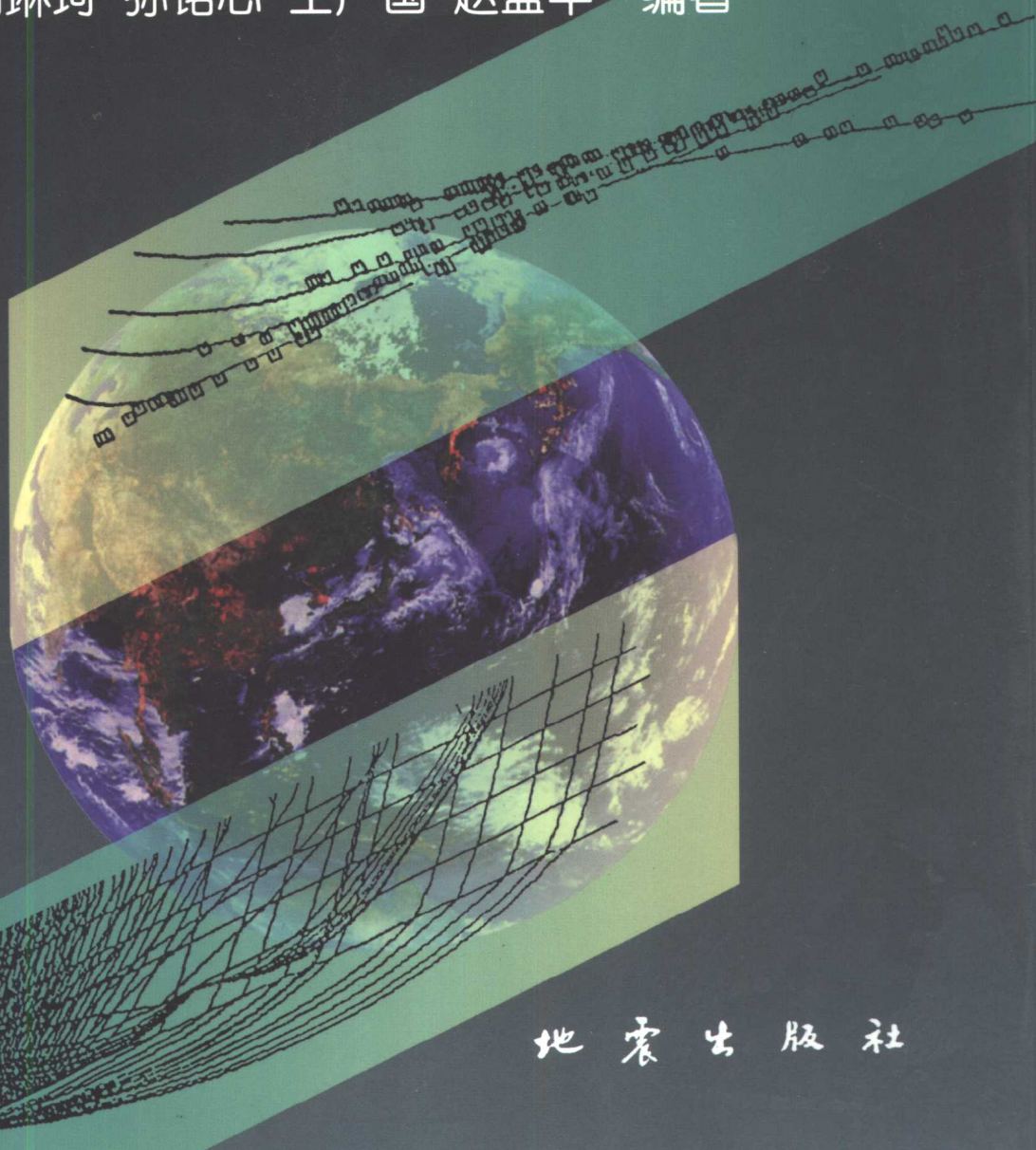


# 地球物理遗传反演方法

GENETIC INVERSE METHODS  
OF GEOPHYSICAL PROBLEMS

石琳珂 孙铭心 王广国 赵盛华 编著



地震出版社

# 地球物理遗传反演方法

GENETIC INVERSE METHODS  
OF GEOPHYSICAL PROBLEMS

石琳珂 孙铭心 王广国 赵盛华 编著

地震出版社

2000

## 内 容 简 介

遗传算法 (Genetic Algorithms, GA) 是近年来发展起来的一种新颖的非线性反演方法,它的工作原理与现有的反演方法有根本的不同,具有很强的普遍适应性与数值计算稳定性,在解决地球物理学的非线性反演问题方面有广泛的应用前景。本书在回顾了地球物理反演方法发展历史的基础上,指出了现有反演方法存在的不足和引入遗传算法的必要性。书中系统地研究了遗传算法的理论和方法,针对它的弱点,作者从三个方面对其做了改进。然后,给出了改进的遗传算法在二维和三维密度界面反演、一维和二维地壳速度结构走时反演以及重力和地震数据联合反演中的应用,这些都是作者近年来的最新研究成果。最后,对遗传算法在地球物理反演中的应用途径给出了原则性方法。

本书可供地球物理、物探、石油勘探等部门的科研人员、大专院校师生参考。

### 地球物理遗传反演方法

石琳珂 孙铭心 王广国 赵盛华 编著

责任编辑:姚家榴

责任校对:庞娅萍

\*

**地 震 出 版 社**出版

北京民族学院南路9号

北京地大彩印厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

\*

787×1092 1/16 7.125印张 183千字

2000年5月第一版 2000年5月第一次印刷

印数 001-800

ISBN 7-5028-1755-7/O·31

(2286) 定价:10.00元

## 序

建立有效的反演理论和方法一直是应用地球物理学重点探索的目标之一。这项工作的重要性不仅在于它是一项基本的、难度很大的工作，更体现了人类探索地球内部结构的能力和水平。《地球物理遗传反演方法》的重要贡献之一在于，它提出了一整套简洁、普遍适用的解决地球物理反演问题的方法，开辟了一条研究地球物理反演问题的新途径。所谓最简洁、最简单的方法，或许正是最有效和最健全的方法，就是这个道理。因此，本书的内容有重要的启发意义和学术参考意义，将有助于推动地球物理反演理论和方法的发展。

