件断面积时，不应该使吊车梁刚度降低过多而导致挠度太大。

这些对设计变量的限制统称为**约束条件**。

这样，结构优化设计的任务就是对于一个工程结构，寻求设计变量的最优值，既满足约束条件又使目标函数最优。下面举例说明设计变量、约束条件和目标函数等基本概念并进一步讨论它们。

例题 1：考虑如图1-1所示两杆平面桁架，元件是在F点铰支的钢管。在F点结构受到垂直荷载$2P$。约定管壁厚度固定为t，半跨长度固定为B。设计的要求是选择管子的平均直径D和桁架的高度H以达到重量最小。要求这些杆子既不发生塑性变形又不失稳。给定外载$P=15000kg$，$B=75cm$，$t=0.25cm$，材料的弹性模量$E=2.1\times10^6 kg/cm^2$，比重$\rho=0.0078kg/cm^3$，屈服应力$\overline{\sigma}=7030kg/cm^2$。由于制造的原因，对于$D$和$H$有最大值、最小值的限制，它们是$\underline{D}=3.0\,cm$，$\overline{D}=6.5cm$，$\underline{H}=40cm$，$\overline{H}=75cm$（以后我们用字母下的横杠表示该字母所代表的量的下界，字母上的横杠表示相应量的上界）。

该问题中的指定参数为B、t、E、ρ、$\overline{\sigma}$、$\underline{D}$、$\overline{D}$、$\underline{H}$和$\overline{H}$，而设计变量为D和H。该问题的目标函数是结构的重量，它可表成：

$$W=2\pi\rho Dt(B^2+H^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

设计受到的约束条件为：

1）圆管杆件中的压应力应该小于或等于压杆稳定的临界应力，即

$$\frac{P(B^2+H^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi tDH}\leqslant\frac{\pi^2E(D^2+t^2)}{8(B^2+H^2)} \tag{2}$$

2）圆管杆件中的压应力应小于或等于材料的屈服应力$\overline{\sigma}$，即

$$\frac{P(B^2+H^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi tDH}\leqslant\overline{\sigma} \tag{3}$$

3）管子的平均直径D和桁架的高度H受到尺寸上、下界的限制，即

$$\underline{D}\leqslant D\leqslant\overline{D} \tag{4}$$

$$\underline{H}\leqslant H\leqslant\overline{H} \tag{5}$$

归纳起来，问题可以提成：

求最优的D和H，使目标函数最小，

即　　$$\min \quad W=2\pi\rho Dt(B^2+H^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{受到约束：}\ \frac{P(B^2+H^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi tDH}\leqslant\frac{\pi^2E(D^2+t^2)}{8(B^2+H^2)}\\
&\frac{P(B^2+H^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi tDH}\leqslant\overline{\sigma}\\
&\underline{D}\leqslant D\leqslant\overline{D}\\
&\underline{H}\leqslant H\leqslant\overline{H}
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

如果将前面给出的指定参数代入这些公式中，可以把问题写得更具体些。

例题 2：假定梁在$x=\pm l$处简支（见图1-2），梁因受到分布荷载$P(x)$而发生弯曲，挠度记为$y(x)$。梁的材料性质、梁的长度$2l$和它的体积V均是给定的。要求确定最优的梁的断面积分布$A(x)$，使梁的中点的挠度尽可能地小。

由问题的提法可看出，该问题的设计变量是断面积$A(x)$，目标函数是梁中点的挠度，约束条件可归纳为二个：其一是制作梁的材料体积应为V；其二是梁中点的挠度应当和外载$P(x)$、梁的断面积$A(x)$及梁的材料性质通过材料力学中建立的物理关系联系起来。下面我们写出这个问题的数学形式。

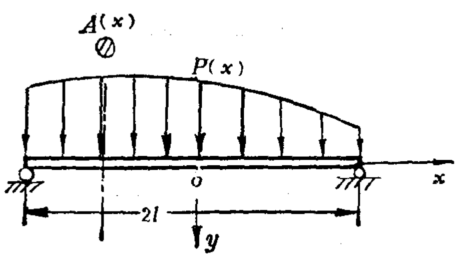

图 1-2

取如图1-2所示坐标轴ox，梁的挠度$y(x)$向下为正，中点挠度用$y(0)$表示，梁的体积可以由梁的断面积$A(x)$沿梁长积分求得，

即　　$$V=\int_{-l}^{l}A(x)dx\qquad(1)$$

这个问题可以写成：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{求断面积}A(x),\ -l\leqslant x\leqslant l,\ \text{使}y(0)\text{最小，}\\
&\text{并满足约束条件}\quad \int_{-l}^{l}A(x)dx=V
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

