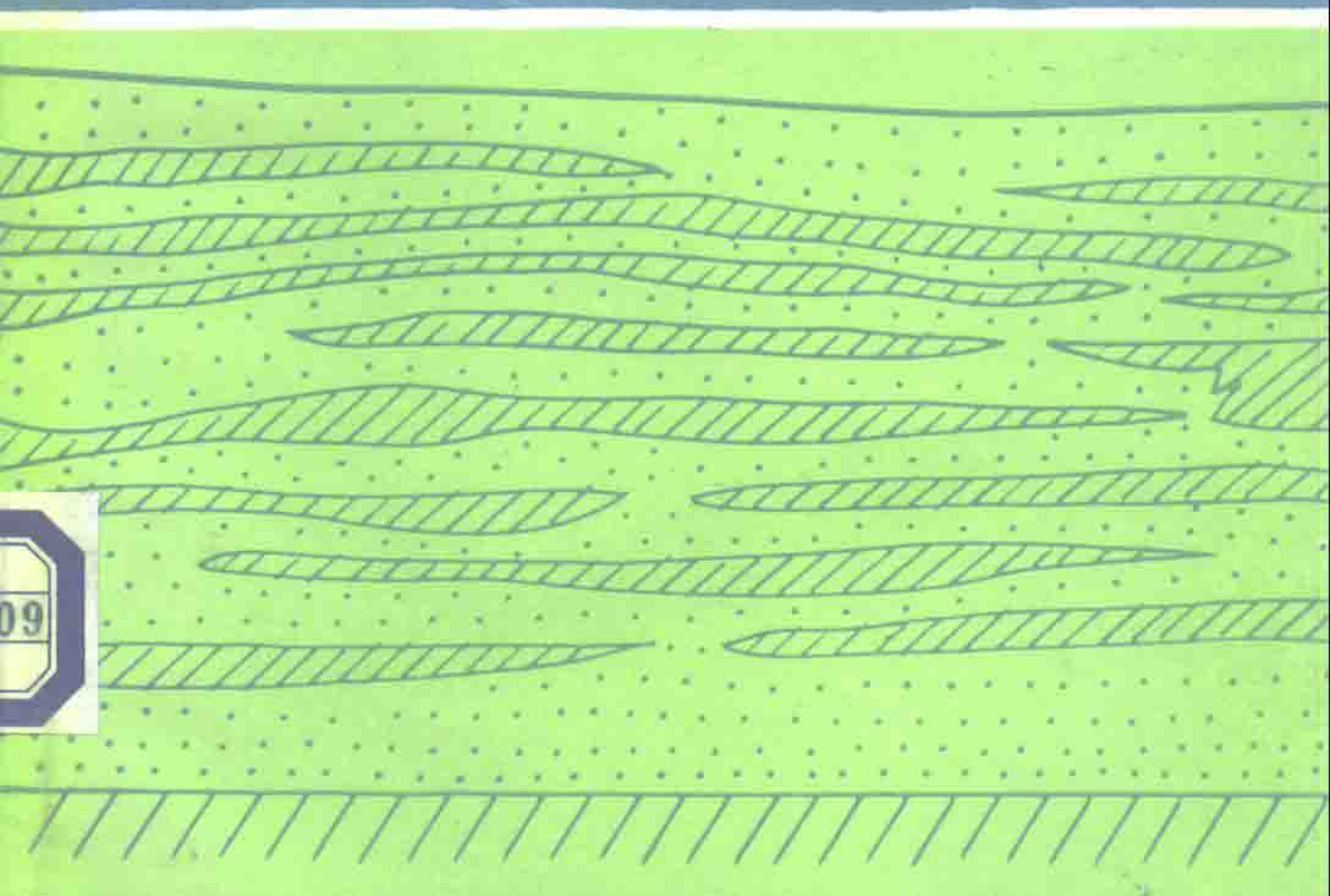


国家自然科学基金资助项目

地下水资源 评价方法研究及其应用

傅泽周 郭东屏 张石峰 等著



地质出版社

国家自然科学基金资助项目

地下水资源评价方法研究 及其应用

傅泽周 郭东屏 张石峰 著
潘孔钊 郭 军 张 鹏

地 质 出 版 社

(京)新登字085号

内 容 简 介

本书主要介绍地下水资源评价方法和玛纳斯河扇区评价管理的研究成果。全书内容主要包括：几种典型含水层系统的数学模型，等参数水均衡和溶质质量均衡的有限元法，改进的边界元法和有限元法，高阶精度的差分方法，傍河并流的电模拟对比实验，玛纳斯河扇区区域水文地质，以及该区地下水资源的评价及管理模型等。