作者在回顾了地球物理反演理论发展过程的基础上，对传统的反演方法做了充分的评价，指出传统反演方法已不能完全适应地球物理学对解非线性、多参数反演问题的需要。理由有三，①对于需要做线性化处理的方法，其结果是不精确的；②对于需要解大型方程组的方法，其解的可靠性有待讨论；③对于需要求导数的方法，若导数不存在则无法应用。因此，需要研究新的反演方法。

遗传算法(GA)是近年来出现的基于全局搜索的反演方法之一，其特点是方法简单、有效，具有普遍适应性，不存在上述传统反演方法中的三类问题。作者在消化吸收国外先进技术的基础上，把GA引入到地球物理反演领域，并针对GA本身的某些弱点，创造性地提出了相应的改进措施，这对GA的算法是一种创新，具有很强的使用价值。在此基础上提出了一系列地球物理反演算法，用于解决地球物理中的二维、三维界面位场资料的反演问题，一维、二维地壳速度结构走时反演问题，以及重力、地震资料的联合反演问题。这是本书的又一重要贡献。

本书语言流畅、层次分明，配有大量应用实例和数值模拟实例。另外，作者对地球物理中的很多问题，提出了新的见解，具有启发意义。相信本书对地球物理反演理论和方法的研究将会起到很好的推动作用，特为之序。

张先康

1999年12月

## 前 言

地球物理反演问题是国内外地球物理工作者经常遇到的问题，历来受到高度重视。地球物理反演理论和方法是一门综合学科，涉及数学、物理、计算数学、计算机科学等等。地球物理学的发展史表明，当科学技术得到迅速发展时，都有新的反演理论和方法技术的诞生，而这些新理论、新技术又促进地球物理学的进一步发展。到目前为止，地球物理反演理论仍然是一个发展着的、十分活跃的领域。比如，利用人的大脑工作原理的研究成果，科学家在80年代中期提出了人工神经网络（Artificial Neural Networks, ANN）计算方法，这种方法已广泛应用于地球物理学的模式识别、分类及反演问题中；模拟物理学中晶体生成的方法，出现了模拟退火法（Simulated Annealing, SA），该方法曾成功地解决过著名的数学难题“旅行商”问题（Traveling Salesman Problem, TSP），同时也已应用于解地球物理反演问题；利用生物界自然进化原理，出现了遗传算法（Genetic Algorithms, GA）。这种方法在国外发展很快，已应用于科学技术的很多领域，如人工智能、工业自动控制、图像识别、通讯等。GA作为一种函数优化方法，其本身就是一种完全非线性反演方法，在解地球物理反演问题中必定有广阔的应用前景。因此，开展对GA的研究有着重要的现实意义。