其中，挠度$y(x)$和断面惯性矩$J(x)$通过梁的微分方程相联系，微分方

程的边界条件是在$x=\pm l$处，梁的挠度$y(x)$及弯矩$M(x)$应该为零：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\left[EJ(x)\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}\right]=P(x) \\ y(x)\Big|_{x=\pm l}=0, \quad M(x)\Big|_{x=\pm l}=EJ\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}\Big|_{x=\pm l}=0 \end{cases} \tag{3}$$

为了使问题确定起见，还应该在断面积$A(x)$和惯性矩$J(x)$之间建立一个关系，即如果规定梁的断面形状沿梁长是相似变化的，则有：

$$EJ(x)=E\alpha A^2(x)$$

式中　E——弹性模量；

α——依赖于断面几何形状的给定常数。

在建立了目标函数、约束条件和设计变量这三个基本概念的基础上，我们再介绍一下与这些概念有关的结构优化中常用名词与概念：

1.分布参数结构优化与集中参数结构优化

在例题1中，设计变量是两个描写结构尺寸的变量D和H，或者用向量的语言，设计变量是一个二维向量❶$(D\ \ H)^T$。一般情况下，设计变量可以是n个变量x_1，x_2，……，x_n。为了叙述方便，通常用一个列向量$\boldsymbol{x}$来代表这n个变量，$\boldsymbol{x}=(x_1x_2\cdots\cdots x_n)^T$。这一类设计变量是有限维向量的优化问题称为**集中参数的结构优化**问题。在例题2中，设计变量是一个描写材料在空间分布的函数，相类似的优化问题称为**分布参数的结构优化**问题。当然，在很多条件下，对分布参数的结构优化问题，总是先用有限元法对所研究的力学模型加以离散化，然后优化离散化的力学模型。以例2为例，我们可以先将梁分成n个有限单元，认为每个单元内面积为常数。设计变量就是由这n个单元的面积组成的向量。问题近似化归为一个集中参数的结构优化问题。但是，近期分布参数优化理论研究的新成果说明，的确存在一些情况，使离散化进行优化得到的结果并不足以反映原问题的特点。

2.设计变量的层次

---

❶ 本书中凡提到向量，均指列向量。为了节省篇幅，一律写成行向量的形式，并在其右上方加上转置记号T。

在上面的二个例题中，设计变量D和$A(x)$都是描写杆件横断面尺寸的，类似性质的设计变量还有板的厚度、膜的厚度，这类变量是目前研究较多、处理比较容易的；进一步，设计变量还可以是表示结构几何形相的，例如，一个桁架中的各个节点的位置可以取成设计变量。例1中的设计变量H就属于这样的一类设计变量；更高一级的设计变量是结构的拓扑，例如，给定了一个桁架的节点布置，优化设计的任务可以是确定哪些节点之间应该有杆件相连；最后，结构类型也可以成为设计变量，例如，为了传递一组荷载到支承上，可以在拱、梁和桁架等不同结构物中进行优选。十分明显，随设计变量的层次的升高，优化所得结构的效率也会提高，但相应地，优化的难度和工作量会增加很多。

3.离散设计变量和连续设计变量

在例1中，圆管的直径D允许取从2.0cm到7.0cm之间的任意值，例如，可以取2.132cm，这样一种设计变量称之为**连续设计变量**。生产实际中，圆管都是从工厂中成批按国家规格生产的，其直径也许只有在2.0、2.5、3.0……等有限个不同的尺寸中进行选择，这样的变量称为**离散设计变量**。

4.约束条件

结构优化时受到的约束条件可以分成两类。第一类是直接加在设计变量上的**尺寸约束**。如前面对H和D的约束，例1式(4)和(5)。这种尺寸上的约束往往来源于工业生产中工艺技术上的要求，例如，按照现有的生产能力，不可能生产太细或太粗的管子。由于这类约束是直接加在设计变量上，所以往往是以**显式**出现的，比较容易处理；另一类约束是加在结构性态变量上的，例如加在结构节点位移、杆件应力、结构自振频率和结构失稳临界力上的约束，称为**性态约束**。例1中的(2)和(3)式，即分别对杆件临界力和应力的约束，就是性态约束。在这个例子中，由于结构物十分简单，可以求出结构在外荷载下的应力及结构稳定临界荷载的显式，因此约束是**显式**的。在一般情况下，结构的性态变量都以**隐式**依赖于设计变量，它们之间的关系要通过求解

结构静力学或动力学方程求得，需要十分昂贵的结构分析。事实上，隐式约束是结构优化设计中的最大困难之一。

对性态变量和设计变量所加的约束绝大部分以不等式形式出现，称为**不等式约束**。但是也有一部分约束是以等式形式出现的，如例题 2 中的式（2）就是一个**等式约束**。一般地说，两类约束都可能存在。