本书可供水文地质、农田水利、工程勘探、石油地质等方面的科研、生产人员及高等院校的有关师生参考，也可供应用数学工作者参考。

2W63/27

国家自然科学基金资助项目
地下水资源评价方法研究及其应用

傅泽周 郭东屏 张石峰 著
潘孔钊 郭 军 张 鹏

*
责任编辑：高天平

地质出版社出版发行

(北京和平里)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店总店科技发行所经销

*

开本：787×1092¹/₁₆ 印张：10 字数：231000
1992年1月北京第一版·1992年1月北京第一次印刷
印数：1—1800册 定价：6.00元
ISBN 7-116-00933-7/P·796

前 言

玛纳斯河流域地处天山北麓，是新疆重要的工农业生产基地，也是重要的开发建设地区。为适应发展的需要，查清并评价该地区地下水资源，提出合理的开发方案，已是当务之急。正是为此目的，傅泽周等申请了国家自然科学基金资助项目《新疆玛纳斯河洪积扇系统地下水资源评价及方法研究》。本书实际上是此项目的成果总结，在地下水资源评价方法研究和玛河扇区的评价管理两个方面取得了一些重要成果。近年来，有关地下水资源评价方法的佳著已出版了一些，但因这一学科发展很快，当前又出现了一些新问题和新领域。我们本着探索和交流研究成果的目的撰写了本书，希望能在评价方法研究与水资源管理两方面起些作用。

全书共分八章，主要内容有二：一是在阐述与论证了地下水数值模拟方法的特点、发展方向和几种典型含水层系统数学模型的基础上，介绍了等参数水均衡有限元法、溶质质量均衡有限元法、改进边界元法和有限元法、高阶精度的差分方法及傍河井流的电模拟对比实验等方面的研究成果；二是介绍了玛河扇区区域水文地质，以及应用水均衡法、有限元法、边界元法对扇区地下水资源的评价和管理方面的研究成果。本书是一部具有应用价值的学术性著作，所介绍的内容是当前几种评价方法的新发展和应用，可供水文地质工作者借鉴，也可作为方法研究和实际应用的一种启示。这里所研究的方法对研究热传导问题和扩散问题也具有参考价值。

本书中的方法研究和扇区评价，均自成体系，但每一具体内容又独立成章。因此，读者可根据需要选读部分内容。作者在公式推导过程中不仅力求严谨，而且注意了应用。由于篇幅有限，有些公式推导没有详细列出，只说明了思路，深表歉意。

此书的著者有傅泽周（序言，第一、二、五章，第八章§1节与张石峰合作）、郭东屏（第三、六章）、张石峰（第四章§2节、第八章§1节、§2节之二和§3节）、潘孔钊与郭军（第七章、第八章§2节之一）、张鹏（第四章§1节，第八章§2节之三）六位同志。全书由傅泽周审定。

武汉水电学院张蔚榛、李文渊同志，山东大学孙讷正同志，南京大学朱学愚、陈葆仁、谢春红同志，新疆工学院徐彰德、张慧生同志，新疆石油学院金积祖同志，地矿部水文地质工程地质研究所曲焕林、伍兆聪同志，新疆第二水文队孙晓明、陈冰、刘斌等同志对研究课题或书稿提出了很多宝贵意见和帮助，作者在此表示衷心感谢！书稿的清抄和图件的绘制，李守家、蒋惠平、郭锦荣、李新英等同志作了很多的工作，在此一并表示谢意！

由于我们的理论水平不高，实践经验不足，书中缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

作 者

1989年11月

目 录

前言

第一章 绪论	1
§ 1 地下水资源开发过程中的问题及其数值模拟	1
§ 2 地下水资源评价方法的发展趋势	2
§ 3 地下水数值模拟方法的特点和发展方向	2
第二章 几种典型含水层系统的数学模型	5
§ 1 非稳定流的偏微分方程	5
§ 2 定解条件	7
一、边界条件	8
二、初始条件	9
§ 3 典型的含水层系统的数学模型	9
一、多层含水层地下水流的数学模型	9
二、饱和-非饱和带地下水流的数学模型	12
三、孔隙-裂隙含水层地下水流的数学模型	13
第三章 等参数水均衡有限元法及溶质质量均衡有限元法	16
§ 1 数学模型的建立	16
一、渗流问题的数学模型	16
二、流体动力弥散问题的数学模型	17
§ 2 剖分、局部均衡域、基函数与插值函数	18
§ 3 等参数水均衡有限元法	19
一、通过 (ΔL) 流入与流出量差值的计算	20
二、局部均衡域内贮量变化的计算	23
三、有限元方程与方程组	25
§ 4 等参数溶质质量均衡有限元法	28
一、通过 (ΔL) 流入与流出的溶质质量差值的计算	28
二、局部均衡域内溶质总质量变化的计算	32
三、有限元方程与方程组	33
§ 5 等参数溶质质量均衡近似有限元法	35
§ 6 等参数水量和质量均衡有限元法与其它方法的比较	39
一、与线性有限元法的比较	39
二、与等参数里茨、伽辽金有限元法的比较	40
三、结论	43
第四章 改进的边界元法及有限元法	44
§ 1 非均质各向同性含水层中不稳定流的边界单元法	44
一、基本关系式	44
二、基本关系式的离散和计算表达式	46