尽管GA是一种在解决非线性反演问题中有独特优势的反演方法，但它本身也有局限性，其中最突出的弱点是收敛速度慢。另外，据现有文献，GA在地球物理学中的应用主要集中在地震学的一维走时和波形反演，在地震学的二维反演和位场资料的反演解释方面几乎还是空白。因此，本书的主要研究目标在于：

- (1) 研究提高GA收敛速度的措施，对其进行改进，使GA更为完善。
- (2) 扩大GA的应用范围，探讨其在地球物理学其它领域中的应用途径。
- (3) 结合科研项目，把改进后的GA应用于处理实际地球物理资料。

作者希望这一系列研究能对地球物理反演方法和技术的发展有所贡献，在探索地球内部结构奥秘的进程中增添一种有效的工具和手段。

本书共分11章。第1章为综述，主要回顾地球物理反演方法的发展历史，分析现有反演方法的问题，并对此做一定性的综合评价。第2、3章对GA的理论与方法做全面的研究和剖析，研究它的主要方法原理及数学基础，把它与现有反演方法做一对比，并给出一些实际计算例子以说明GA的特点。第4~6章为GA的改进部分，分别介绍作者提出的三项加速收敛措施：①遗传基因的多点交换；②

逐步缩小搜索范围；③用S形函数分辨模型的优劣。每章都附有地球物理学中实际问题的反演实例，以说明各项加速收敛措施的效果。第7~11章为应用部分，分别介绍作者研究的地球物理遗传反演方法：①二维密度界面位场遗传反演方法；②三维界面位场遗传反演方法；③一维地壳速度结构走时遗传反演方法；④二维地壳速度结构走时遗传反演方法；⑤重力、地震数据联合遗传反演方法。根据这些方法，得到了郑州—临汾剖面的地壳密度结构，山西高原的莫氏面埋深等值线图，任县—武清地震剖面的一维地壳速度结构和北京—怀来—丰镇地震剖面的二维地壳速度结构，重力、地震数据联合遗传反演方法还给出了数值模拟结果。最后，在结束语中对GA在地球物理反演中的应用途经给出了原则性方法，并对GA做了综合评价。

本书在研究和撰写过程中，始终受到中国地质大学（北京）研究生院应用地球物理系管志宁教授和中国地震局地球物理勘探中心张先康研究员、孙武城研究员的悉心指导。蔡柏林教授、曾华霖教授在研究过程中在选题、研究方向和技术路线等方面提出了很多宝贵建议。在与姚长利副教授、侯俊胜博士、张明华博士就有关问题研讨时，他们都给予作者以热情的帮助。作者在此一并向他们表示衷心的感谢！

