结构非线性动力学分析

傅衣铭　编著

暨南大学出版社

JIEGOU FEIXIANXING DONGLIXUE FENXI

结构非线性动力学分析

傅衣铭　编著

暨南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构非线性动力学分析/傅衣铭编著
—广州:暨南大学出版社,1997.2
ISBN 7—81029—643—4

Ⅰ.结…
Ⅱ.傅…
Ⅲ.动力学
Ⅳ.O313

暨南大学出版社出版发行
(510632 广州 石牌)
华侨大学印刷厂印刷
新华书店经销
1997年2月第1版 1997年2月第1次印刷
开本: 850×1168 1/32 印张:13.5
字数: 325千 印数:1—1000册
ISBN 7—81029—643—4/O·28
定价: 24.00元

内 容 简 介

本书介绍了结构非线性动力学的基础理论及一般分析、计算方法；阐述了层合板壳结构及一般板壳的非线性振动、动力响应、动力稳定性、分岔及混沌运动的动力学特征；同时，也讨论了非惯性参考系中板壳的有关非线性动力学问题。

本书内容翔实，可供力学、结构工程、机械工程、船舶工程、航空宇航制造工程等领域的科技工作者、教师、研究生阅读。

前　言

结构非线性动力学学科是当前国际上蓬勃发展的非线性科学的一个重要分支，也是固体力学在基础理论和工程应用方面的一个重要研究领域。它的理论基础涉及非线性弹性理论、板壳理论、振动理论及微分方程定性理论等方面的知识。由于本书中的主要研究对象是纤维增强、迭层铺设层合板壳结构，因此也涉及到复合材料力学的知识。

本书是作者在长期的教学与科研实践的基础上编写的学术专著。书中阐述了作者已发表的和未发表的涉及弹性结构非线性动力学分析方面的研究成果，也少部分地引用了国内、外学者的有关研究成果。此外，书中有选择性地介绍了非线性动力学中具有重要应用前景的现代理论和方法。但限于篇幅，只能是作为入门的基础知识，对这些问题的深入探讨，必须请读者参阅有关专著。

在本书的编写过程中，钟正华教授对全书进行了认真细致的审阅，并提出了许多宝贵的意见；唐驾时教授、赵跃宇教授、刘腾喜副教授给予了热情的帮助；国家自然科学基金委员会数理科学部力学处给予了大力支持。在此，谨向他们致以深切的谢意。

由于作者水平有限，书中不妥、甚至错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

傅衣铭

1997 年 4 月于湖南大学

目　　次

绪　论

结构非线性动力学问题归结为动力系统研究的范畴。动力系统是力学中的传统命题,凡基于牛顿力学所建立的系统运动控制微分方程组即为动力系统。十九世纪,法国的大数学家、天体力学家庞加莱(Poincaré)正式提出了动力系统的概念,由于它在方法论方面的重要性,被许多学科领域所研究,如数学中研究动力系统的定性行为,化学中研究反应过程的动力系统,经济学中研究动态经济的动力系统。而在力学中为了区别于数学中的动力系统,则称之为动力学系统。

动力系统中都客观地存在着非线性因素,它们来自系统的物理方面、几何方面、结构方面、运动方面、耗散方面等等。正是由于动力系统中存在不可避免的广泛的非线性因素,使得动力系统的动力学行为变得十分丰富和复杂,人们对它的不断探讨和认识,逐渐形成了区别于经典牛顿力学的一门新学科——非线性动力学。

当非线性动力学系统的系数为确定的常数时,可用摄动法、平均法、多尺度法、谐波平衡法等经典的非线性动力学理论来求其足够精确的近似解。但是,工程实际问题中动力学系统的参数往往会发生一些微小变化(亦称摄动),而这些参数的摄动往往会引起系统的拓扑结构发生本质的变化,即分岔(bifurcation)。一般常微分方程描述的动力系统相迹的分岔问题可分为静态分岔和动态分岔两大类,静态分岔研究动力系统中平衡态的数目和稳定性的变化;动态分岔研究动力系统在相空间中轨迹拓扑结构的变化。在实际应用中,有时只关心在平衡点或闭轨的邻域内轨线拓扑结构的变化,即只研究平衡点或闭轨的某个邻域内

