



随机微分 方程引论

(第二版)

龚光鲁 编著



北京大学出版社

随机微分方程引论

(第二版)

龚光鲁 编著

北京大学出版社

书 名：随机微分方程引论(第二版)

著作责任者：龚光鲁

责任编辑：王明舟

标准书号：ISBN 7-301-00475-3/O·90

出版者：北京大学出版社

地 址：北京市海淀区中关村

电 话：出版部 2502015 发行部 2559712 编辑部 2502032

排 印 者：北京大学印刷厂

发 行 者：北京大学出版社

经 销 者：新华书店

850×1168 毫米 32 开本 18 印张 430 千字

1995 年 11 月第二版 1995 年 11 月第一次印刷

印 数：0001—3,000 册

定 价：25.00 元

内 容 提 要

本书着重介绍随机微分方程的强解、弱解及其与扩散和带跳跃的马氏过程间的联系。

第一章讨论 Brown 运动的随机积分。第二章介绍了随机过程的一般理论的梗概,着重于随机过程的对偶投影理论。第三章与第四章讨论了连续半鞅的随机微分方程的强解, Ito 方程的弱解, 马氏型 Ito 方程弱解的存在唯一性条件及其与扩散过程的联系。第五章讨论一维情形,着重论述边界点的分类、常返性与保守性。第六章介绍带边界的随机微分方程与扩散, Fichera 边界分类。第七章给出了一般半鞅的分解及 Ito 公式, 拟左连续的 σ 有限点过程的积分。还讨论了带有平稳点过程积分的随机微分方程, 这种方程是既有连续部分又有跳跃部分的强马氏过程的典型情形。本书最后还有一个关于连续鞅与 Brown 运动构造及凸函数的广义导数的简短附录。

再 版 序

这一版对原书各章内容除作了局部更动以外,主要的变动为:把Brown运动的局部时的内容改写为连续半鞅的局部时;讨论了含有 δ 函数的Ito过程;扩大了第五章,加进了可测系数的一维随机微分方程的Engelbest-Schmidt理论与Zvonkin方法和轨道唯一性的Le Gall方法,以及Stratonich方程的Doss方法;对McKean-Vlasov随机微分方程作了简短介绍;加进了Brown弋巡律及其推导。

此外,本版还改正了原书的许多疏忽与印刷错误。

特别值得一提的是本书对于记号与名词索引作了一个完备易用的表。

序 言

近年来, 随机微分方程、扩散过程及随机分析有了迅速发展, 并广泛应用于系统科学、工程控制、生态学等各个方面。在这个领域中, 先后出现了 Gihman-Skorohod, Stroock-Varadhan, Ikeda-Watanabe 等著名概率学家的专著。它们分别各有侧重地总结了这个领域内的最重要的新成果, 并且对基本理论作了全面的阐述。这些著作在我国受到了广泛的重视, 但是由于它们篇幅过大, 论题过多, 而且个别地方还不自封, 所以对初学者来说, 并不容易掌握。编写本书的目的, 是力图选择上述著作中的一部分基本知识、概念和典型的方法, 作一个较为浅显的阐述, 并辅以笔者学习上述名著的体会, 加入某些一般理论在具体情况下的实现和应用, 以期便于读者理解掌握, 铺填初学者走向专门研究的道路上的坑隙沟壑, 为有兴趣学习随机微分方程与扩散过程的初学者提供一个入门的教科书。

随机微积分与随机微分(积分)方程起源于马氏过程的构造, 后者起始于 Kolmogorov 的分析方法与 Feller 的半群方法。但是对于扩散过程, 更接近物理直观的 Langevin 方程

$$dX_t = \frac{v}{m} dB_t + a dt$$

是很有吸引力的。可惜的是 Brown 运动 B_t 对几乎所有的轨道无处可微, 因而从数学上说 dB_t 不能按一般的想法定义积分。Ito 首先给出了积分的定义, 并以随机积分(微分)方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds$$