作者特别要向孙懿斐女士对本项研究工作的长期关注和资助表示感谢。

在本书的编写过程中，引用了很多文献的内容及资料（见参考文献），中国地震局物探中心也提供了很多宝贵资料，对这些文献和资料的作者及单位表示感谢。

最后，感谢中国地震局地球物理勘探中心主任、河南省地球物理学会理事长张先康研究员为本书题写序言。

本书是关于地球物理遗传反演理论和方法的第一本专著，由于作者经验不足、水平有限，书中定有不妥和错误之处，恳请前辈和同仁不吝赐教。

著 者

1999年9月9日

# 目 录

<b>1 地球物理反演理论和方法的发展与评价</b> .....	( 1 )
1.1 引言 .....	( 1 )
1.2 地球物理反演理论和方法的发展 .....	( 2 )
1.2.1 广义逆理论 .....	( 2 )
1.2.2 最优化方法 .....	( 2 )
1.3 地球物理反演理论的一般数学原理 .....	( 3 )
1.4 连续型线性反演理论 .....	( 3 )
1.5 离散型反演问题 .....	( 4 )
1.6 解离散型反演问题的数值计算方法 .....	( 5 )
1.6.1 广义逆方法 .....	( 5 )
1.6.2 最优化方法 .....	( 6 )
1.7 现有反演计算方法的评价 .....	( 8 )
小结.....	( 8 )
<b>2 遗传算法 (GA)</b> .....	( 9 )
2.1 引言 .....	( 9 )
2.2 GA 简介 .....	( 9 )
2.3 GA 与现有方法的差别 .....	( 10 )
2.4 GA 运算 .....	( 11 )
2.5 GA 的实现方法 .....	( 13 )
2.6 GA 的模拟计算 .....	( 16 )
2.7 图式 .....	( 19 )
小结.....	( 20 )
<b>3 GA 的数学基础</b> .....	( 22 )
3.1 GA 基本理论 .....	( 22 )
3.1.1 基本概念 .....	( 22 )
3.1.2 再生运算对图式的影响 .....	( 23 )
3.1.3 基因交换运算对图式的影响 .....	( 23 )
3.1.4 基因变异运算对图式的影响 .....	( 25 )
3.2 图式理论的检验 .....	( 25 )
小结.....	( 26 )
<b>4 加速收敛措施之一：遗传基因的多点交换</b> .....	( 27 )
4.1 问题 .....	( 27 )
4.2 遗传基因的多点交换 .....	( 28 )

4.3	数值模拟 .....	(28)
	小结 .....	(30)
<b>5</b>	<b>加速收敛措施之二：逐步缩小参数搜索范围</b> .....	(31)
5.1	引言 .....	(31)
5.2	从模型群体的演化过程中得到的启示 .....	(32)
5.3	搜索范围内各种情况的分析 .....	(33)
5.4	逐步缩小搜索范围的方法 .....	(35)
5.5	理论模型试验 .....	(36)
5.5.1	磁性球的空间位置及几何参数的反演 .....	(36)
5.5.2	一维地壳结构速度-深度函数走时反演 .....	(39)
	小结 .....	(43)
<b>6</b>	<b>加速收敛措施之三：S形函数在GA中的应用</b> .....	(45)
6.1	引言 .....	(45)
6.2	S形函数 .....	(45)
6.3	参数选择 .....	(46)
6.4	数值模拟 .....	(46)
6.4.1	与原有GA的比较 .....	(46)
6.4.2	与逐步缩小搜索范围的方法结合 .....	(47)
	小结 .....	(49)
<b>7</b>	<b>二维密度界面位场遗传反演方法研究</b> .....	(50)
7.1	引言 .....	(50)
7.2	地壳密度模型及正演方法 .....	(50)
7.2.1	地壳密度模型 .....	(50)
7.2.2	正演公式 .....	(51)
7.3	遗传反演方法 .....	(51)
7.4	数值模拟 .....	(52)
7.5	郑州—临汾剖面重力异常机制分析 .....	(53)
7.5.1	剖面地球物理场特征 .....	(53)
7.5.2	速度、密度换算 .....	(54)
7.5.3	正演拟合 .....	(54)
7.5.4	反演计算 .....	(55)
7.5.5	异常机制分析 .....	(56)
7.6	有关问题讨论 .....	(56)
7.6.1	重力异常与莫霍界面起伏的关系 .....	(56)
7.6.2	解重力反问题时的约束条件 .....	(57)
	小结 .....	(57)
<b>8</b>	<b>三维界面位场遗传反演方法研究</b> .....	(58)
8.1	引言 .....	(58)
8.2	三维物性界面的频率域快速正演方法 .....	(59)