三、计算框图及说明	52
四、数值计算例子	52
§ 2 地下水非稳定流的有限单元法及一维最紧凑存储方法的应用	54
一、地下水非稳定流的有限元方程	55
二、按结点集成有限元方程组及一维最紧凑存储方法	57
三、非线性问题的处理	60
四、应用简况	60
第五章 高阶精度的差分方法	64
§ 1 最简承压非稳定流方程差分格式的改进	64
一、差分格式	64
二、精度的改善	65
§ 2 一维高阶精度差分格式	66
一、差分格式的相容性	67
二、逼近的高阶精度	67
§ 3 一维高阶精度差分格式的稳定性	69
§ 4 一维高阶精度差分格式的应用及求解方法	71
§ 5 二维最简承压非稳定流方程的差分格式及其稳定性	72
一、差分格式	72
二、差分格式的稳定性	74
§ 6 二维高阶精度的差分格式	76
§ 7 二维高阶精度差分格式的稳定性	78
一、关于两层差分格式的稳定性分析	78
二、关于三层差分格式的稳定性分析	80
§ 8 二维高阶精度差分格式的应用	82
第六章 傍河二维与三维井流的电模拟对比实验研究	84
§ 1 问题的提出及两类数学模型	84
§ 2 边界条件概化与实验模型设计	86
§ 3 模型边界条件控制与电学量的测定	88
一、边界条件的控制与电位的测定	88
二、电阻率、电流及总电压的测定	89
§ 4 傍河单井二维与三维渗流模拟实验成果分析	90
一、渗流特征比较分析	90
二、流量比较分析	93
§ 5 傍河群井二维与三维渗流模拟实验成果分析	97
一、渗流特征比较分析	97
二、井流量比较分析	99
§ 6 结论与建议	102
第七章 玛河冲洪积扇区自然地理及区域水文地质	103
§ 1 自然地理	103
一、地形和气候	103
二、水利资源及其转化	104

§ 2 区域水文地质	105
一、概况	105
二、地下水的赋存分布规律	107
三、地下水的补给与排泄	110
四、地下水径流条件的改变及降落漏斗的形成	114
五、地下水位动态特征	116
第八章 玛河冲洪积扇区地下水资源评价与管理	121
§ 1 地下水流的数学模型	121
一、水文地质条件的概化及数学模型的建立	121
二、数学模型的校正	124
§ 2 应用几种方法评价地下水资源	128
一、水均衡法	128
二、有限元法	132
三、非均质不稳定流边界单元法	134
§ 3 地下水资源管理模型	140
一、两种分布参数的管理方法	140
二、地下水系统的线性化	142
三、稳定流管理模型及其应用——石河子新水源地的最佳选点	144
四、非稳定流管理模型及其应用——控制洪积扇主要开发区水位持续下降的方案	147
参考文献	151

第一章 绪 论

§ 1 地下水资源开发过程中的问题及其数值模拟

地下水是人类不可缺少的一种重要的自然资源,对人类的生活、工农业生产及城市建设都起着重大的作用。随着工农业生产的迅速发展,对地下水资源开发利用的规模越来越大。这种开发应服从人类生活和生产的实际需要,但也不能违背客观规律。如果开发不当,必然会产生这样或那样的问题,给人类带来不同程度的危害^[25]。一般来说,如长期超量地开采地下水,必然会造成持久的区域性地下水位下降。其后果是:部分水井吊泵及枯井,甚至使水源地枯竭,对正常开采造成严重影响。长期的区域性水位下降还会带来水质恶化,地面沉降,地下空气缺氧等严重危害。由于区域性地下水位下降的根本原因就是长期的超量开采地下水,因此,要避免区域性地下水位下降,就需要做到合理地开发利用地下水资源,既要尽可能地满足实际用水的最大需要,又要符合该地区可能开采的数量标准。否则,开采不足,就达不到充分取水的目的;开采超量,就会产生各种危害。要找到一个最优开采的方案,就需要进行较精确地地下水资源的数量评价。

为了使评价能够比较切合实际,早在1935年,美国学者泰斯就在理想条件下建立了承压水非稳定流公式。这些理想条件是:

- (1) 含水层均质,各向同性;
- (2) 含水层等厚,水平分布,面积无限广阔;
- (3) 含水层的导水系数是常数;
- (4) 抽水井是完整井;
- (5) 抽水井的直径无限小;
- (6) 当水头改变时,孔隙介质中的释水是瞬时完成的,且贮水系数为常数;
- (7) 含水层的顶、底板不透水;
- (8) 渗流符合达西定律。

