

应用数学

上海市教育委员会 组编
阮炯 黄振勋 蔡志杰 编

科学出版社

5

上海市普通高校「九五」重点教材



上海市普通高校“九五”重点教材

应用数学

上海市教育委员会组编

阮 炯 黄振勋 蔡志杰 编

世界银行贷款资助项目

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书是在复旦大学理、化、生专业用的“应用数学讲义”基础上修改整理而成的. 全书分为三部分(共九章), 分别为: 确定性动力学模型和方法, 随机模型和方法, 优化规划模型和方法. 各章末给出总结和注记, 书末有两个附录: 数学软件 Matlab 的简介与常用数学用表. 各节后给出习题.

本书可作为高等理工科及师范院校的教材或教学参考书, 也可供广大科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/阮炯, 黄振勋, 蔡志杰编. -北京: 科学出版社, 2000. 8

上海市普通高校“九五”重点教材

ISBN 7-03-008440-3

I. 应… II. ①阮…②黄…③蔡… III. 应用数学-高等学校-材料 IV. 029

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 06473 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 8 月第 一 版 开本: 850 × 1168 1/32

2000 年 8 月第一次印刷 印张: 17 3/8

印数: 平 3 500 精 100 字数: 460 000

定价: 平装 29.00 元
精装 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

序 言

随着科学技术的迅速发展,理科与工科各专业对于数学教学的需求又提高了一个层次.各专业在原先微积分与线性代数两门课程教学的基础上,又纷纷开设或准备开设应用数学的课程,课程内容涉及常微分方程、偏微分方程、概率统计、运筹规划等等.然而一个突出的问题是缺少一本内容现代化、理论与实际结合得好的适合理工科非数学各个专业的教材,为此复旦大学教务处负责教材建设的方家驹教授建议我们三人合作编写这本教材.这是因为我们三人有一个共同的特点,都是数学系出身,对交叉学科的研究已有了十多年的实践.在与各系师生合作的过程中,我们常常听到他们的反映:急需一本既能反映应用数学理论深度又能结合理工科专业实际的书,所以,1997年底开始了本教材的编写工作.本书经过两届本科生(包含大部分专业)近三百人的使用,并作了多次修改后,于2000年1月正式定稿.本书经学校领导与各专业的有关专家学者及学生的推荐与评审,现已作为上海市普通高校“九五”重点教材之一,在新世纪里由科学出版社正式出版.

本书编写的指导思想是:“一条主线,两头紧抓,三个模块”.具体地讲,第一,用数学模型的归纳、求解方法及实际应用这条主线贯穿全书.把各学科的实际问题归结为数学模型,然后运用应用数学的理论与方法,定量或定性地得到这些数学模型的解,最后把得到的解回到应用问题中去检验、解释、预测和设计.这是学习、研究应用数学的全过程.本书的编写力争反映这个过程.第二,全书紧紧抓住应用数学的理论与应用这两头,一方面对重要的概念、理论以及方法的思路尽力讲清,使得本书与一般的数学手册有显著的差别;另一方面对于应用给出了许多学科中的实

例——当然这些例子是经过精选的，避免涉及到过多过深的专业知识。此外计算机的广泛使用，使得原来不可操作的或是很难应用的方法成了便于操作、容易应用的，所以本教材也反映了这些最新的成果。第三，为了在有限的篇幅中能把应用数学内容的主要部分反映在教材中，本书把内容定位在三个模块中：确定性动力学模型和方法、随机模型和方法、优化规划模型和方法。这三块并非是简单地将应用数学的内容归并与分类，而是将模型、问题、方法思路综合分析之后的产物。

本书适用于理科、工科的各专业，在这里我们提供一个使用的说明将是有益的。(1) 对于物理、力学、计算机、电子工程类的专业可以作为每周 4~5 学时、一个学期的教学内容(除了打有“*”的章节外可以全教)。(2) 对于化学、生物、环境、材料类的专业可以作为每周 3 学时，一学期的教学内容，主要讲授第一、三、四、五章(打有“*”的节除外)，而剩下的部分可以作为每周 2 学时，1 个学期选修课程的内容。(3) 对于工科师范类的专业可以按照对应用数学需求的不同分别采取上述(1)或(2)的使用方式。(4) 打有“*”的内容是为师生参考或个别专业特殊需要而编写的，是否采用可由教学的老师自行决定。