的解来表达扩散过程。至今，从 Ito 开始的随机微积分不仅适用于扩散过程，而且适用于一大类非常广泛的随机过程——半鞅，成为随机分析的有力工具。

本书着重介绍随机微分方程的强解、弱解及它们与扩散过程和某些带跳跃的马氏过程之间的联系。本书只假定读者具有测度论、随机过程论基础与离散鞅论方面的基本知识。在这个基础上书中的内容是自封的。本书的主要内容曾在北京大学数学系及概率统计系研究生课中讲授。本书的对象是高年级大学生、研究生及对基本理论及其应用有兴趣的科技人员。

本书第一章讨论 Brown 运动的随机积分。这是经典随机微积分的主要内容。虽然它们是第二章的特例，这里还是用较多的篇幅叙述并证明。一则对于只需要经典情形的读者，例如不准备专门从事随机过程理论研究的读者，提供必要的知识；再则也可把它们当作现代随机积分理论的背景。此外，读者也可以根据具体情况，跳过第二章与第三章的某些节段，也可以跳过第一章直接进入第二章。第二章的前三节介绍了随机过程一般理论的梗概（对于希望更全面学习与了解现代鞅论的读者可参考 [Y], [HWY], [RY]。这方面的结果也可以参考 [J], [DM]）。然后介绍半鞅的随机积分和连续半鞅的 Ito 公式（我们把不连续情况放到第七章讨论）。本书第三章讨论连续半鞅的随机微分方程的强解和 Ito 方程的弱解。第四章讨论马氏型 Ito 方程弱解的存在唯一性条件，介绍了著名的 Stroock-Varadhan 定理，并且在存在唯一条件的基础上构造了扩散过程。第五章讨论一维 Ito 方程与一维扩散，着重论述了边界点的分类，讨论了扩散的常返性与保守性。第六章是带边界的随机微分方程与扩散，介绍了 Fichera 边界分类。第七章给出了一般半鞅的分解与 Ito 公式，并讨论拟左连续的 σ 有限点

过程的随机积分及带有平稳点过程积分的随机微分方程。这种方程的解是既有连续部分又有跳跃部分的强马氏过程的典型情形。

在本书的最后，有一个关于连续时间鞅和 Brown 运动构造及凸函数的性质的简短的附录。

严加安同志对原稿提出了许多宝贵的意见，笔者在此对他致以深切的感谢。

目 录

第一章 Brown 运动的随机积分	(1)
§ 1.1 有关 Brown 运动的某些性质.....	(1)
§ 1.2 Ito 积分的可积函数类.....	(9)
§ 1.3 平方可积鞅与局部平方可积鞅.....	(20)
§ 1.4 对 (\mathcal{F}_t) Brown 运动的 Ito 积分.....	(23)
§ 1.5 Ito 积分的例子.....	(35)
§ 1.6 关于无穷限情形的注记.....	(39)
§ 1.7 Ito 过程与 Ito 积分的链法则——Ito 公式.....	(42)
§ 1.8 指数上鞅与指数鞅.....	(56)
§ 1.9 随机积分的内蕴时间.....	(62)
§ 1.10 Brown 运动的平移与 Girsanov 变换.....	(67)
§ 1.11 Brown 参考族及关于它的局部鞅.....	(78)
习题.....	(82)
第二章 鞅与鞅的随机积分	(86)
§ 2.1 严格事前 σ 代数及可料时.....	(87)
§ 2.2 截口定理.....	(93)
§ 2.3 过程的投影理论与 (DL) 类下鞅的 Doob-Meyer 分解.....	(111)
§ 2.4 局部平方可积鞅的特征与随机积分.....	(131)
§ 2.5 局部平方可积鞅的分解.....	(146)
§ 2.6 半鞅及对半鞅的随机积分.....	(150)
§ 2.7 连续半鞅的 Ito 公式与随机微积分计算.....	(160)
§ 2.8 连续半鞅的局部时.....	(174)
§ 2.9 Brown 局部时的 Engelbert-Schmidt 零一律.....	(190)
习题.....	(193)