动力系统的分岔，这类分岔问题称为局部分岔；如果在分岔研究中考虑动力系统的全局行为，则称为全局分岔。而非线性动力系统出现分岔，特别是全局分岔又将在许多情况下导致混沌(chaos)。混沌运动是指在确定性系统中所出现的一种有限范围内的运动，它貌似于随机过程，对初值极端敏感，是一种不稳定的有限定常运动。这里所谓“貌似”是指系统的运动不完全等同于随机运动，其运动又具有确定的成分；所谓“有限定常运动”是指除了平衡、周期和拟周期以外的定常运动则为混沌运动，其运动状态在某种意义上(以相空间的有限域为整体来看)不随时间而变化。混沌现象的发现缩小了物理学中确定论和概率论两套描述体系间的鸿沟，它揭示出只要确定论的系统稍为复杂一些，就会表现出随机行为，牛顿力学(更确切地说，天体力学)曾经是确定论描述的典范，它亦具有内在的随机性。混沌所揭示的有序与无序的统一，确定性与随机性的统一，是继相对论和量子力学问世以来，本世纪物理学的又一次重大革命。因此，分岔与混沌的研究已成为非线性动力学乃至整个非线性科学的一个非常活跃的研究前沿。

一般地，非线性动力学的主要研究内容为：研究各类非线性动力系统在各种干扰作用下的周期、拟周期运动规律；分岔、混沌、分形、拟序结构、图象生成及演化过程的新理论和新现象；非线性动力系统的数值方法及其工程应用。它构成通常所说的一般力学的主体。但是，一般力学的研究对象为单质点或具有限自由度的质点系，而本书中的研究对象是具连续介质的弹性结构，因此，这里涉及到将一般力学的原理和方法推广到固体力学的领域中。

在弹性结构的非线性动力学分析中，首要的、有时也是最困难的，即是结构非线性运动方程的建立。在正确地给出结构中任一质点在任一时刻的运动描述、非线性几何关系、弹性本构关系

的基础上，一般地可采用如下几种方法来建立系统的运动方程：

1° 动力平衡法。此方法也称为达朗贝尔(d Alembert J be R)原理的直接平衡法，是一种最简单且普遍采用的方法。

2° 虚功法。当结构比较复杂，但所包含的各种力可以容易地用位移自由度来表示，而它们的平衡规律却不太清楚时，运用基于虚位移原理的虚功法来建立系统的运动方程是较为方便的。

3° 变分法。适合于静力问题的所有变分原理结合达朗贝尔原理的应用，均可用来建立系统的运动方程。但在动力问题中，更广泛采用的是哈密顿(Hamilton W R)变分原理，这个原理的应用可直接导出任何被给定的动力体系的运动方程。

4° 能量法。基于能量守恒定律的能量法，不但可以用来建立系统的运动方程，而且易于计算出系统的固有频率。

建立了结构的非线性运动方程，且给出相应的边界条件(有时还须给出恰当的初始条件和周期性条件)后，则考虑对系统运动方程的求解。由于结构的非线性运动方程为耦合的偏微分方程组，欲求其满足边界条件(有时还须满足初始条件和周期性条件)的精确解几乎是不可能的。因此，一般地只能采用半解析方法和数值方法来求其近似解。

这里所谓的"半解析"法即解析与数值方法的结合应用。其通常求解的步骤是首先将系统运动方程中的未知函数分离为时间变量和空间变量，然后应用迦辽金(Galerkin G B)方法或里茨(Ritz W)方法对分离变量后的方程进行处理，则耦合的偏微分方程组化为耦合的仅含时间变量的非线性常微分方程组。至此，就可以应用一般力学意义下的非线性动力学中的分析方法来继续求解。这里所谓的"数值方法"，并非有限单元法之类的纯数值方法，而仍是从系统的运动微分方程出发，但此时对未知函数直接采用差分法、正交配点法等在空间上离散，对方程中的速度项