本书编写工作分工如下：阮炯负责编写第一章、第二章、第七章与第八章；黄振勋负责编写第三章与第九章；蔡志杰负责编写第四章、第五章、第六章及两个附录；最后的统稿与定稿工作由阮炯负责。

在本书编写过程中得到了复旦大学许多专业老师的支持与帮助，这里特别要感谢倪光炯教授与顾凡及教授，他们对本教材的编写给予了很大的支持，并提出了许多宝贵的建议和意见。数学系的严金海副教授在材料系、环境科学系等专业试用了本教材，教授了一学期的课程，并对教材的修改提出了许多非常好的意见。本重点教材课题组的林伟同学帮助做了许多打印、绘图与编排工作。在此教材正式出版之际，让我们对他们表示诚挚的感谢。由于我们水平有限，实践的时间较短，所以难免有不少错误

与缺点，恳请广大读者批评与指正。

阮炯、黄振勋、蔡志杰

2000 年 1 月于复旦园

目 录

第一部分 确定性动力学模型和方法

第一章	动力学模型和问题	1
§1	动力学模型	1
§2	动力学问题	13
§3	总结与注记	19
第二章	离散时间演化动力学 —— 差分方程	22
§1	一维离散动力系统的基本概念	22
§2	周期点的双曲性及吸引排斥性	30
§3	一个例子: 抛物线映射	38
§4	区间映射的混沌动力学	48
*§5	一维离散动力学的数量特征	55
*§6	二维离散动力系统的概述	64
§7	总结与注记	73
第三章	连续时间演化动力学 —— 常微分方程	76
§1	奇点分析与相图	76
§2	自治系统的极限环	102
§3	自治系统的奇异吸引子	110
§4	稳定性的基本概念	115
§5	Lyapunov 直接方法及其在人工神经网络稳定性 分析中的应用	121
§6	化学反应的最终平衡状态分析 —— 线性系统稳定 性的判据和一次近似理论	134
§7	Lyapunov 函数的构造方法	150

§8	解初值问题的 Heun 法与 Runge-Kutta 法	166
§9	解边值问题的打靶法	178
*§10	解边值问题的差分法	182
§11	总结与注记	187
第四章	时空演化动力学——偏微分方程	189
§1	偏微分方程模型的归结	189
§2	预 备 知 识	207
§3	扩 散 方 程	214
§4	波 动 方 程	229
§5	调 和 方 程	242
§6	差 分 法	252
*§7	有限元素法	263
§8	二阶线性偏微分方程的化简与分类	274
*§9	三类方程的性质	283
§10	总结与注记	293

第二部分 随机模型和方法

第五章	概率论初步	297
§1	基 本 概 念	297
§2	随机变量与概率分布	324
§3	数 字 特 征	343
§4	二维随机向量	353
§5	大数定律和中心极限定理	366
§6	总结与注记	373
第六章	统 计 初 步	375
§1	基 本 概 念	375
§2	参 数 估 计	388
§3	假 设 检 验	393
§4	总结与注记	400

第三部分 优化规划模型和方法

第七章	最优化问题	402
§1	引言与简单的例子	402
§2	预备知识	416
§3	无约束最优化问题的梯度法	422
§4	总结与注记	435
第八章	线性规划及单纯形法	438
§1	线性规划模型	438
§2	基解、基可行解和最优解	441
§3	单纯形法	447
§4	总结与注记	456
第九章	非线性规划模型与方法	460
§1	非线性规划模型	460
§2	罚函数法与障碍函数法	464
§3	乘子法	474
§4	总结与注记	482
附录 A	数学软件 MATLAB 的简介	484
§1	基本操作	484
§2	基本运算	493
§3	微积分运算	501
§4	优化与统计	505
附录 B	常用数学用表	508
表 1	常用函数的 Fourier 变换表	508
表 2	二项分布表	510
表 3	Poisson 分布表	524
表 4	标准正态分布的分布函数表	527
表 5	t -分布的双侧分位数 ($t_{1-\alpha/2}$) 表	530