第三章 随机微分方程的一般概念	(196)
§ 3.1 连续半鞅的随机微分方程.....	(196)
§ 3.2 简单的例子.....	(213)
§ 3.3 Brown 运动的随机微分方程·弱解 与分布唯一性.....	(222)
§ 3.4 弱解与鞅问题.....	(243)
§ 3.5 Prohorov-Skorohod 方法	(249)
§ 3.6 (弱)解的存在性.....	(255)
§ 3.7 含 δ 函数的 Ito 过程与 Ito 公式.....	(264)
习题.....	(266)
第四章 齐次马氏型随机微分方程	(268)
§ 4.1 解的存在性与分布唯一性.....	(268)
§ 4.2 有限时间可能爆炸的解.....	(300)
§ 4.3 随机微分方程的解和扩散过程.....	(310)
§ 4.4 扩散族的弱收敛.....	(324)
习题.....	(327)
第五章 一维随机微分方程与一维扩散	(329)
§ 5.1 可测系数情形的弱解与分布唯一性·强解.....	(329)
§ 5.2 轨道唯一性与强解.....	(339)
§ 5.3 比较定理.....	(347)
§ 5.4 Stratonovich 方程及其近似.....	(350)
§ 5.5 一维随机微分方程解的性质与边界点的分类.....	(353)
§ 5.6 例子.....	(371)
§ 5.7 Brown 桥	(381)
习题.....	(393)
第六章 具有边界的随机微分方程	(396)
§ 6.1 反射 Brown 运动及其边界局部时.....	(396)
§ 6.2 半直线上的 Brown 运动.....	(399)
§ 6.3 半空间的随机微分方程.....	(410)
§ 6.4 退化情形的例子.....	(425)
习题.....	(433)

第七章 对半鞅的积分和含点过程的随机微分方程	(436)
§ 7.1 不连续的局部鞅·半鞅及其积分的性质.....	(436)
§ 7.2 正交鞅测度和对它的积分.....	(454)
§ 7.3 取值于 R^d 的点过程·整值随机测度及其分解.....	(457)
§ 7.4 半鞅的局部特征和按随机测度的分解.....	(469)
§ 7.5 取值于可测空间的点过程及其积分.....	(474)
§ 7.6 半鞅的 Ito 公式.....	(478)
§ 7.7 Poisson 点过程和独立增量过程的分解.....	(485)
§ 7.8 含 Poisson 点过程积分的随机微分方程.....	(502)
§ 7.9 Brown 运动的 弋巡律.....	(516)
附录	(535)
一般记号.....	(546)
特殊记号首次出现的章节	(549)
名词索引.....	(552)
参考文献.....	(557)

第一章 Brown 运动的随机积分

§1.1 有关 Brown 运动的某些性质

在本节中, (Ω, \mathcal{F}, P) 恒指某个概率空间, 其中 Ω 为样本点的全体, \mathcal{F} 为 Ω 上的一个 σ 代数, 而 P 是 \mathcal{F} 上的一个概率测度. 我们用 d 维列向量 x 记 d 维欧氏空间 R^d 中的元, 并用 x^T 表示它的转置, 用 $|x|$ 表示它的模.

记

$$R^{[0, \infty)} = \{u; u = (u_t)_{0 \leq t < \infty}\},$$
$$\mathcal{B}(R^{[0, \infty)}) = \sigma(u_t; 0 \leq t < \infty)$$

(由一切 u_t 生成的最小 σ 代数, 即使得一切 u_t 均为可测的最小 σ 代数).

我们称 (Ω, \mathcal{F}) 到 $(R^{[0, \infty)}, \mathcal{B}(R^{[0, \infty)}))$ 的一个可测变换为随机过程. 一般用 X, Y, Z, \dots 或 $(X_t)_{0 \leq t < \infty}, (Y_t)_{0 \leq t < \infty}, \dots$ 等 (有时也用希腊字母, 例如 $\xi(t)$) 表示.

定义 1.1 若 U 为完备可分距离空间, 由 U 的全体开子集生成的 σ 代数记为 $\mathcal{B}(U)$, 则可测空间 $(U, \mathcal{B}(U))$ 称为 Polish 空间.

例 1 设

$$C[0, \infty) = \{w; w = (w_t)_{0 \leq t < \infty}, w_t \text{ 为 } t \text{ 的连续函数}\}.$$

在 $C[0, \infty)$ 中定义距离 ρ_C :

$$\rho_C(w^{(1)}, w^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|w^{(1)} - w^{(2)}\|_n \wedge 1}{2^n}$$
$$(w^{(i)} = (w_t^{(i)})_{0 \leq t < \infty}, i = 1, 2), \quad (1.1)$$

其中

$$\|w\|_n = \sup_{0 < t < n} |w_t|. \quad (1.2)$$

那么 $C[0, \infty)$ 在 ρ_c 下成为完备可分距离空间, $(C[0, \infty), \mathcal{B}(C[0, \infty)))$ 就是一个 Polish 空间.