和加速度项则采用平均加速度法(Newmark β 方法)进行处理，从而得到一组关于时间和位置坐标的线性代数方程，继而应用迭代法，即可求得所需的解答。

在应用半解析法处理问题时，最终必须使用非线性动力学中的分析方法，究竟采用何种分析方法，则需根据具体的研究对象和研究内容来确定。本书从工程应用的目的出发，主要讨论了板、壳结构的非线性振动、非线性动力响应和非线性动力稳定性问题，此时，可采用非线性动力学中的定量分析方法，例如，摄动法、多尺度法、谐波平衡法等来进行求解。而对于板、壳结构非线性动力问题的局部分岔和混沌运动的分析，则可应用非线性动力学中的定性分析方法来进行研究。由于应用适于质点和质点系的定性方法来分析连续介质弹性体的非线性动力学问题在理论上仍很不成熟，例如将非线性运动控制方程——一组非线性偏微分方程离散且截断后，其分岔与混沌行为等是否仍能反映原非线性动力系统的本质特征，就存在着大的疑点，为此，本书中仅用较小篇幅介绍了这方面的工作。但从学科的发展和交叉出发，仍将非线性动力学中的近代分析方法，如中心流形理论、奇异性理论、李雅普诺夫——施密特(Liapunov-Schmidt)方法等作了较详尽的介绍。

同时，由于科学技术的迅速发展，复合材料结构、高速运动空间结构的非线性动力学分析已成为固体力学领域中不可忽视的研究内容。因此，在本书板壳结构的非线性运动方程建立中，考虑了材料的各向异性，即视板壳结构为纤维增强、迭层铺设的层合体，又由于其剪切模量偏低，横向剪切变形对层合结构力学特征的影响远大于相应各向同性体的，因而在建立系统运动方程中都考虑了横向剪切变形的影响。在本书最后一章则对非惯性参考系中板壳的非线性动力学特征进行了探讨。

1 非线性动力学中的定量分析方法

结构非线性动力学中的经典问题主要是研究当非线性动力系统中各个参数为确定常数时结构的非线性振动、非线性动力响应及非线性动力稳定性问题。就这些问题的定量分析而言，主要的分析方法有两大类，即求分析解和数值解。而至今能得到精确分析解的问题还没有见到，一般只能求得近似分析解。本节中以具有限自由度的非线性振动问题为例，介绍几种常用的近似分析解。无疑地，经过对连续体非线性动力学系统的离散化处理，这些方法也可用于近似分析结构的各种非线性动力学问题。

1.1 摄动法

摄动法又称小参数法，它处理含小参数 ε 的系统，一般当 $\varepsilon=0$ 时可求得解 x_0。于是，可将原系统的解展为 ε 的幂级数 $x=x_0+x_1\varepsilon+x_2\varepsilon^2+\cdots$，若当 $\varepsilon\to0$ 时该级数一致收敛则称正则摄动，否则称为奇异摄动。摄动法的种类很多，本节介绍最基本的 Lindstedt-Poincare 方法。

现在考虑含小参数 ε 的非线性振动系统

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{1.1.1}$$

其中 f 是关于 x 和 $\dot{x}$ 的解析函数。考虑到系统(1.1.1)的振动频率 ω 通常不是常数，引入新变量 τ，且作变换 $\tau=\omega t$，来求对 τ 的周期解。现将 ω 与 x 展为 ε 的幂级数：

$$\begin{aligned}\omega&=\omega_0+\varepsilon\omega_1+\varepsilon^2\omega_2+\cdots\\x&=x_0(\tau)+\varepsilon x_1(\tau)+\varepsilon^2x_2(\tau)+\cdots\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

式中 $x(\tau)$ 为周期函数，ω_i 为待定常数。注意到

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\omega = x'\omega$$

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\omega^2 = x''\omega^2$$

且将 $f(x,\dot{x})$ 在 x_0 点展开，记

$$f_0 = f(x_0, \omega x_0')$$

$$f_{x_0} = \partial f(x_0, \omega x_0')/\partial x$$

$$f_{\dot{x}_0}' = \partial f(x_0, \omega x_0')/\partial \dot{x}$$

将(1.1.2)代入(1.1.1)，并令 ε 的同幂次项前的系数相等，可得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^0: \quad x_0'' + x_0 = 0 \\
&\varepsilon: \quad x_1'' + x_1 = -2x_0''\omega_1/\omega_0 + f_0/\omega_0^2 \\
&\varepsilon^2: \quad x_2'' + x_2 = -2x_1''\omega_1/\omega_0 - (x_0''/\omega_0^2)(2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2) \\
&\qquad\qquad + f_{x_0}x_1/\omega_0^2 + f'_{\dot{x}_0}(\omega_1 x_0' + \omega_0 x_1')/\omega_0^2
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