8.2.1	坐标系	(59)
8.2.2	重力位的频谱	(59)
8.2.3	三维物性层的重力频谱表达式	(60)
8.2.4	三维物性层的磁频谱表达式	(61)
8.2.5	位场频谱表达式的简化	(61)
8.2.6	单界面模型的位场频谱表达式及其简化	(62)
8.2.7	重、磁位场频谱表达式的比较	(63)
8.3	界面位场遗传反演方法	(64)
8.4	数值模拟	(64)
8.4.1	模型及正演公式	(65)
8.4.2	参数	(66)
8.4.3	数值模拟	(66)
8.4.4	计算中的注意事项	(66)
8.5	反演实例——山西高原莫氏面位场反演	(67)
8.5.1	计算区域	(67)
8.5.2	布格重力异常	(67)
8.5.3	数据处理——深部异常信息提取	(67)
8.5.4	反演计算	(68)
	小结	(69)
<b>9</b>	<b>一维地壳速度结构走时遗传反演方法研究</b>	<b>(71)</b>
9.1	地震波走时计算公式	(71)
9.1.1	地壳模型及地震波类型	(71)
9.1.2	反射波	(71)
9.1.3	回折波	(72)
9.1.4	首波	(72)
9.2	任县—武清地震剖面南段一维地壳速度结构走时遗传反演	(73)
9.2.1	构制初始地壳模型	(73)
9.2.2	构造目标函数	(73)
9.2.3	走时遗传反演	(74)
	小结	(77)
<b>10</b>	<b>二维地壳速度结构走时遗传反演方法研究</b>	<b>(78)</b>
10.1	引言	(78)
10.2	射线追踪	(79)
10.2.1	基本理论	(79)
10.2.2	正演计算程序的修改	(79)
10.3	模型参数化	(79)
10.4	目标函数构制	(80)
10.4.1	问题分析	(80)
10.4.2	初始模型先验信息的利用	(80)

10.5	数值模拟 .....	(81)
10.5.1	正演计算 .....	(81)
10.5.2	反演计算 .....	(83)
10.6	北京—怀来—丰镇剖面二维地壳速度结构走时遗传反演 .....	(86)
10.6.1	剖面位置及地质概况 .....	(86)
10.6.2	确定初始模型和各震相关键参数 .....	(86)
10.6.3	反演计算 .....	(87)
	小结 .....	(89)
<b>11</b>	<b>重力、地震资料的联合遗传反演方法研究</b> .....	<b>(90)</b>
11.1	引言 .....	(90)
11.2	地壳模型及速度-密度转换 .....	(91)
11.3	目标函数形式 .....	(91)
11.4	遗传反演计算步骤 .....	(91)
11.5	数值模拟 .....	(92)
	小结 .....	(96)
	结束语 .....	(98)
	附录 用 GA 解地球物理反演问题的步骤 .....	(101)
	参考文献 .....	(104)

# 1 地球物理反演理论和方法的发展与评价

## 1.1 引言

有关地球深部的信息，绝大多数来源于对地表地球物理观测资料的解释。因此，任何一种地球物理观测，最终都要求解反演问题，即根据各种位场、地震波地球物理观测资料，来推测地球内部的结构形态和物质成分，定量计算各种地球物理参数（朱介寿，1985）。

解反演问题是一门广泛应用于各个科学技术领域的基本研究方法，凡涉及到观测与演绎的科学技术，都会碰到这类问题。例如，天体物理学中根据光谱的测定研究宇宙的物质组成及星体的演化；天体力学中根据人造卫星瞬时位置及速度的观测数据计算其轨道要素；气象学中根据气象观测数据研究大气层运动规律；大地测量学中根据大地测量数据推算近代应力场；地球物理学中根据地表的地球物理观测数据推算地下物质的结构、形态及成分等等，这些都是反演问题的例子。可见，相当多的科学技术问题，都以不同的方式、在不同程度上涉及反演问题。

解反演问题的古典方法是最小二乘法及统计学中的回归、参数估计等。近40年来，由于在计算中广泛应用了信息论、线性及非线性规划、广义逆理论及最优化方法等一些数学工具，使得地球物理反演问题在理论和方法上都有了重大进展。

任何反演问题的计算都是建立在正演问题的基础之上。对于某个地球物理问题，只有得到了它的数学解答（解析的或数值的），即能计算其正演问题时，才有可能解反演问题。对于那些成因或机制尚不清楚的地球物理问题，是谈不上解反演问题的。所谓正演问题，是由理论模型参数计算观测数据的理论值。而反演问题，是由实际观测数据推算所有可能的模型参数。

反演问题是地球物理学研究中一个重要而又困难的问题，最主要的困难是反演结果存在着多解性（不唯一性）。这种不唯一性不是由于反演方法或技巧上的缺陷引起的，而是地球物理问题本身存在的固有困难。困难之一是观测资料不完备。由于地球物理观测只能在地球表面或其上空进行，无法直接获得反映地球内部物质的充足的信息。这就使得反演结果有多种可能性，而每一种可能性都能满足不充分的观测数据。地球物理观测信息的不足是无法用数学技巧来弥补的。困难之二是任何地球物理观测都存在干扰和误差。这种受畸变的观测数据使得反演计算不稳定，即观测数据中少量的错误可以导致反演结果的很大变动。因此，在解地球物理反演问题时，要根据已有资料，尽可能多地引入先验信息、附加约束条件，以减少解的不唯一性。

