

地震勘探数字技术

第三册

科学出版社

地震勘探数字技术

第三册

石油化学工业部石油地球物理勘探局计算中心站
北京地质学院数学系
成都石油地质学院物探系
华东石油地质学院物探系
中国科学院技术大学数学系

编

科学出版社

1977

内 容 简 介

本册主要介绍数字处理中讯息提取技术、迭加技术、偏移技术、全息技术、成像技术、速度分析等方法的基本原理与实践。原定在本册内介绍的亮点技术及程序系统等内容，因篇幅限制，将另成一册，作为第四册出版。

本书可作为大专院校师生和地震勘探及数字处理工作者的参考书。

地 震 勘 探 数 字 技 术

第 三 册

石油化学工业部石油地球物理勘探局计算中心站
北京大学数学力学系系编
成都地质学院物探系系
华东石油学院勘探系系
中国科学院技术大学数学系

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1977年5月第一版 开本：787×1092 1/32
1977年5月第一次印刷 印张：16 1/2
印数：0001—10,650 字数：380,000

统一书号：13031·497

本社书号：737·13—1

定价：1.70元

目 录

第一章 地震理论基础	1
§ 1. 均匀介质中地震波的振幅	1
§ 2. 地震波的反射系数和透射系数	10
§ 3. 层状介质中地震波的振幅	23
§ 4. 地震波的吸收	28
§ 5. 地震波的绕射	32
§ 6. 绕射积分	34
附录一	47
附录二 无限半平面的绕射问题	50
第二章 数值校正	62
§ 1. 一般动校正方法	62
§ 2. 快速动校正	64
§ 3. 自动计算动校正	70
§ 4. 动校正对地震讯号的畸变	86
§ 5. 自动统计静校正	95
§ 6. 相位谱法静校正	108
§ 7. 自动调整静校正(最佳迭加法)	111
附录一 希尔伯特变换	116
附录二 一种瞎子爬山法	124
第三章 速度分析	129
§ 1. 速度概念	130
§ 2. 速度分析准则	137
§ 3. 用迭加方法制作速度谱	146

§ 4. 用相关方法制作速度谱	151
§ 5. 速度谱的显示和参数设计	159
§ 6. 速度谱迭加	168
§ 7. 自适应层速度分析	173
§ 8. 层速度的迭代计算	183
§ 9. 层速度变化规律的确定	199
§ 10. 层速度三维分布规律的确定	211
§ 11. 速度分析方法的适用条件与影响因素	222
第四章 水平迭加	227
§ 1. 水平迭加的原理	227
§ 2. 自适应加权水平迭加	231
§ 3. 时间-深度转换	239
§ 4. 偏移校正	243
§ 5. 应用与实例	254
第五章 偏移迭加	287
§ 1. 共反射点偏移迭加的理论依据	287
§ 2. 共中心点道水平迭加偏移	293
§ 3. 等炮检距道集垂直迭加偏移	302
§ 4. 共炮点道集偏移迭加(一)——输入道观点	314
§ 5. 共炮点道集偏移迭加(二)——输出道观点	320
§ 6. 应用与实例	327
第六章 全息地震	354
§ 1. 单频全息地震	355
§ 2. 反射脉冲全息地震	371
§ 3. 三维偏移迭加	382
§ 4. 富里叶变换脉冲全息地震	387
§ 5. 地震反射象的统一理论	397
附录	410

第七章 自动拾取	415
§ 1. 一维自动拾取(时间域自动拾取)	415
§ 2. 二维自动拾取	424
§ 3. 三维自动拾取	435
§ 4. 地震子波与断层对比	447
附录一 统计判决指标 $P(I, J)$ 的推导	458
附录二 层位对比的另一种统计方法	461
第八章 自动绘图	463
§ 1. 矩形网格法	464
§ 2. 加权平均插值函数	472
§ 3. 加权插值多项式	478
§ 4. 双立方函数	485
§ 5. 网状透视图	496
附 录	519

第一章 地震理论基础

地震理论是研究地震波在地下岩层中传播规律的。一般地震理论可分为地震波运动学和地震波动力学两个部分。

地震波运动学是研究地震波的射线或波前的几何传播规律的,它主要用来解决地震波的传播时间问题;而地震波动力学则主要是研究地震波的能量传播问题。在地震资料数字处理的各种方法中,经常要遇到有关地震波的能量等问题,本章将着重研究地震波的动力学问题。

地震波的动力学特点通常包括地震波的形状、振幅、频谱和地震波的吸收等。关于地震波的形状和频谱,在本书第二册中,已经较为详细地讨论过了,这里不再重述。本章各节将分别讨论地震波的振幅和吸收等特点。其中地震波的振幅在数字处理方法中应用较多,因此本章将主要讨论地震波的振幅特点。