泰斯所设想的均质、等厚、各向同性、无限广阔的理想含水层,在现实的自然界中是不存在的。实际上含水层的水文地质条件往往是比较复杂的。一般来说,含水层是非均质、非等厚、各向异性的;隔水顶、底板并非不透水,除了侧向补给外还存在垂向补给;含水层的边界形状不规则,边界条件复杂;有时还有可能由于抽水而使含水层中一部分地区的承压水转变为无压水等。对于这样的含水层,要以泰斯公式为代表的解析法求解和评价是很困难的,甚至现在还不可能。对于某些情况,即使得到解析表达式也难以进行数值评价。但是,用电子计算机武装起来的计算方法——数值模拟方法,为解决这类复杂的地下水资源计算问题开辟了新的途径。在我国,应用数值模拟方法评价地下水资源的工作,经过20多年的研究与应用,已经有了很大发展,为我国四化做出了重要的贡献。

§ 2 地下水资源评价方法的发展趋势

尽管人类开发利用地下水的历史十分悠久,但对地下水运动规律的认识却很迟缓。19世纪以前,还谈不上对地下水进行定量评价。直到1856年,法国学者达西通过实验提出了水在孔隙介质中渗透的达西定律,人们才开始对地下水渗流运动有了定量的认识。从这以后,直到20世纪30年代,由于生产力发展的水平不高,人们对地下水运动规律的认识也仅仅停留在单井稳定流状态的研究上。本世纪30年代,以美国为代表的一些国家对地下水的需要量大增,开采规模越来越大,不少地区发生了显著的地下水位下降。地下水明显地呈现非稳定流状态,应用原有的稳定流理论已不能解释和描述这种非稳定的运动过程。

美国学者泰斯及时地研究和掌握了生产发展中提出的非稳定流问题^[34],并利用30年代初期温策尔和迈因策尔所获得的潜水含水层与承压含水层的抽水试验资料,发现潜水非稳定运动过程与潜水含水层疏干有关,承压水非稳定运动过程与承压含水层弹性释放有关。泰斯进而认识到,在受达西定律支配的地下水运动范围内,含水层中的水文地质条件和热学系统中的热学条件存在着类比关系。因此,泰斯在好友卢宾的帮助下,应用热学系统的数学描述和推导方法,在1935年第一次提出了实用的非稳定井流公式——泰斯公式。泰斯公式的出现,使地下水资源评价的发展进入了一个新阶段。这个新阶段的特点是,不仅把含水层视为导水层,而且也视为贮水层,是一个弹性体。这种认识为非稳定流理论的进一步发展奠定了基础。

1935年以后,一些学者开拓了泰斯公式的应用范围,对某些偏离泰斯公式理想条件的含水层进行了研究。例如,雅各布、汉士什等人提出了具有越流的含水层的非稳定流公式^[34],使人们从研究单一含水层的非稳定流问题过渡到研究多层含水层的非稳定流计算问题。又如,博尔顿提出了具有滞后疏干效应的非稳定流公式。尽管如此,以泰斯公式为代表的非稳定流公式,难以解决生产发展过程中提出的大面积复杂条件下的地下水资源评价问题。例如,大面积非均质含水层中复杂条件下的地下水运动规律问题,就无法应用以泰斯公式为代表的公式进行较精确的评价。

到50年代,某些学者利用达西定律与欧姆定律之间的类似关系,以及地下水流基本微分方程的差分近似,创造了应用电网络模拟非稳定流的模型。但是,由于电网络模型本身缺乏通用性,存在很大的局限性,对于潜水问题、水质问题等都还不便解决。因此,60年代中期以来,随着快速大容量电子计算机的出现和广泛应用,数值计算方法在地下水资源评价中得到逐步的推广,对于非稳定流的解析法难以解决的大面积复杂条件下的水资源评价问题,应用数值方法在计算机上都能得到较好的模拟。不仅如此,这种数值模拟方法具有明显的通用性,不仅能有效地模拟地下水运动问题,还能模拟水质问题、地热问题及水管理问题等。可以预料,随着快速大容量数值计算机的发展和应用,更加广泛深入地运用数值模拟方法、更加精确地评价地下水资源等问题,是地下水资源评价方法发展的必然趋势。