在不同的科学技术领域中，对反演问题有不同的提法。如，根据数学的观点，反演是在给定的子空间中寻找与函数空间中的某点最靠近的点；根据统计学的观点，反演是回归和参数估计问题；根据信息论的观点，反演又可看成滤波或过程鉴别问题。尽管术语和提法不同，但它们都表示同一内容，即从观测数据计算地球内部物质的各种参数。

下面对地球物理反演理论和方法的发展做一简要回顾和归纳，并对现有的（传统的）一般的反演方法做一定性的评价，其中不涉及为解决专门问题而设计的特殊反演方法。

## 1.2 地球物理反演理论和方法的发展

在地球物理学发展的初期，由于观测资料比较粗糙，一般只对观测数据做定性的或粗略的定量解释。从 20 世纪初到 50 年代，随着地球物理方法的发展，相继提出了各种解反演问题的定量计算方法。但这些方法大多是孤立地为解决某一特定问题而提出来的。例如，重、磁位场解释中常用到的特征点法、积分法就是为解释某一孤立位场异常而提出的一些简单反演计算方法。又如，地震学中根据地球表面体波走时观测来反演速度随深度变化的 Herglotz—Wiechert 公式，也是在假设速度是深度的单调函数时的一种积分运算。这些方法的特点是，仅能提供有关平均化的参量，如异常物体的质量或埋藏深度等。

近 40 年来，随着科学技术的迅速发展，地球物理资料无论在空间分布范围上（从大陆、大气层扩展到海洋和太空）还是数据的可靠性及丰富程度上，都较过去有很大改进。数学方法特别是电子计算机的广泛应用，促进了地球物理一般反演理论的建立和数据处理自动化的发展。

1967~1970 年间，Backus 和 Gilbert 发表了一系列重要文章。这些文章奠定了近代地球物理线性反演理论的基础，具有重要意义。这个比较完整、比较严格的反演理论被称之为 Backus-Gilbert（或 BG）理论。在他们的原始文献中，一般研究整个地球内部物理参数的连续变化，故反演问题以连续型函数表达。1972 年，Wiggins 用矩阵将 Backus—Gilbert 理论表达为离散形式。同年，Jackson 用广义逆理论详细地讨论了线性反演问题在各种情况下的解答。另外，BG 理论中引入了分辨矩阵、信息矩阵和协方差矩阵等重要概念，这对于理解反演问题的实质及评价反演效果有重要作用。

1987 年，Tarantola 从概率的角度提出广义反演方法，该方法把表示先验信息的模型协方差矩阵和表示数据误差的数据协方差矩阵等先验信息直接引入到反演公式中，有效地减小了解的非唯一性（A. Tarantola, 1987）。

同时，解反演问题的数值计算方法也得到了迅速发展，其中发展比较快的有广义逆理论和最优化方法。

### 1.2.1 广义逆理论

广义逆理论是矩阵论近年来的新成就之一。早在 1920 年，Moore 就提出了奇异矩阵的逆的问题，从而建立了广义逆矩阵的概念。1935 年，他又对广义逆概念进行了重新讨论。1955 年，Penrose 也独立提出了一个广义逆矩阵的概念。他的这个概念实际上与 Moore 的概念等价，现在称为 Morre-Penrose 广义逆，常用  $A^+$  表示。同年，Rao 提出了一个更一般的广义逆概念，通常称为  $g$  逆，用  $A^-$  表示。此后，广义逆理论得到了迅速发展，并广泛应用于许多科学技术领域。

### 1.2.2 最优化方法

最优化方法是一个有悠久历史的方法，至少可以追溯到 Newton 发明微积分的时代。另外，早在 1847 年，Cauchy 就提出了最速下降法，这也许就是最早的求解最优化问题的方法。但这些方法对参数较多的问题常常不适用。这是因为，最速下降法收敛得比较慢，而且，我