本书将研究集中参数的结构优化问题，根据上面介绍的设计变量和约束条件表示方法，集中参数的结构优化问题可以提成：

$$\left.\begin{array}{l} \text{求设计变量}\boldsymbol{x}，\boldsymbol{x}=(x_1\ x_2\cdots\cdots x_n)^T， \\ \qquad\qquad \min \qquad f(\boldsymbol{x}) \\ \text{受到约束}\ h_j(\boldsymbol{x})\leqslant 0，j=1，2，\cdots\cdots，J \\ \qquad\qquad g_k(\boldsymbol{x})=0，k=1，2，\cdots\cdots，K \end{array}\right\} \quad (1\text{-}1)$$

在工程结构优化问题中，约束$h_j(\boldsymbol{x})$和$g_k(\boldsymbol{x})$往往是非线性的。这种非线性构成求解的主要困难，因而设法把这些约束线性化就变得很重要。

第二节　结构优化问题的几何表示和凸性

集中参数的结构优化设计问题中，设计变量可以用向量来表示，通常把它记作$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}=(x_1\ x_2\cdots\cdots x_n)^T$。如果建立一个$n$维空间，这个空间中的每一个座标轴代表了一个设计变量，则一个设计$\boldsymbol{x}$可以用这个空间中的一个点来表示。这样的空间称为**设计空间**。例如图1-3所示三杆桁架，有三个设计变量，设计空间就是三维空间。通常，设计变量的个数远大于三个，设计空间就是一个高维空间。虽

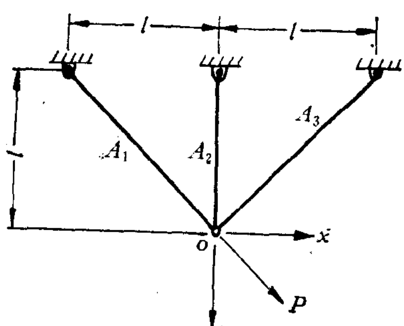

图 1-3

然高维空间的概念比较抽象，但建立在二维、三维空间上的很多几何概念可以很容易地推广到高维空间中去。

在设计空间中，$f(\boldsymbol{x})=c$、$g_k(\boldsymbol{x})=c$及$h_j(\boldsymbol{x})=c$（见公式1-1），其中c为常数，代表一些曲面。特别，目标函数$f(\boldsymbol{x})=c$的曲面称为**目标函数等值面**；$h_j(\boldsymbol{x})=0$和$g_k(\boldsymbol{x})=0$的曲面称为**约束曲面**。等式约束的几何意义是要求设计点落在这个约束曲面上。在本书的以下章节，为了叙述简洁起见，一般不考虑等式约束。这是因为从理论上来说，一个等式约束$g_k(\boldsymbol{x})=0$等价于两个不等式约束：$g_k(\boldsymbol{x})\geqslant 0$和$g_k(\boldsymbol{x})\leqslant 0$。当然，实际求解时等式约束和不等式约束应该采用不同的处理方法，差别还是很大的。

对于最优设计问题（1-1），工程师可以根据经验提出一个初步设计方案$\boldsymbol{x}^{(0)}$，如果它满足所有的约束条件，则称这个设计是**可行的**；反之，如果它违反其中的一个约束，则称为**不可行设计**。对于工程师们来说，能得到最优设计是最好了，得不到最优的，也希望得到一个可行的设计。所有可行设计点的集合构成**可行域**。显然，可行域的边界是由约束曲面$h_j(\boldsymbol{x})=0$包围而成的。图1-4在二维设计空间里给出约束曲面、可行域的几何表示。构成可行域边界的这一段一段的约束曲面的总体，我们称为**复合约束曲面**。

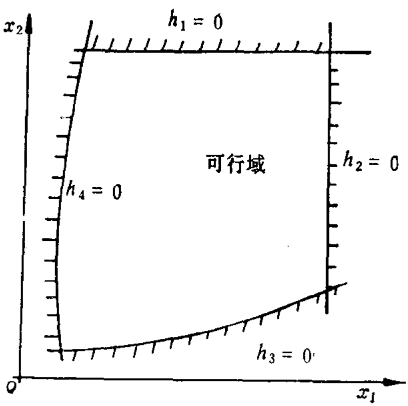

图 1-4

最优设计问题（1-1）的可行解$\boldsymbol{x}^*$称为局部最优解，如果在$\boldsymbol{x}^*$的邻近内找不到比$\boldsymbol{x}^*$更优的可行解。拿数学的语言来说，可以定义为：

如果存在一个足够小的正数$\varepsilon>0$，使得对于满足 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*|$ ❶ $\leqslant\varepsilon$ 和所有约束条件的任意一个$\boldsymbol{x}$，都有 $f(\boldsymbol{x}^*)\leqslant f(\boldsymbol{x})$，则称$\boldsymbol{x}^*$是一个局部最优点。例如图1-5的$B$点就是局部最优解。该图中的平行斜线，如$W_B$和 W_C表示的是重量的等值面（线），且 $W_C<W_B$。