表 6	χ^2 - 分布上侧分位数 ($\chi^2_{1-\alpha}$) 表	533
表 7	F - 检验的临界值 (F_α) 表	536

第一部分 确定性动力学模型和方法

第一章 动力学模型和问题

自然界中千变万化的现象，可以用各种数学模型描述。数学模型总体上可以分为两大类型，一类是确定性的数学模型，另一类是随机性的数学模型。而在确定性的数学模型中最普遍的是动力学模型，即系统的状态随时间演化的过程的模型，研究这些模型的各种问题及规律构成了动力学的基本理论和应用，本书第一部分的目的是介绍这类模型及其方法。

本章将通过一些实例来介绍各种离散的和连续的动力学模型，且简单地介绍几个基本动力学问题。

§1 动力学模型

例 1.1 手拿一个计算器，首先输入一个任意数，然后按某一个函数键，接着一次又一次地反复按这个函数键，整个上述过程可以看成计算器上显示数这个状态随时间（按函数键的次数）演化的过程。譬如，给定初始输入 x ，反复地按 $\exp$ 键，得到的显示数状态为一个数列

$$x, e^x, e^{e^x}, \dots$$

过了一段时间后，计算器显示“溢出”的信息。这个过程我们也可以用下面的模型来描述它，下一个显示的状态数与现在的状态数之间的依赖关系是

$$x_{t+1} = \exp(x_t). \quad (1.1)$$

初始状态输入数记为 x_0 , 一次一次反复按 $\exp$ 键意味着 t 不断地增加 1, 即 $t = 0, 1, 2, \dots$.

把这个例子更加数学化, 给定初始值 x_0 及指定函数 $f(x)$, 考虑下面的迭代序列

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

也可以把现在时刻的时间定在 t , 下一个时间记为 $t+1$, 再下一个时间为 $t+2$, 依次下去, 它们的演化过程为下一个时刻 $t+1$ 的状态与现在时刻 t 的状态之间有如下关系

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

例 1.2 种群生态学中的虫口模型. 在种群生态学中考虑像蚕、蝉这种类型的昆虫数目 (即“虫口”) 的变化, 讲得确切一些, 即相邻两代 (或者说今年与明年) 的虫子数的变化规律 (或者说相依关系). 假定所考虑的昆虫, 每年夏季成虫产卵后全部死亡, 第二年春天每个虫卵孵化成一只虫子. 显然牛马、羊、人均不属于此列. 设第 n 年的虫口数目为 P_n , 每只成虫平均产卵 C 个, 第 $n+1$ 年的虫口数目为 P_{n+1} , 显见, 相邻两年虫口数目之间存在着如下简单的线性依赖关系

$$P_{n+1} = CP_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.3)$$

这是一个线性定常差分方程, 其中 C 是由此类昆虫所生活的周围环境造成的综合作用的参数.

对这个差分方程可以用类似于解线性定常差分方程中的欧拉指数待定法. 设解有如下形式

$$P_n = A\lambda^n,$$

将之代入方程求得

$$P_n = P_0 C^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

其中 P_0 是起始年的虫口数目, 如果 $C > 1$, 即每只虫子平均产卵超过 1 个, 那么虫口数目将按指数上升, 用不了多少年, 整个地球就要“虫满为患”; 相反地, 如果 $C < 1$, 即每只虫子平均产卵不到 1 个, 那么虫口数目在若干年后趋向于零, 即为灭绝; 当然若 $C = 1$, 即每个虫子平均产卵正好一个, 那么这种昆虫数目保持常值——初始值 P_0 . 显然, 这个虫口演化模型过分简化了. 让我们从实际出发, 把这个模型作些修改使它更符合实际.

对 $C > 1$ 情形, 注意到虫口数目越来越多的时候, 周围的环境能提供的空间与食物是有限的, 虫子之间为了生存将互相竞争而咬斗, 同时对虫子存在威胁的因素例如传染病及天敌, 综合起来看抑制昆虫无限地增加以达到一定的平衡, 也就要使下一年的虫口数目减少. 由于咬斗和接触都是发生在两只虫子之间的事件, 而 P_n 只虫子配对的事件总数是 $\frac{1}{2} P_n(P_n - 1)$, 当 P_n 相当大时, 此总数接近于 $\frac{1}{2} P_n^2$, 因此修改后的虫口方程是

$$P_{n+1} = CP_n - bP_n^2. \quad (1.5)$$

在作一些变量与参数代换后可以写成标准形式

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad \lambda > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.6)$$

这就是近二十多年来引起人们很大兴趣的 Logistic 方程. 以后的章节中将要仔细地研究它的动力学行为与性质.