们经常遇到的问题都是非线性的。后来,计算机的使用和实际需要的增长,使这些古老的方法取得了实质性的发展。如 Daviden 提出的变度量法(即拟 Newton 法),是最优化计算方法中最好的方法之一。Broyden, Powell, Fletcher 等人在这方面也做了大量工作,他们提出的 powell 直接方法和共轭梯度法在最优化方法中也占有重要位置。Marquardt 针对平方和这种特殊形式的目标函数也做了很好的工作,提出了阻尼最小二乘法。总之,出现了很多新的最优化计算方法,而且这些方法在解决实际地球物理反演问题中都得到了广泛的应用。

### 1.3 地球物理反演理论的一般数学原理

设:  $U$  为地球物理参数值构成的集合,称为模型空间;  $E$  为映射地球物理参数与地球物理观测场之间的算子;  $D$  是地球物理观测值构成的集合,称为数据空间。

如果模型空间  $U$  和数据空间  $D$  都是线性空间,且映射算子  $E$  也是线性的,则这样的反演问题为线性反演问题。但是,大部分地球物理反演问题都不是线性的。为此,必须使用两种方法使其线性化。

(1) 将映射算子  $E$  用线性算子  $E_0$  代替。常用的方法是将其在某一初始模型  $W_0$  附近展开,使线性函数  $E_0(W)$  与非线性函数  $E(W)$  充分地接近。

(2) 通过约束条件使模型空间  $U$  与数据空间  $D$  都成为线性空间。

假定模型空间  $U$  为希尔伯特空间  $L_2(\Omega)$ , 其中  $\Omega$  为实空间中的有限域。通过  $m$  个映射算子的核  $G_i(r) \in L_2(\Omega)$ , 可以把模型空间  $U$  映射到数据空间  $D$ , 即

$$\int G_i(r)W(r)dr = g_i(W) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.1)$$

其中,  $W(r)$  为连续型地球模型参数 ( $r$  可看成是地球半径),  $g_i(W)$  等于或近似等于观测数据  $d_i$ 。这样表达的问题是连续型的。

若将  $\Omega$  分成  $n$  个子域  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  (例如将地球内部划分成  $n$  层), 使  $\sum \Omega_i = \Omega$ , 则上述连续型函数就被离散化。模型参数  $W$  被离散为  $W_k (k=1, 2, \dots, n)$ , 积分方程 (1.1) 可写成矩阵方程形式

$$(G \times W)_i = \sum G_{ik} \times W_k = g_i(W) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.2)$$

其中,  $G$  为  $m \times n$  矩阵, 模型参数  $W$  为  $n$  维向量, 观测数据  $g$  为  $m$  维向量。由 (1.2) 式表达的问题是离散的。

所谓线性反演问题, 就是从  $m$  个观测数据  $d_1, d_2, \dots, d_m$  中获得所要求的模型参数  $W$  (或  $n$  个离散值  $W_1, W_2, \dots, W_n$ ) 的信息。Backus-Gilbert 理论是对连续型问题 (1.1) 给出平均解的一种途径, 而广义逆理论和最优化方法是对离散型问题 (1.2) 求解的基本方法。

### 1.4 连续型线性反演理论

前面已经指出, 地球物理反演问题实质上是寻找一个物理模型, 它与观测数据拟合得最好。但这个物理模型往往是不唯一的。Backus 和 Gilbert 的主要贡献在于, 从全部可能的希尔伯特空间, 特别是从那些满足观测数据的模型空间中减少了不唯一性, 因为可以根据模型的性质对它进行约束。如模型的非负性质, 反演计算模型与初始模型在模型空间中最近距离性

质等，都可用来对模型做出约束，使反演结果的不唯一性得到控制。

地球物理反演问题的一般提法是，根据一组观测值  $d_j, j=1, 2, \dots, m$ ，找出适应于该观测数据的地球物理模型  $W$ 。一般来说，观测数据  $d_j$  是模型参数  $W$  的非线性函数：

$$d_j = E_j(W), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1.3)$$

对于真实地球物理模型  $W_0$ ，其相应的观测值为

$$d_j^0 = E_j(W_0), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (1.4)$$

引入希尔伯特空间的目的之一，是使我们能定义并计算观测数据相对于模型参数的导数。考虑两个模型  $W$  和  $W^1$ ，它们之间仅相差一个微量  $\delta m$ ：

$$W^1 = W + \delta m \quad (1.5)$$

若它们的函数值之间有关系

$$E_j(W + \delta m) = E_j(W) + (F_j, \delta m) + \epsilon(\delta m) \quad (1.6)$$