如果在可行解$\boldsymbol{x}^*$处的目标值$f(\boldsymbol{x}^*)$比所有可行解的目标值都小（至少不大于），则我们把$\boldsymbol{x}^*$称为最优设计问题（1-1）的全局最优解。例如图1-5中的C点就是一个全局最优解。显然，全局最优解也一定是局部最优解。结构优化的任务当然希望找到全局最优解，遗憾的是只有对凸规划等比较特殊的问题，才容易找到全局最优解，一般情况下，绝大多数最优化算法给出的只是局部最优解。但在实际工作中，如果能把现行的设计改进一大步，工程师们往往就很满意了，至于是否全局最优，这往往只是一个理论问题。

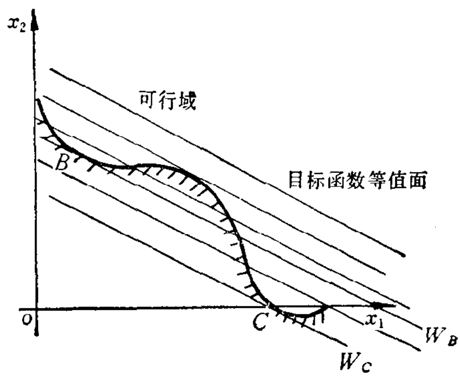

图 1-5

本节介绍的这些几何概念，下一节介绍图解法时还要结合例题进一步具体化。

下面我们再介绍一下凸规划这一个在结构优化中十分重要的概念。为此先引进凸域和凸函数的定义。

凸域：在n维空间中的区域S里，如果取任意两个点$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$，连结这两点的线段也属于区域S，该区域则称为凸域。如图

❶ 符号$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*|$表示点$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{x}^*$之间的距离。用它们的分量来表示，即为：$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*|=[(x_1-x_1^*)^2+(x_2-x_2^*)^2+\cdots\cdots+(x_n-x_n^*)^2]^{\frac{1}{2}}$。

1-6中的(b)就是一个凸域的例子。图1-6中的图形(a)不满足这个性质，则是一个非凸域。

从解析几何的理论可以知道，连结$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$的线段上任意一点$\boldsymbol{x}$可以表示成：

$$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 \tag{1-2}$$

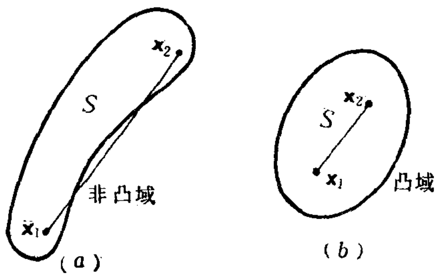

图 1-6

其中，$0\leqslant\alpha\leqslant1$。当$\alpha=0$，$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{x}_2$重合；当$\alpha=1$，$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{x}_1$重合；当$0<\alpha<1$，$\boldsymbol{x}$处于$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$之间。

基于（1-2）式，凸域S的定义也可以表示为对区域S中的任意两个点$\boldsymbol{x}_1$和$\boldsymbol{x}_2$，有：

$$\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2\in S^{❶} \qquad 0\leqslant\alpha\leqslant1$$

与凸域相联系的一个重要概念是凸函数。

凸函数：如果函数$f(\boldsymbol{x})$定义在n维空间的凸域S上，而且对S中的任意二点$\boldsymbol{x}_1$、$\boldsymbol{x}_2$和任意常数α，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，有：

$$f[\alpha\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2]\leqslant\alpha f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_2) \tag{1-3}$$

则$f(\boldsymbol{x})$称为S上的凸函数。

如果我们把上列凸域取成实数轴，$f(x)$是一元函数，作出$y=f(x)$的图形，见图1-7，并在实数轴上任取二点x_1和x_2，定义$y_1=f(x_1)$和$y_2=f(x_2)$，并分别记为$A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$。则对任给的α，$\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$表示界于x_1和x_2间的一个点，$f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]$为该点的函数值，而$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$是连结$A$、$B$的线段在同一点处的纵座标。式（1-3）表示这根$AB$线段应当在曲线$y=f(x)$的上方。如果在（1-3）式中，对于两个不同的$x_1$、$x_2$和任意的$\alpha$，$0<\alpha<1$，小于号是严格满足的，则$f(\boldsymbol{x})$称为**严格凸函数**。反之，如果将（1-3）式中的小于等于号换成大

❶ 符号$\in$表示属于，$\boldsymbol{x}\in S$读作$\boldsymbol{x}$属于S。