由于地震波的实质是在地下岩层中传播的弹性波,在弹性理论中,弹性波方程是符合弹性波的传播,并能揭露弹性波的本质的客观规律。因此本章将以弹性理论为基础,通过分析弹性波方程的解的方法对地震波动力学进行研究。同时也对目前在地震勘探数字技术中应用较广的绕射积分方法进行必要的讨论。

§ 1. 均匀介质中地震波的振幅

在均匀、各向同性和完全弹性介质中,地震波的传播遵循

下列弹性波方程:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla \theta + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1-1-1)$$

其中 ρ 是介质的密度; λ 和 μ 是介质的弹性系数, 叫做拉梅系数; θ 是体积膨胀系数, 在直角坐标中

$$\theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (1-1-2)$$

其中 e_{xx} 、 e_{yy} 和 e_{zz} 分别表示沿 x 、 y 和 z 方向的线性膨胀系数; u 、 v 和 w 分别是沿 x 、 y 和 z 方向的位移分量; \mathbf{u} 是介质中质点的位移向量

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k};$$

∇ 表示梯度向量算子

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z};$$

∇^2 表示拉普拉斯算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

引入膨胀位移函数 (或标量位) φ 和旋转位移函数 (或向量位) $\boldsymbol{\Psi}$, 根据向量分析可知, 位移向量

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_s, \quad (1-1-3)$$

其中 $\nabla \varphi$ 表示标量位的梯度

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k},$$

表明膨胀位移分量 \mathbf{u}_p ; $\nabla \times \boldsymbol{\Psi}$ 表示向量位的旋度

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\Psi} &= \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

表明旋转位移分量 \mathbf{u}_s 。

把 (1-1-3) 代入 (1-1-1)，得到

$$\rho \nabla \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla^2 \varphi) + \rho \left(\nabla \times \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) - \mu \nabla^2 (\nabla \times \Psi) = 0$$

从上式可以得到下面两个独立的波动方程

$$\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi \quad (1-1-4)$$

和

$$\rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \Psi. \quad (1-1-5)$$

上面的两个波动方程分别表示纵波 (或 P 波) 和横波 (或 S 波) 运动的传播。如果把上面的两个波动方程化成标准形式，则得到

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \varphi \quad (1-1-6)$$

和

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \Psi, \quad (1-1-7)$$

其中 $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ 和 $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ，它们分别表示纵波和横波在介质中的传播速度。

在地震勘探中主要利用的是纵波，因此将着重研究纵波波动方程 (1-1-6) 的解。

下面利用求解纵波波动方程 (1-1-6) 的方法，来讨论地震波的振幅。

如果介质是均匀、各向同性和完全弹性的，在介质中有一个球形膨胀震源 o (例如，在均匀的岩性中，用球形炸药包爆炸)，由于这种震源在介质中所产生的压力脉冲是沿径向的并对震源是对称分布的，因此由它所形成的质点位移只有膨胀

位移分量 u_p , 这时在介质中只有纵波传播, 因而满足波动方程 (1-1-6)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \varphi.$$

上式在震源附近, 弹性波还必须满足近震源条件.

在震源 o 附近取一个半径为 a 的小球形空腔, 爆炸所产生的压力脉冲 $p(t)$ 均匀地作用在球形空腔的内部表面上 (图 1.1). 根据应力的连续性, 这时在球形空腔的内外表面上的正应力应该相等. 在直角坐标系中, 我们知道正应力与形变