于是求取近似解的问题归结为求解 $x_i(\tau)$ 和 ω_i 的问题。由于 $x_i(\tau)$ 是以 2π 为周期的周期函数，需满足

$$x_i(\tau + 2\pi) = x_i(\tau)$$

这一附加条件可用来确定各阶频率的修正值 ω_i，即可适当选择 ω_i，从而消除永年项得到周期解。

例 应用 LP 方法求解杜芬(Duffing G)方程

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon x^3$$

对应于方程(1.1.1)，此时 $\omega_0 = 1, f = -x^3$，由(1.1.3)得各阶摄动方程为：

$$x_0'' + x_0 = 0 \tag{a}$$

$$x_1'' + x_1 = -x_0^3 - 2x_0''\omega_1 \tag{b}$$

$$x_2'' + x_2 = -2x_1''\omega_1 - x_0''(2\omega_2 + \omega_1^2) - 3x_0^2x_1 \tag{c}$$

由(a)求得

$$x_0 = a\cos(\tau + \varphi)$$

其中 a,φ 可由初值确定。为方便计取 $\varphi=0$，将 $x_0=a\cos\tau$ 代入(b)，得

$$x_1'' + x_1 = -a^3\cos^3\tau + 2a\omega_1\cos\tau$$

由上式中消除永年项后可求得周期解 $x_1(\tau)$ 及修正频率值 ω_1，且

$$x_1(\tau) = \frac{1}{32}a^3\cos3\tau$$

$$\omega_1 = \frac{3}{8}a^2$$

将已求得的 x_0,x_1 和 ω_1 值代入(c)，同理可求得

$$x_2 = \frac{1}{1024}a^5(-21\cos3\tau + \cos5\tau)$$

$$\omega_2 = -\frac{15}{256}a^4$$

这样就可求得一致有效的近似解及频率的近似值

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + O(\varepsilon^3) \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{d}$$

上面的结果表明，非线性振动周期解中有高次谐波存在，其振动频率与振幅相关。

1.2 平均法

所谓平均法就是将以位移为未知量的振动方程，化为以振幅、相位为未知量的标准方程组。下面先阐述最简单的平均法——KB(Krylov-Bogoliubov)方法。

对于非线性自治系统

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{1.2.1}$$

根据求解二阶线性非齐次常微分方程特解的常数变易方法，可将解写为

$$x = a(t)\cos\psi(t)$$
$$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$$
$$(1.2.2)$$

即非线性方程(1.2.1)的解仍具有线性方程解的形式，只是振幅 a 和相位 φ 不再是常数，而都是时间的函数。(1.2.2)中有三个待求函数 $x(t)$、$a(t)$和 $\varphi(t)$，为寻求一个补充方程，对(1.2.2)中第一式求导

$$\dot{x} = \dot{a}\cos\psi - a\dot{\varphi}\sin\psi - a\omega_0\sin\psi \tag{a}$$

若近似地取非线性振动速度具有线性方程的速度形式，即 $\dot{x} = -a\omega_0\sin\psi$，则得补充方程

$$\dot{a}\cos\psi - a\dot{\varphi}\sin\psi = 0 \tag{b}$$

将 x,$\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 代入(1.2.1)，得

$$-\dot{a}\,\omega_0\sin\psi - a\,\omega_0\,\dot{\varphi}\cos\psi = \varepsilon f_0 \tag{c}$$

其中，$f_0 = f(a\cos\psi, -a\,\omega_0\sin\psi)$，联立求解(b)和(c)，可得

$$\dot{a} = -\varepsilon f_0\sin\psi/\omega_0$$
$$\dot{\varphi} = -\varepsilon f_0\cos\psi/(a\omega_0)$$
$$(1.2.3)$$

以上的工作相当于作了一种变量变换，把 x,$\dot{x}$ 换成了 a,φ。这种变换的物理意义是：拟简谐系统的振动仍以简谐振动的形式表示，但其振动的振幅及频率都随时间变化。而振幅和相位的变化比位移 $x(t)$的变化要缓慢，为时间的慢变函数(由(1.2.3)可知，$\dot{a}$,$\dot{\varphi}$ 都是 $O(\varepsilon)$的量级)，又由于(1.2.3)右端函数都是全相位 ψ 的周期函数，可将其展为富里叶(Fourier J B J)级数，因 $a(t)$,$\varphi(t)$均变化缓慢，则在一次近似时可以略去级数展开式中的谐波项，仅取常数项。于是得第一次近似的求解方程