在科学和技术实践中, 往往一个系统的状态不只一个, 这些状态用一组变量 $x, y, z, \dots$ 来描述, 它们都是时间 t 的函数, 而同一个系统中这些状态又受一组可以调节的控制参量 $a, b, c, \dots$ 的影响. 在上面例子中 C 与 λ 即为控制参量, P_n 与 x_n 即为状态函数. 一般地, 对只有一个状态变量 x 及一个控制参量 μ 的情形, 时间变化限制成等间隔

$$t, t+1, t+2, \dots,$$

那么随时间演化的过程可以由下面形式描述

$$x(t+1) = f(\mu, x(t)). \quad (1.7)$$

更一般地, 对系统进行观测的采样间隔 Δt 可以不是整数, 把各个时刻记为 $t_0, t_1, t_2, \dots$, 而相应状态记为 $x_0, x_1, x_2, \dots$, 其中

$$x_n = x(t_n), \quad t_n = t_0 + n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

于是演化方程可以写成

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (1.8)$$

这是一个离散化的时间演化方程, 也是一个特殊的差分方程——一阶定常差分方程, 即演化方程右端函数 f 与时间 n 无直接依赖关系, 有时称为自治的差分方程.

上面两个例子中, 演化方程右端的 f 具有确定的形式. 现在来看一些现实生活中碰到的例子, 我们会发现, 许多演化方程中的 f 是不能用显式确定的形式, 而且 f 常常随时间 t 的演化在变化的.

譬如, 观测某年某月的 30 天中每天的温度、湿度、大气压力随时间演化的过程, 可以发现相邻两天之间的状态 (温度、湿度、压力) 没有明确的能用显式表示的 f . 再观察一个人的 24 小时的动态心电图, 每一次心脏搏动心电图上呈现一个 PQRS 波, 把时间采样频率取为一次搏动的时间间隔, 那么相邻两次搏动的 PQRS 波之间的演化方程的 f 函数也是隐含的而不能用显式表示的. 其它如一年中的上海股市每天的上证指数的演化过程中, 相邻两天之间的演化依赖关系也是隐含的, 而不是明显地可以用显式表示的. 但这些例子均是离散地随时间演化的过程, 也就是统一地称它们为 **离散动力系统**, 它们的共同特征是, 下一个时刻的状态由当前的状态决定.

当时间连续变化时, 有一类演化过程是最重要的, 即现在时间的状态的变化速率由当前的状态决定, 用数学模型来描述就是状态随时间演化的微分方程.

例 1.3 人口总数的预测是一个很重要的问题, 人包括牛、马、羊等种群生命期长, 世代重叠并且数量很大, 与例 1.2 所讨论的生命期短, 世代不重叠的诸如蚕蝉类虫口不同. 种群总数很大时, 种群数的适当的变化与总数之比仍是很小的, 这相当于在时间作微小变化时, 种群数也作小的变化. 因此, 我们近似地认为, 当总数很大时, 它是随时间连续地, 甚至可微地变化. 这时可取时间 t 为自变量, 以种群数 $N(t)$ 为状态变量, 考虑 $N(t)$ 随时间 t 连续演化的方程, 特别地考虑它的变化率 $N'(t)$ 与 $N(t)$ 的相依关系, 可以建立的数学模型是常微分方程.

假定 $r(t, N)$ 表示该种群出生率和死亡率之差, 那么 $N(t)$ 的增长率 $N'(t) = r(t, N(t))$. 若种群是孤立的, 出生率与死亡率均与种群数 $N(t)$ 成比例关系, 则演化方程为

$$N'(t) = CN(t). \quad (1.9)$$

这是一个一阶线性常系数微分方程, 它描述了 **Malthus 生物总数增长定律**. 如果在初始时刻 $t = 0$ 时种群数 $N(0)$ 已知, 那么

$$N(t) = N(0) \cdot \exp(Ct). \quad (1.10)$$

若 $N(t)$ 表示时间 t 时地球上的人口总数. 从上面解的表达式可知, C 起了很大的作用. 一般地可以取一段时间, 譬如某 10 年中的人口平均增长速率为 C , 那么与这 10 年较近的年份中求得的 $N(t)$ 与实际的人口数比较符合.