§ 3 地下水数值模拟方法的特点和发展方向

所谓地下水数值模拟方法是指用数学模型描述地下水系统的运动状态,并应用数值方

法在数值计算机上求数学模型的解，以模拟该系统动态的一种方法。这种模拟方法在评价地下水的水量、水质、地热，以及地下水管理等问题上都得到了广泛的应用，有的已经应用得比较成熟，有的还需研究提高。应用电子计算机进行数值模拟，已不再被认为仅仅是代替繁重的重复劳动，而是作为一种解决应用解析法无法解决的水文地质问题的有效方法。地下水数值模拟法虽然比解析法适应性强、应用面广、更能满足实际需要，但是应用计算机进行数值模拟的数学模型，在具体的水文地质问题中都有不同程度的简化和近似，再加上其它方面的误差，数值模拟可能成功，也可能失败。因此，数值模拟还仅仅是一种“数值实验”。即使模拟成功，得到比较合理的结果，也不可能等同于水文地质的实际测量结果。数值模拟的结果应当用实际测量值来检验。实际上，地下水的数值模拟并不像水文地质客体那样具体、真实。不管数值模拟用处多大，它决不能完全代替真实的水文地质工作，具体的水文地质工作仍然是不可缺少的。

尽管如此，数值模拟方法的优点还是突出的，主要表现在：

(1) 数值模拟具有广泛的适用性，已用于水量、水质、地热及地下水管理问题的计算。对于复杂的含水层，不管是承压水还是潜水，是二维流还是三维流，都能成功地进行模拟。

(2) 数值模拟省钱、省工、省时。数值模拟是在通用数值计算机上进行的，不需要建立专用设备，这是省钱的第一点。其次，搞一次抽水试验，要消耗相当大的人力、物力和很长的准备时间，在资金上的消耗也是很大的。对实际的地下水系统，通过各种情况的数值模拟，必然可减少某些抽水试验，比较精确地模拟出实际系统在相应情况下的运动状态。仅从这两个方面来看，就可大大地缩短时间，而且还可节省不少资金和人力、物力。

(3) 有些地下水问题的试验很难，甚至不能进行试验，但仍可在已有的观测资料的基础上进行数值模拟。例如，某水源地所有抽水井的深度均小于 h_0 ，我们要预测当水位下降到 h_0 后，每天供水 W_0 时的水位状态如何？通过实际抽水试验预报是根本不可能的，但通过数值模拟来预报是可行的。

(4) 数值模拟可以程序化，只要编出通用程序，对于不同地下水系统只需按规定整理好数据就可上机计算，并能较快地模拟出结果。

由于地下水数值模拟具备这些优点，它早已成为水文地质计算的重要手段，被广泛地推广使用。

我们认为，地下水数值模拟具有下列特点：

(1) 地下水数值模拟中的数值方法，无疑应该吸收计算数学中成熟的理论和先进的方法，但是地下水数值模拟方法并不等同于计算方法，它是从水文地质问题出发，以水文地质结论和试验观测数据为依据和检验标准的一种方法。

(2) 地下水数值模拟的任务是模拟地下水运动规律，解决水文地质问题。因此，数值模拟就不能拘于某种数学方法。现在已有的方法有有限差分法、有限单元法、边界单元法、概率统计法等多种方法。应用哪种方法好，就要看那种方法能有效、快速、比较精确地模拟出地下水的动态。

(3) 在地下水数值模拟中，应该重视数学模型的建立。诸如维数的确定、基本方程的选取、边界条件的提出与处理等问题是否恰当，要看它是否能够真实地描述所研究的地下水系统。否则，对所研究的地下水系统的数值模拟是无意义的。

(4) 地下水数值模拟的方法常常受到地下水问题本身的启发, 可以利用某些水文地质问题的直观现象和简单推理提出新的数值方法。单元均衡有限元法就是重要的例子。

从目前来看, 我们认为地下水数值模拟可以从下列几个方面来发展:

(1) 进一步通过地下水的水量问题、地热问题的数值模拟研究, 达到更加合理地开发利用地下水和地热的目的;

(2) 通过水质问题的数值模拟研究, 达到保护水源、避免污染、减少危害的目的;

(3) 通过数值模拟方法, 加强切实可行的管理问题的研究, 制订长远规划, 监测开发利用情况, 充分发挥水资源的最大作用;

(4) 改进数值计算方法, 特别是提高精度与减少内存的研究, 仍然是提高与改进数值模拟的重要课题。

第二章 几种典型含水层系统的 数学模型

本章将根据地下水运动的达西定律和质量守恒原理两条基本定律，导出描述地下水运动一般规律的表达式——地下水运动的偏微分方程。再根据不同含水层系统的实际情况提出定解条件，进而分别讨论、确定出几种典型含水层系统的地下水流的数学模型。

§ 1 非稳定流的偏微分方程

由达西定律和质量守恒原理可以导出描述各种类型的地下水流的偏微分方程。这里仅以推导三维承压水非稳定流的偏微分方程为例，说明建立基本方程的思路与方法。

假设所讨论的承压含水层是可压缩的弹性体，在所考虑的承压含水层中任取一点 (x, y, z) ，并取以该点为中心、侧面平行于坐标面的长方微元体作为均衡单元。设其边长分别为 dx 、 dy 、 dz ，如图2-1。下面我们来分析这微元体中任一微小时段 dt 内的质量守恒问题。