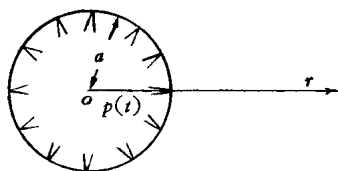


图 1.1

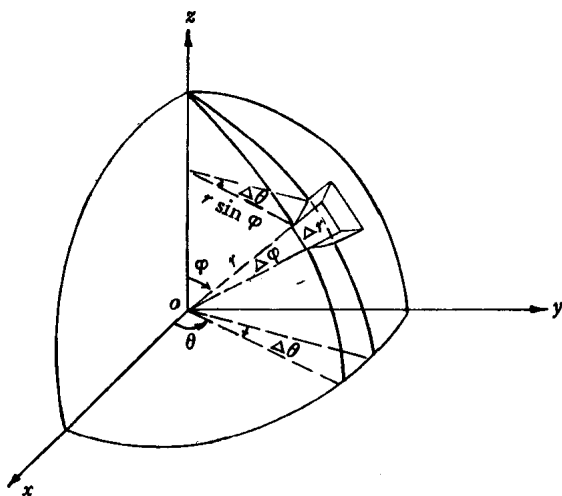


图 1.2

之间存在着下述关系

$$p_{xx} = \lambda\theta + 2\mu e_{xx},$$

$$p_{yy} = \lambda\theta + 2\mu e_{yy},$$

$$p_{zz} = \lambda\theta + 2\mu e_{zz},$$

其中 p_{xx} 、 p_{yy} 和 p_{zz} 分别表示沿 x 、 y 和 z 方向的正应力； e_{xx} 、 e_{yy} 和 e_{zz} 分别表示沿 x 、 y 和 z 方向的线性膨胀系数(膨胀为正,压缩为负),它们分别等于该方向的位移分量沿该方向的变化率 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial z}$ 。

由于在所讨论的问题中,应力和形变都是对震源呈球形对称的.在这种情况下采用球坐标比较方便.这时沿径向的正应力与形变的关系可以写成

$$p_r = \lambda\theta + 2\mu e_r$$

其中体积膨胀系数按照定义应为

$$\begin{aligned} \theta &= \lim_{\Delta V_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta V - \Delta V_0}{\Delta V_0} \\ &= \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta \theta \rightarrow 0 \\ \Delta \varphi \rightarrow 0}} \frac{(r+u_r)^2(\Delta r + \delta r) \sin \varphi \Delta \theta \Delta \varphi - r^2 \Delta r \sin \varphi \Delta \theta \Delta \varphi}{r^2 \Delta r \sin \varphi \Delta \theta \Delta \varphi}, \end{aligned}$$

其中 u_r 是沿径向的位移; δr 是 r 与 $r + \Delta r$ 两点处径向位移之差, $\delta r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \Delta r$. 由于 $u_r \ll r$, $\frac{\partial u_r}{\partial r} \ll 1$ 和 $\delta r \ll \Delta r$, 对上式化简并略去高次项得到

$$\theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r},$$

另外径向膨胀系数按照定义应为

$$e_r = \frac{\delta r}{\Delta r} = \frac{\partial u_r}{\partial r}.$$

于是得出径向压力与形变之间的关系,并在球形空腔的表面

上,得到应力连续条件

$$p(t) = - \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda \frac{u_r}{r} \right]_{r=a}. \quad (1-1-8)$$

考虑到纵波速度 $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ 及拉梅系数 λ 、 μ 和杨氏模量 E 、泊松比 σ 之间的关系

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)},$$

可以把应力连续条件写成

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2\sigma}{1 - \sigma} \frac{u_r}{r} \right)_{r=a} = - \frac{p(t)}{\rho \alpha^2}. \quad (1-1-9)$$

由于质点的运动是单纯地膨胀并且其位移都是沿径向的,我们有

$$u_r(r) = \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

代入(1-1-9),得到一个近震源的边界条件

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2\sigma}{1 - \sigma} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} = - \frac{p(t)}{\rho \alpha^2}. \quad (1-1-10)$$

现在把位移 $\varphi(r, t)$ 和压力 $p(t)$ 分别用它们的谱

$$\Phi(r, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(r, t) e^{-i\omega t} dt, \quad (1-1-11a)$$

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(r, \omega) e^{i\omega t} d\omega; \quad (1-1-11b)$$

和

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (1-1-12a)$$

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1-1-12b)$$

来表示. 把(1-1-11b)代入波动方程(1-1-6)中,得到位移 $\varphi(r, t)$ 的谱函数 $\Phi(r, \omega)$ 的方程

$$\nabla^2 \Phi + k_a^2 \Phi = 0, \quad (1-1-13)$$

其中 $k_a = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{2\pi}{\lambda}$ 是地震波的圆波数。

另外把 (1-1-11b) 和 (1-1-12b) 代入边界条件 (1-1-10) 中, 得到用位移位的谱函数 $\Phi(r, \omega)$ 表示的边界条件

$$\left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{2\sigma}{1-\sigma} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right)_{r=a} = - \frac{P(\omega)}{\rho\alpha^2}. \quad (1-1-14)$$

现在来求满足方程 (1-1-13) 和边界条件 (1-1-14) 的解。

显然这时满足方程 (1-1-13) 的解, 应表示向外传播的球面波, 利用分离变量法, 得出谱函数 $\Phi(r, \omega)$ 具有如下的形式:

$$\Phi(r, \omega) = A(\omega) \frac{e^{-ik_a r}}{r} \quad (1-1-15)$$

其中的 $A(\omega)$ 表示球面波在 r 为单位距离处的振幅, 把上式代入边界条件 (1-1-14) 中, 得出

$$\begin{aligned} A(\omega) \frac{e^{-ik_a a}}{a^3} \left[-k_a^2 a^2 + ik_a \frac{2(1-2\sigma)}{1-\sigma} a + \frac{2(1-2\sigma)}{1-\sigma} \right] \\ = - \frac{P(\omega)}{\rho\alpha^2}, \end{aligned}$$