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} f_0\sin\psi\,\mathrm{d}\psi$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0}\int_0^{2\pi} f_0 \cos\psi \mathrm{d}\psi$$

(1.2.4)

上式右端的积分项就是(1.2.3)右端函数在一个周期 $T=2\pi$ 内对时间的平均值。由于 a,φ 在一个周期的量级内变化很小,所以计算右端平均值时可看作常量,于是易由上式积分求出 $a(t),\psi(t)$。

例 1 用 KB 法求解杜芬方程

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon x^3 \quad (\omega_0 = 1)$$

设 $x=a\cos\psi$,因为 $f(x,\dot{x})=-x^3$,代入(1.2.4),得

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} -(\sin\psi a^3\cos^3\psi)\mathrm{d}\psi = 0$$

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0}\int_0^{2\pi} -a^3\cos^4\psi \mathrm{d}\psi = 1 + \varepsilon\frac{3}{8}a^2$$

积分以上两式,得

$$a = a_0$$

$$\psi = (1 + \varepsilon\frac{3}{8}a_0^2)t + \varphi_0$$

a_0,φ_0 由初始条件决定。于是原方程的近似解为

$$x = a_0\cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中频率

$$\omega = 1 + \varepsilon\frac{3}{8}a_0^2$$

可知在此情况下,平均法与摄动法的一阶近似结果完全一样。由于非线性项的影响,系统频率不再象线性系统那样是一常量,而是在一阶近似内有一修正,且频率修正项与振幅或者说与初始条件有关。

在求高阶近似时,要逐次运用平均运算。为了与摄动法一样,将一阶近似解、高阶近似解同时解出,Krylov 和 Bogoliubov

发展了广义平均法。仍从(1.2.3)出发,并用 ψ 取代 φ,则有

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -\varepsilon f_0 \sin\psi/\omega_0 \\ \dot{\psi} &= \omega_0 - \varepsilon f_0 \cos\psi/(a\omega_0)\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

为提高精度,求解(1.2.5)时引入近似恒等变换(KB 变换)

$$\begin{aligned}a &= b + \varepsilon a_1(b,\theta) + \varepsilon^2 a_2(b,\theta) + \cdots \\ \psi &= \theta + \varepsilon \psi_1(b,\theta) + \varepsilon^2 \psi_2(b,\theta) + \cdots\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

上式表明:由于 a,φ 慢变,因而可看成平稳变化项 b,θ 与各阶微小振动项的叠加。当 $\varepsilon=0$ 时(a,ψ)与(b,θ)恒等,当 $\varepsilon\neq 0$ 且很小时,该式非常接近于恒等变换。且 a_i,ψ_i 都是 θ 的以 2π 为周期的函数,并要求 b,θ 对时间的导数满足

$$\begin{aligned}\dot{b} &= \varepsilon B_1(b) + \varepsilon^2 B_2(b) + \cdots \\ \dot{\theta} &= \omega_0 + \varepsilon \varphi_1(b) + \varepsilon^2 \varphi_2(b) + \cdots\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

于是,求(1.2.5)的解 a,ψ 就是要确定函数 $a_i(b,\theta)$和 $\psi_i(b,\theta)$,并选择 b,θ,使得由(1.2.7)所求得的 b,θ 代入解(1.2.6)时能满足方程(1.2.5)。为此,首先将(1.2.6)对 t 求导,并应用(1.2.7)式,得

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \dot{b}\left(1 + \varepsilon\frac{\partial a_1}{\partial b} + \varepsilon^2\frac{\partial a_2}{\partial b} + \cdots\right) \\ &\quad + \dot{\theta}\left(\varepsilon\frac{\partial a_1}{\partial \theta} + \varepsilon^2\frac{\partial a_2}{\partial \theta} + \cdots\right) \\ &= \varepsilon\left(\omega_0\frac{\partial a_1}{\partial \theta} + B_1\right) \\ &\quad + \varepsilon^2\left(\omega_0\frac{\partial a_2}{\partial \theta} + B_2 + B_1\frac{\partial a_1}{\partial b} + \varphi_1\frac{\partial a_1}{\partial \theta}\right) + \cdots \\ \dot{\psi} &= \dot{b}\left(\varepsilon\frac{\partial \psi_1}{\partial b} + \varepsilon^2\frac{\partial \psi_2}{\partial b} + \cdots\right)\end{aligned}$$