由达西定律可知，在 dt 时段内沿 x 轴方向经断面CBGR流入均衡微元体的地下水的质量的近似值为

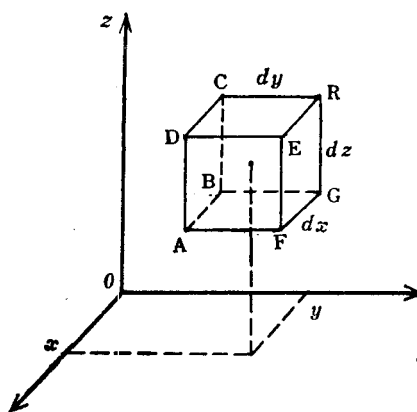


图 2-1 微元体均衡单元

$$-\rho \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right) K \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right) \frac{\partial H \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right)}{\partial x} dy dz dt$$

式中， ρ 为水的密度； K 为渗透系数； H 为水头。

同样，沿 x 轴方向经断面DAFE流出这个微元体的水的质量的近似值为

$$\begin{aligned} & -\rho \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) K \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) \frac{\partial H \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right)}{\partial x} dy dz dt \\ & = -\rho \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right) K \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right) \frac{\partial H \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right)}{\partial x} dy dz dt \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho K \frac{\partial H}{\partial x} \right) \Big|_{(x, y, z)} dx dy dz dt \end{aligned}$$

因此，在这时段内沿 x 轴方向流入这个微元体水的质量增量是

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho K \frac{\partial H}{\partial x} \right) dx dy dz dt \quad (2-1)$$

完全类似地可以得到, 在 dt 时段内沿 y 轴和 z 轴方向流入这个微元体的水的质量增量分别为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho K \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy dz dt \\ & \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho K \frac{\partial H}{\partial z} \right) dx dy dz dt \end{aligned} \quad (2-2)$$

根据(2-1)、(2-2)式可知, 在 dt 时段内沿 x, y, z 轴方向流入这个微元体的水的质量的总增量为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho K \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho K \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho K \frac{\partial H}{\partial z} \right) \right] dx dy dz dt \quad (2-3)$$

另一方面, 由于充满这个微元体的水的质量为 $\rho n dx dy dz$ (n 为多孔介质的孔隙度), 则对时间 t 的变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho n dx dy dz) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho n dz) dx dy$$

因为含水层的变形主要发生在垂直方向上, dx 、 dy 可以认为是不变的。按质量守恒原理, dt 时段内质量的总变化量应等于同一时段内各个方面流入量的总增量, 即

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho K \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho K \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho K \frac{\partial H}{\partial z} \right) \right] dx dy dz dt \\ & = \frac{\partial}{\partial t} (\rho n dz) dx dy dt \end{aligned} \quad (2-4)$$

现在来研究(2-4)式的简化式。首先, 由于水的密度、孔隙度和水头的表达式分别为^[33]

$$\rho = \rho_0 e^{c(P-P_0)}, \quad 1-n = (1-n_0) e^{-\beta(P-P_0)}, \quad H = z + \frac{P}{\rho g} \quad (2-5)$$

式中, P 为压力; P_0 为某一参考压力; n_0 为参考压力 P_0 下的孔隙度; ρ_0 为参考压力 P_0 下水的密度; c 为水的压缩系数; β 为多孔介质压缩系数。由(2-5)式可知

$$\rho = \rho_0 e^{c\rho g(H-H_0)} \quad (2-6)$$

$$\text{则} \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{1 - c\rho g(H-H_0)} c\rho^2 g \frac{\partial H}{\partial x}$$

由于水的压缩系数 c 很小, 当小到 $c\rho g(H-H_0)$ 相对于1可以忽略不计时

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = c\rho^2 g \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2-7)$$

同理

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = c\rho^2 g \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = c\rho^2 g \frac{\partial H}{\partial z}$$

其次, 研究(2-4)式中 $\frac{\partial}{\partial t} (\rho n dz)$ 的表达式。

因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho n dz) &= \rho \frac{\partial}{\partial t}(n dz) + n dz \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \rho \left[n \frac{\partial}{\partial t}(dz) + dz \frac{\partial n}{\partial t} \right] + n dz \frac{\partial \rho}{\partial t}\end{aligned}$$

还可以证明^[24]

$$\frac{\partial(dz)}{\partial t} = \frac{1}{1-n} \frac{\partial n}{\partial t} \quad (2-8)$$