如果令 $Q = \frac{2(1-2\sigma)}{1-\sigma}$, 求出

$$A(\omega) = - \frac{P(\omega) a^3 e^{ik_a a}}{\rho\alpha^2 (-k_a^2 a^2 + ik_a a Q + Q)}.$$

把上式中的 $A(\omega)$ 代入 (1-1-15), 即可得到谱函数

$$\Phi(r, \omega) = - \frac{P(\omega) a^3 e^{-ik_a(r-a)}}{\rho\alpha^2 (-k_a^2 a^2 + ik_a a Q + Q) r}. \quad (1-1-16)$$

再把上式的谱函数 $\Phi(r, \omega)$ 代入 (1-1-11b) 中, 并考虑到 (1-1-12a), 最后求得满足波动方程 (1-1-6) 和边界条件 (1-1-10) 的解为

$$\varphi(r, t) = - \frac{a^3}{2\pi r \rho \alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\tau) e^{-i\omega\{t - [t - \frac{r-a}{\alpha}]\}}}{-k_a^2 a^2 + ik_{\alpha a} Q + Q} d\tau d\omega. \quad (1-1-17)$$

上面的波动方程的解 $\varphi(r, t)$ 与震源的压力脉冲 $p(t)$ 的函数形式有关。对于爆炸所产生的压力脉冲可以近似地表达为

$$p(t) = \begin{cases} p_0 e^{-bt}, & (b > 0) t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (1-1-18)$$

如果把这个压力脉冲函数代入 (1-1-17) 就可求出:

$$\begin{aligned} \varphi(r, t) = & \frac{p_0 a}{\rho r [m^2 + (n-b)^2]^{1/2}} \left\{ \frac{e^{-bt_r}}{[m^2 + (n-b)^2]^{1/2}} \right. \\ & \left. - \frac{e^{-nt_r}}{m} \cos\left(mt_r - \tan^{-1} \frac{n-b}{m}\right) \right\} \\ & \left(t_r = t - \frac{r-a}{\alpha} > 0 \right), \end{aligned} \quad (1-1-19)$$

$$\text{其中 } m = \frac{\alpha Q}{2a} \sqrt{\frac{4}{Q} - 1} = \frac{\alpha}{a} \sqrt{1 - 2\sigma};$$

$$n = \frac{\alpha Q}{2a} = \frac{\alpha}{a} \frac{1 - 2\sigma}{1 - \sigma} \quad (\text{参阅附录一}).$$

把 (1-1-19) 的位移函数 $\varphi(r, t)$ 对 r 求微分, 即可求出在介质中地震波振动的位移

$$\begin{aligned} u_r(r, t) = & - \frac{p_0 a}{\rho \alpha [m^2 + (n-b)^2]^{1/2}} \left[\frac{1}{r} \left\{ \frac{be^{-bt_r}}{[m^2 + (n-b)^2]^{1/2}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{ne^{-nt_r}}{m} \cos\left(mt_r - \tan^{-1} \frac{n-b}{m}\right) \right\} \right. \\ & \left. - e^{-nt_r} \sin\left(mt_r - \tan^{-1} \frac{n-b}{m}\right) \right] - \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\alpha e^{-bt_r}}{[m^2 + (n-b)^2]^{1/2}} \right. \\ & \left. \left. - \frac{\alpha e^{-nt_r}}{m} \cos\left(mt_r - \tan^{-1} \frac{n-b}{m}\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (1-1-20)$$

上式表明,在介质中质点位移 $u_r(r, t)$ 是由两部分组成的。其中一部分与 $1/r$ 成正比;另一部分则与 $1/r^2$ 成正比。在离震源很近的地方, $\frac{1}{r} \ll \frac{1}{r^2}$, 这时质点位移主要由上式括号中后面的项决定。即

$$u_r(r, t) = \frac{p_0 a}{\rho r^2 [m^2 + (n - b)^2]^{1/2}} \left\{ \frac{e^{-bt_r}}{[m^2 + (n - b)^2]^{1/2}} - \frac{e^{-nt_r}}{m} \cos \left(mt_r - \tan^{-1} \frac{n - b}{m} \right) \right\}. \quad (1-1-21)$$