显然, 如果用 $[0, n]$ 代替 $[0, \infty)$, 那么相应的 $C[0, n]$ 在模 $\|\cdot\|_n$ 下成为 Banach 空间. 所以实际上 $C[0, \infty)$ 是 Frechet 空间, 也就是具有不变距离 (即满足 $\rho_c(w^{(1)} + w, w^{(2)} + w) = \rho_c(w^{(1)}, w^{(2)})$) 的完备可分距离线性空间. 在这空间中收敛性 $w_t^{(n)} \rightarrow w_t$ 等价于 $w_t^{(n)}$ 在 $0 \leq t < \infty$ 上局部一致收敛到 w_t , 即在 $[0, \infty)$ 的任意紧子集上均为一致收敛.

为了使记号简洁, 今后我们记 W^d 为 $C[0, \infty)$ 的 d 次笛卡儿乘积.

我们指出 $\mathcal{B}(W^d)$ 就是在 W^d 上下述坐标过程

$$X_t(w) \equiv w_t, \quad w = (w_t)_{0 \leq t < \infty} \in W^d$$

生成的 σ 代数. 为此我们先记后面的 σ 代数为 \mathcal{B}' .

首先我们注意在 t 固定时 $X_t(w)$ 是 W^d 上的连续函数 (确切地说, 是连续泛函). 于是对这个 t 及任意实数 a , $\{w: w_t < a\}$ 是 W^d 的开集, 因此 $\{w: w_t < a\} \in \mathcal{B}(W^d)$. 由典型逼近就得到 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}(W^d)$; 反之, 对于任意 n, m 及 $w^0 \in W^d (w^0 = (w_t^0)_{0 \leq t < \infty})$, 我们有

$$\begin{aligned} & \left\{ w: \|w - w^0\|_n < \frac{1}{m} \right\} \\ &= \bigcap_{\substack{t_i \text{ 有理} \\ 0 < t_i < n}} \left\{ w: |w_{t_i} - w_{t_i}^0| < \frac{1}{m} \right\} \in \mathcal{B}', \end{aligned}$$

因此 $\mathcal{B}(W^d) \subset \mathcal{B}'$. 这样我们就得到 $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(W^d)$.

定义 1.2 由可测空间 (Ω, \mathcal{F}) 到 $(W^d, \mathcal{B}(W^d))$ 的可测变换 $X (\equiv (X_t(w))_{0 \leq t < \infty})$ 称为 (Ω, \mathcal{F}) 上的连续随机过程 (显然当 t 固定时 $X_t(w)$ 是取值于 R^d 的随机变量, 即 d 维随机向量).

定义1.3 概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的连续随机过程

$$B = (B_t)_{0 \leq t < \infty}$$

称为 d 维 Brown 运动, 如果 $B_0 = 0$, B_t 是 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的独立增量过程:

$$E(B_t - B_s)(B_u - B_v) = 0 \quad (\forall v < u \leq s < t),$$

而且 $B_t - B_s$ 遵从数学期望为 0, 方差矩阵为 $(t-s)I$ (I 为单位矩阵) 的 Gauss (正态) 分布 (记成 $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)I)$).

如果 $(W^d, \mathcal{B}(W^d), P)$ 上的坐标过程 $X_t(w) \equiv w_t$ 是 Brown 运动且 $P(w_0 = 0) = 1$, 则我们称 P 为 Wiener 测度, $(W^d, \mathcal{B}(W^d), P)$ 为 Wiener 空间. 今后我们专用记号 P^w 表示 Wiener 测度.