例如, 取 1961 年为 $t = 0$, 该年的人口数为 $N(0) = 3.06 \times 10^9$, $C = 0.02$, 由解的公式知

$$N(t) = 3.06 \times 10^9 \exp(0.02t),$$

这里 t 为年份减去 1961. 这个公式与 1700~1961 年期间的实际人口总数比较符合. 但是如果以这个公式去计算 2670 年地球人口总数, 那时此数目将达到 3.06×10^{15} , 这是一个天文数字. 若是这样, 地球上的人只能一个人站在另一个人的肩上排成两层了. 由此可知, 必须修改上述人口总数的增长模型. 实际上, 当时间离初始时刻越来越长的时候, 人口数不能以指数形式增长, 这要受人们生存的空间与食物的限制, 人们之间为求得生存必导致竞争, 疾病也要威胁人们, 所以此时人口增长模型中增长率要减去由于竞争引起的项. 因为单位时间内两个成员相遇次数的统计平均值与 N^2 成正比, 所以这项取为 $-bN^2$, 即微分方程将被修改为

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2, \quad (1.11)$$

这个方程称为 **生物总数增长统计筹算律**, 常数 a 与 b 称为生物总数的 **生命系数**. 这是一个一阶非线性定常微分方程, 它描述了 Verhulst 首先发现的定律. 作为习题, 读者容易求得满足初始条件 $N(t_0) = N(0)$ 的该方程的解有如下表达式

$$N(t) = \frac{aN_0}{bN_0 + (a - bN_0)e^{-a(t-t_0)}}.$$

显见, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有 $N(t) \rightarrow \frac{a}{b}$. 回到地球上人口总数的预测, 生态学家估计 a 的自然值是 0.029, 又知道 1961 年时人口总数为 3.06×10^9 , 此时人口以 2% 的速率增长着, 从方程 (1.11) 得

$$0.02 = 0.029 - b(3.06 \times 10^9),$$

因而 $b = 2.941 \times 10^{-12}$, $\frac{a}{b} = 9.86 \times 10^9$, 可见随着时间的推移, 地球上人口总数以上百亿为饱和极限值, 而不能无限制地增长, 当然这个结果比较符合实际.

例 1.4 具有阻尼的单摆运动方程. 质量为 m 的小球, 用长为 l 的细线悬挂在 O 点 (如图 1.1), 在地心引力作用下作往复摆

动. 假设不计悬线的质量, 又考虑空气等环境造成的阻尼作用. 记细线与垂线的夹角为 ϕ , 下面建立 ϕ 随时间 t 演化的运动方程.

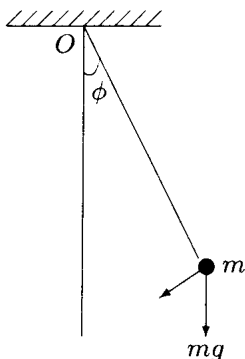


图 1.1

球 m 称为摆球, 它在运动时受到地心引力、阻力和线的张力的作用. 考虑摆球在运动方向即与线 Om 垂直方向上的力的平衡, 注意重力在 Om 垂直方向的分力为 $mg \sin \phi$, 阻力为 $b \frac{d\phi}{dt}$, 其中 b 是阻尼系数, 根据 Newton 定律, 得到运动方程为

$$ml \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -mg \sin \phi - b \frac{d\phi}{dt},$$

上式中的负号是因为重力的分力指向 ϕ 的减小方向. 于是得

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \bar{b} \frac{d\phi}{dt} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0, \quad (1.12)$$

其中 $\bar{b} = \frac{b}{ml}$, 这是一个二阶定常非线性定常微分方程. 以后将 (1.12) 中的 $\bar{b}$ 仍然记为 b . 当 ϕ 充分小时 $\sin \phi \approx \phi$, 方程 (1.12) 近似地表示为

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + b \frac{d\phi}{dt} + \frac{g}{l} \phi = 0, \quad (1.13)$$

这是一个二阶线性定常微分方程.