在离震源较远的地方, $\frac{1}{r} \gg \frac{1}{r^2}$, 这时质点位移主要由上式括号中前面的项决定。因此得到

$$u_r(r, t) = - \frac{p_0 a}{\rho \alpha r [m^2 + (n - b)^2]^{1/2}} \left\{ \frac{b e^{-bt_r}}{[m^2 + (n - b)^2]^{1/2}} - \frac{n e^{-nt_r}}{m} \cos \left(mt_r - \tan^{-1} \frac{n - b}{m} \right) - e^{-nt_r} \sin \left(mt_r - \tan^{-1} \frac{n - b}{m} \right) \right\}. \quad (1-1-22)$$

由上述可知,地震波离开震源在介质中传播时,地震波起初的波形由(1-1-21)决定,随着地震波的传播,其波形将发生急剧地变化,最后在离开震源较远的地方其波形便逐渐稳定下来,其形状将由(1-1-22)来决定。

在 $\lambda = \mu$ 即 $\sigma = 0.25$ 时, (1-1-22) 中的 $m = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\alpha}{a}$, $n = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{a}$ 。如果令 $b = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{a} = 1 \frac{1}{\text{毫秒}}$, 则 $n = 1 \frac{1}{\text{毫秒}}$, $m = \sqrt{2} \frac{1}{\text{毫秒}}$ 。这时(1-1-22)变成

$$u_r(r, t) = - \frac{p_0 a}{2\rho \alpha r} (1 - \cos \sqrt{2} t_r - \sqrt{2} \sin \sqrt{2} t_r) e^{-t_r}.$$

令

$$u = \frac{\rho r \alpha^2}{\rho_0 a^2} u_r(r, t),$$

得到

$$u = -\frac{3}{4} (1 - \cos \sqrt{2} t_r - \sqrt{2} \sin \sqrt{2} t_r) e^{-t_r}.$$

根据上式计算所得到的地震波位移脉冲如图 1.3 所示。

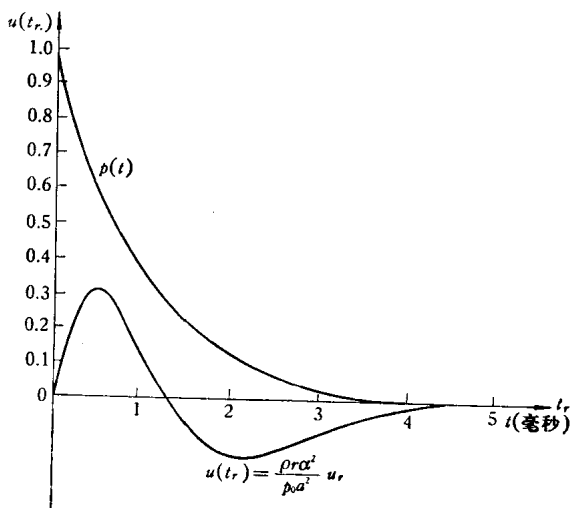


图 1.3

分析地震波位移脉冲公式(1-1-22)可知,在均匀的理想介质中,地震波的视振幅与震源脉冲初始压力 p_0 和球形空腔半径 a 的乘积成正比,而与传播距离 r 成反比。这是因为随着地震波传播距离 r 的增大,球形波前面不断扩张,因而使地震波的视振幅随着 $1/r$ 成比例地减小。

§ 2. 地震波的反射系数和透射系数

上节讨论了在均匀的理想介质中地震波的振幅。本节将

进一步讨论地震波的反射系数和透射系数。

在讨论地震波的反射系数和透射系数时，为了使问题简化，将着重分析平面地震波的反射和折射。因为前节中所得到的球面波前，在离震源相当远处，可以近似地看做是平面波，因此分析平面地震波的反射系数和透射系数，并不失去其一般性。

下面首先研究在均匀的理想介质中平面地震波的解。

如果介质是均匀、各向同性和完全弹性的，则在离开震源处的地震波应满足波动方程 (1-1-6) 和 (1-1-7)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \nabla^2 \varphi;$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \beta^2 \nabla^2 \Psi,$$

其中 $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ 和 $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ 分别表示纵波和横波的速度。

在实际地震工作中，由于震源只在短暂的时间内振动，由它在介质中所产生的扰动一般是短暂的脉冲。因此所需要的是波动方程 (1-1-6) 和 (1-1-7) 的暂态解。但是在大多数情况下，直接获得这些解是困难的。因此采取在 § 1 中所用的方法，首先通过富里叶变换引进位移函数 $\varphi(\mathbf{r}, t)$ 和 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 的谱函数

$$\Phi(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega;$$

和

$$\Psi(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt, \quad (1-2-1a)$$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (1-2-1b)$$