定义1.4 \mathcal{F} 的子 σ 代数族 $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$ 称为参考族, 如果它对 t 是递增的右连续族, 即

$$\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2} \quad (t_1 < t_2); \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_n \mathcal{F}_{t+\frac{1}{n}} (\equiv \mathcal{F}_{t+}).$$

对于 \mathcal{F} 的任意子 σ 代数族 $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$, 其右连续化族 $(\mathcal{F}_{t+})_{0 \leq t < \infty}$ 总是参考族. 记

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_t \mathcal{F}_t$$

(这里 $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ 表示含 σ 代数 \mathcal{F} 及 \mathcal{G} 的最小 σ 代数). 若在 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ 上定义了概率测度 P , σ 代数 \mathcal{F}_t 可以在 P 下完备化 (即加进一切 \mathcal{F}_∞ 零测集), 我们把它记成 $\overline{\mathcal{F}}_t^P$, 或简记成 $\overline{\mathcal{F}}_t$. 易见

$$\overline{(\mathcal{F}_{t+})} = \overline{\mathcal{F}_{t+}},$$

我们把它简写成 $\overline{\mathcal{F}}_{t+}$, 并称 $(\overline{\mathcal{F}}_{t+})$ 为 (\mathcal{F}_t) 的完备化参考族.

有时我们也把参考族 (\mathcal{F}_t) 与概率空间 (Ω, \mathcal{F}) 放在一起, 记成 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty})$ (或 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t))$). 随机过程 $X = (X_t)_{0 \leq t < \infty}$ 称为 (\mathcal{F}_t) 适应过程, 如果对任意 $t \geq 0$ 固定, X_t 均为 \mathcal{F}_t 可测 (简记成 $X_t \in \mathcal{F}_t$).

定义1.5 设 $X = (X_t)_{0 \leq t < \infty}$ 是 (Ω, \mathcal{F}) 上的随机过程. 记

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_s; s \leq t)$$

(括号中的随机变量所生成的 σ 代数),

$$\mathcal{F}_t^X = \mathcal{F}_{t+}^0.$$

我们称 (\mathcal{F}_t^X) 为 X 生成的参考族.

我们先指出 Brown 运动的一个等价条件.

命题1.1 对于 (Ω, \mathcal{F}, P) 上零初值的连续随机过程 B 而言, 下列三个叙述彼此等价:

1° B 是 Brown 运动;

2° 对任意 $\lambda \in R^d$ 及 $t > s \geq 0$ 恒有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s^0) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} \quad (\text{a.e.d}P); \quad (1.3)$$

3° 对任意 $\lambda \in R^d$ 及 $t > s \geq 0$ 恒有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s^B) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} \quad (\text{a.e.d}P). \quad (1.4)$$

证明 1° \Rightarrow 2°. 由于 B_t 是独立增量过程, 对于 $t > s \geq 0$ 及任意 $\eta \in \mathcal{F}_s^0$ 有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} \eta) = E e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} E \eta.$$

取 $\eta = I_A$ (I_A 为 \mathcal{F}_s^0 中任意一个集合 A 的示性函数), 根据条件期望的定义, 上面公式等价于

$$E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s^0) = E e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} \quad (\text{a.e.d}P).$$

这就是(1.3).

2° \Rightarrow 3°. 取 n 使 $s + \frac{1}{n} < t$. 由(1.3)及条件期望的性质

$$\begin{aligned} & E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_{s+\frac{1}{n}}^0) \\ &= e^{i\lambda^T(B_{s+\frac{1}{n}} - B_s)} E(e^{i\lambda^T(B_t - B_{s+\frac{1}{n}})} | \mathcal{F}_{s+\frac{1}{n}}^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 \frac{1}{n}} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 (t-s-\frac{1}{n})} \quad (\text{a.e.dP}) \\
&\rightarrow e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 (t-s)} \quad (n \rightarrow \infty). \tag{1.5}
\end{aligned}$$

令 $n^* = -n$. 记

$$\tilde{\mathcal{F}}_{n^*} = \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n^*}}^0 \quad (n^* = -1, -2, \dots),$$

$$X_{n^*} = E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \tilde{\mathcal{F}}_{n^*}) = E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_{s+\frac{1}{n}}^0).$$

于是 X_{n^*} 是一个复值的逆时鞅列, 而且 $E|X_{n^*}| = 1 (< \infty)$. 因此 X_{n^*} 存在 L_1 极限. (1.5) 就变成

$$E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_{s+\frac{1}{n}}^0) \xrightarrow{L_1} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 (t-s)}.$$