所以, 由 (2-5)、(2-6)、(2-8) 式可知

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho n dz) &= \rho dz \frac{\partial n}{\partial t} \left[\frac{n}{1-n} + 1 \right] + n dz \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \rho \frac{dz}{1-n} \frac{\partial n}{\partial t} + n dz \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \rho^2 g dz (\beta + cn) \frac{\partial H}{\partial t}\end{aligned} \quad (2-9)$$

将 (2-7)、(2-9) 式的结果代入 (2-4) 式, 并略去 $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2$ 、 $\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2$ 、 $\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2$ 等微量项, 经整理化简可得

$$\rho g (\beta + cn) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad (2-10)$$

式中, $\frac{\partial H}{\partial t}$ 的系数 $S_s = \rho g (\beta + cn)$, 称为单位贮水系数。它表示当承压含水层的水头降低一个单位长度时, 从单位体积的含水层中释放出来的水体积。由 (2-10) 式得三维承压水非稳定流偏微分方程

$$S_s \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial H}{\partial z} \right) \quad (2-11)$$

当水头 H 仅仅是 x 、 y 的函数时, $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$, 则 (2-11) 式两边同乘以不变的含水层的厚度 M 后, (2-11) 式变为二维承压水非稳定流偏微分方程

$$S \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) \quad (2-12)$$

其中, $S = MS_s$ 称为贮水系数; $T = MK$, 称为导水系数。当含水层是均质各向同性时, (2-12) 式变为

$$\frac{S}{T} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \quad (2-13)$$

此式是对均质各向同性的二维承压非稳定流作解析分析常用的基本方程。

§ 2 定解条件

上一节, 通过建立描述三维非稳定流的微分方程, 明确了不同类型的地下水需要用不同形状的微分方程来描述。一种形式的微分方程代表了它所描述的整整一类地下水流动的

普遍规律,但不能确定某一个具体的地下水流问题的解。因此,当给出一个具体的地下水流问题时,首先要分析它属于哪一类型的地下水流,以便正确地选用描述它的数学表达式。其次,对于微分方程还必须根据具体地下水流问题的实际情况与求解的需要圈定求解区域,这种区域(例如二维)可能是由封闭曲线围成的有限区域,也可能是无限区域。例如,当含水层的范围远远大于抽水可能影响的范围时,这种情况的含水层区域就可作为无限区域来处理。有了微分方程和求解区域,该问题的解还是不能确定。因为在这个区域上

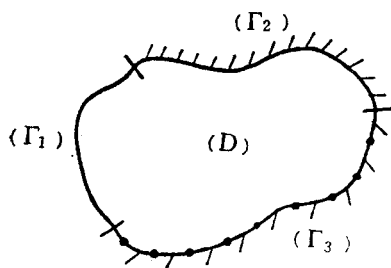


图 2-2 求解区域边界图

可以找到无穷多个函数满足这个方程,所以还必须找出确定该问题存在唯一解的定解条件。一般它包括边界条件和初始条件。

本节以二维问题为例,分析地下水流问题的边界条件与初始条件,并讨论它的应用。

一、边界条件

1. 已知水头边界

如图2-2,若以 (Γ_1) 弧段为边界的每一点在每一时刻的水头 H 都是已知的,则这段边界就称为已知水头边界(或称第一类边界),表示为

$$H(x, y, t) = f(x, y, t), (x, y) \in (\Gamma_1) \quad (2-14)$$

式中, $f(x, y, t)$ 是确定 (Γ_1) 上任一时刻 t 的已知函数。这种边界往往出现在含水层与地表水体(例如河流、湖泊等)相联结处的边界段上,此时 $f(x, y, t)$ 或为某一定水头,或为由某种方法确定的某一关于时间 t 的已知函数。区域内部的抽水井或注水井也可作为已知水头的内边界,其水头是按某种要求事先指定的,例如抽水井的允许降深,或坑道的疏干深度等。

2. 已知流量边界

如图2-2,若在边界 (Γ_2) 弧段上每个单位宽度的流量为已知时,则称这样的边界 (Γ_2) 为已知流量边界(或第二类边界),表示为

$$T_L \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{(x, y, t)} = q(x, y, t) \quad (x, y) \in (\Gamma_2) \quad (2-15)$$

式中, T_L 为边界 (Γ_2) 的导水系数; $\frac{\partial H}{\partial n}$ 为水头关于 (Γ_2) 边界的外法线方向导数。(2-

15)式的左端是在 (Γ_2) 上的边界点 (x, y) 处 t 时刻的单宽流量,右端是确定在 (Γ_2) 上相同时刻的已知函数。

实际上,最常见的已知流量边界是不透水边界,单宽流量为零,所以(2-15)式简化为

$$\frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{(x, y, t)} = 0, (x, y) \in (\Gamma_2)$$