同时, 逆时鞅列 X_{n^*} 与其 L_1 极限 $X_{-\infty} (\equiv e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 (t-s)})$ 一起组成 $(\tilde{\mathcal{F}}_{n^*}, \tilde{\mathcal{F}}_{-\infty})$ 逆时闭鞅列, 其中

$$\tilde{\mathcal{F}}_{-\infty} \equiv \mathcal{F}_{s+}^0.$$

也就是说

$$\begin{aligned}
E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_{s+}^0) &= E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \tilde{\mathcal{F}}_{-\infty}) \\
&= X_{-\infty} = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 (t-s)} \quad (\text{a.e.dP}).
\end{aligned}$$

此即(1.4).

3° \Rightarrow 1°. 对于 \mathcal{F}_s^B 可测的任意 d 维随机变量 η 及 $\lambda, \mu \in R^d$, $t > s \geq 0$, 利用3°, 我们有

$$\begin{aligned}
E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} e^{i\mu^T \eta}) &= E[E e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} e^{i\mu^T \eta} | \mathcal{F}_s^B]) \\
&= E[e^{i\mu^T \eta} E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s^B)] \\
&= e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2 (t-s)} E e^{i\mu^T \eta}.
\end{aligned}$$

这说明 $B_t - B_s$ 与 η 是相互独立的, 而且 $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)I)$.

因此 $(B_t)_{0 \leq t < \infty}$ 是 Brown 运动。

命题 1.1 说明 (1.3) 可以作为 Brown 运动的特性刻画。由此我们可以把 Brown 运动的定义稍作推广。

定义 1.6 对于 (Ω, \mathcal{F}, P) 及其上的完备参考族 (\mathcal{F}_t) (有时简记为 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$)，我们称 (Ω, \mathcal{F}, P) 上连续的 (\mathcal{F}_t) 适应过程 $B = (B_t)_{0 \leq t < \infty}$ 为 (d 维) (\mathcal{F}_t) Brown 运动，如果 B 满足：对 $\forall \lambda \in R^d, t > s \geq 0$ 恒有

$$E(e^{i\lambda^T(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2(t-s)} \quad (\text{a.e. } dP). \quad (1.6)$$

注意此时 B_0 未必为零。所以有时也称 B 为初值 B_0 的 (\mathcal{F}_t) Brown 运动。 B_0 可以是 \mathcal{F}_0 中的任意随机变量。

仿命题 1.1 证明中 $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ 的部分的证明，我们也有：对 (\mathcal{F}_t) Brown 运动 $B, B_t - B_s$ 与 \mathcal{F}_s 独立 (因而也与 B_0 独立)。

注 1 利用 $\mathcal{F}_s^B \subset \mathcal{F}_s$ 及 (1.4) 可知：若 B 是 (\mathcal{F}_t) Brown 运动，则 $B_t - B_0$ 是 Brown 运动。

注 2 易见： B 是 (\mathcal{F}_t) Brown 运动，当且仅当 B 是 $(\overline{\mathcal{F}_t})$ Brown 运动 (记住，记号 $\overline{\mathcal{F}_t}$ 是 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ 的完备化)。

注 3 (1.6) 中只须假定对有理的 λ 成立就足够了。

注 4 如果 (\mathcal{F}_t) 不是参考族，而只是 \mathcal{F} 的递增子 σ 代数族 (不右连续)，那么 (1.6) 保证了 B 是 (\mathcal{F}_{t+}) Brown 运动。

在本章中，我们将定义随机过程对 (\mathcal{F}_t) Brown 运动的积分。

首先我们指出：沿 (\mathcal{F}_t) Brown 运动的轨道定义积分一般是行不通的 (除非把“可积”函数——随机过程——类限制得很小，这样也就失去了意义)。为此需要回忆 Brown 运动的如下特性：

引理 1.1 (Levy 的振动性质) 设 B 为 Brown 运动，又

$$s_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = s_2,$$

$$\Delta t_h = t_{h+1} - t_h, \quad \Delta B_{t_h} = B_{t_{h+1}} - B_{t_h}, \quad h = \max_{0 < h < n-1}$$