其次,对于区域内的轴对称开采井(或注水井),当已知抽水量(或注水量)为 Q 时,则井壁(半径为 r_0)或以井为中心、 r_0 为半径的圆周均可作为已知流量边界。由达西定律,

(2-15)式表示为

$$T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{r=r_0} = \mp \frac{Q}{2\pi r_0} \quad (2-16)$$

式中, 当 Q 为抽水量时, 取负号; 当 Q 为注水量时, 取正号。

3. 混合边界

若在图2-2中的边界弧段 (Γ_3) 上, 已知水头 H 和水头关于边界的外法线方向导数 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 的线性组合, 这种类型的边界称为混合边界, 表示为

$$\frac{\partial H}{\partial n} + 2H = \beta, (x, y) \in (\Gamma_3) \quad (2-17)$$

式中, α 、 β 是确定在 (Γ_3) 上的已知函数。例如, 弱透水边界就是这类边界 (参阅 Neuman, 1972)。

4. 潜水面边界

由于潜水面上压力 P 为零, 根据公式 $H = \frac{P}{\rho g} + z$ 可知

$$H - z = 0 \quad \text{或} \quad z = H(x, y, t)$$

上式对 t 求导数, 得

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt} = 0$$

当所取坐标与各向异性的主方向一致时, 地下水质点的分速度为

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{K_x}{\mu} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{K_y}{\mu} \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{K_z}{\mu} \frac{\partial H}{\partial z}$$

并将各质点的分速度代入前一式中得

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \left[K_x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + K_y \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] + K_z \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (2-18)$$

式中, μ 为给水度; K_x 、 K_y 、 K_z 分别为 x 、 y 、 z 方向上的渗透系数。

如果 (2-18) 式中 $\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2$ 、 $\left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2$ 是微小量, 可以忽略时, 则 (2-18) 式简化为

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\mu} K_z \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (2-19)$$

方程 (2-18) 式或 (2-19) 式就是潜水面的边界条件。

二、初始条件

对于非稳定流问题的解, 除需要边界条件外, 还需要初始条件。初始条件就是指按需要选定的某一开始时刻在求解区域 (D) 上的水头分布, 若以 $H_0(x, y)$ 表示初始的水头分布函数, 则初始条件表示为

$$H(x, y, t) |_{t=0} = H_0(x, y), (x, y) \in (D) \quad (2-20)$$

在进行数值计算时, 在节点上的初始分布函数值可以通过该时刻的等水头线图查出, 也可利用该时刻各观测孔处的水头的插值或拟合的方法求得。

§ 3 典型的含水层系统的数学模型

一、多层含水层地下水流的数学模型

严格地讲, 一个与上、下层没有水力联系的单层含水层是很少见的。实际上, 经常遇到的是几个含水层重叠起来, 并且含水层与含水层之间为弱透水层所间隔, 这样的含水

层系统称为多层含水层。例如图2-3所示,它是潜水含水层与承压含水层之间由弱透水层或不完整的隔水层所间隔的多层含水层。这里以图2-3的多层含水层为例,研究其数学模型的建立。

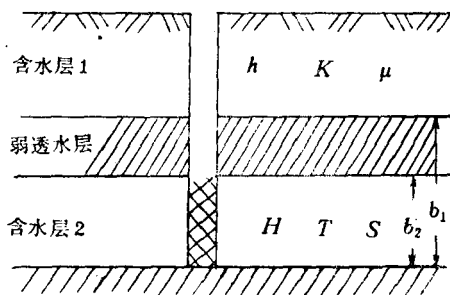


图 2-3 三层含水层

偏微分方程为

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(h-b_1) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(h-b_1) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + w_1 \quad (2-21)$$

式中, K ——潜水含水层中平均渗透系数;

h ——潜水面标高;

μ ——给水度;

w_1 ——垂直补给强度, $w_1 = \frac{K'}{m'}(H-h) + q_1$, 其中, m' 、 K' 分别为间隔层的厚度和

垂直渗透系数; q_1 为降雨等垂直入渗补给强度, 取正。

承压含水层的微分方程为

$$S \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + w_2 \quad (2-22)$$

式中, T ——导水系数;

S ——贮水系数;

H ——承压水头;

w_2 ——垂直补给强度,

$w_2 = \frac{K'}{m'}(h-H) + q_2$, 其中, q_2 为从承压含水层中的抽水强度, 取负。

将 w_1 和 w_2 的表达式分别代入微分方程(2-21)式和(2-22)式,得到潜水含水层微分方程

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(h-b_1) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K(h-b_1) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \frac{K'}{m'}(H-h) + q_1 \quad (2-23)$$

和承压含水层微分方程

$$S \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{K'}{m'}(h-H) + q_2 \quad (2-24)$$

这两个方程都同时依赖于水头 H 和水位 h 。将这两个方程所分别满足的定解条件和微分方程组合成潜水含水层定解问题