其中，每个  $F_j$  都是希尔伯特空间中的一个元素， $(F_j, \delta m)$  为  $F_j$  与  $\delta m$  的内积，且  $\epsilon(\delta m)$  比范数  $\|\delta m\|$  更快地趋于零。如 (1.6) 式成立，则称此函数是 Frechet 可微的， $F_j$  则称为观测数据  $d_j$  的 Frechet 核函数（或算子）。通常， $F_j$  是  $d_j$  对  $W$  的导数。所有有地球物理意义的数据都可以看成 Frechet 可微的。显然，(1.6) 式实质上是将问题线性化的一个重要步骤。

设 (1.5) 式中的  $W$  是初始模型，而  $W^1$  是真实模型，或至少是满足观测数据的模型。由于初始模型  $W$  是给定的，而  $W^1$  是待求的，所以我们希望得到  $\delta m$ 。但  $\delta m$  是无穷维向量空间的一个元素，而仅有  $m$  个观测数据，这就使得解是不唯一的。Backus 和 Gilbert 提出的一个约束条件是，寻找一个与初始模型  $W$  最接近的  $W^1$ ，或在希尔伯特空间中与  $W$  距离最短的  $W^1$  作为解。这种约束条件意味着寻找一个  $\delta m$  范数为最小，即  $\|\delta m\| = \min$  的解，或满足：

$$\int [\delta m(r)]^2 dr = \min \quad (1.7)$$

的解。

若  $W$  与  $W^1$  是最靠近的，则 (1.6) 式中的  $\epsilon$  项可以忽略。用变分法可得：

$$\delta m = \sum_{j=1}^n a_j F_j \quad (1.8)$$

式中  $a_j$  可通过下面  $n$  个线性方程求得：

$$\Sigma (F_j, F_k) a_k = E_j(W^1) - E_j(W) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.9)$$

其中， $(F_j, F_k)$  是 Frechet 导数的内积。计算时忽略  $\epsilon$  项，说明这种方法是近似的，即由此得到的  $\delta m$  是不精确的。但可以应用迭代法，每次迭代用上一次的结果  $(W + \delta m)$  为起点，逐步得到与实际观测值符合最好的模型。

## 1.5 离散型反演问题

任何一个地球物理反演问题，如根据地球重、磁异常计算矿体或构造的空间位置及形态，根据地震体波或面波研究地球结构，根据地热流或电磁场推算地球内部物质状态，根据人造卫星轨道计算地球外表形状及内部物质分布，根据地磁场资料推算海底扩张及大陆漂移史等，都可以用下述离散模型表示。

由实际观测得到的  $m$  个离散的地球物理数据，以  $m$  维向量表示

$$Y^o = (y_1^o, y_2^o, \dots, y_m^o)^T \quad (1.10)$$

它称为观测值向量。

一个具体的地球物理问题，可以用  $n$  个离散的（具有相同或不同量纲的）物理参数来表示反演所要求的模型，写为  $n$  维向量

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (1.11)$$

它称为模型参数向量。

由初始的模型参数，根据具体的地球物理问题，可以计算出一组理论值，它可用  $m$  维向量表示

$$Y^c(X) = (y_1^c(X), y_2^c(X), \dots, y_m^c(X)) \quad (1.12)$$

它称为模型的理论值向量。

地球物理反演的关键是，用一定的数学方法寻找一个模型，使它尽量符合真实地球物理模型。即寻找参数向量  $X$ ，使其计算的理论值向量  $Y^c$  与观测值向量  $Y^o$  尽可能符合。为此，可以利用最小二乘原理，构造一个  $m$  维残差向量：

$$\epsilon(X) = (\epsilon_1(X), \epsilon_2(X), \dots, \epsilon_m(X))^T \quad (1.13)$$

其中，

$$\epsilon_1(X) = y_1^o - y_1^c(X)$$

$$\epsilon_2(X) = y_2^o - y_2^c(X)$$

... ..

$$\epsilon_m(X) = y_m^o - y_m^c(X)$$

令残差向量范数平方为极小：

$$\|\epsilon(X)\|^2 = \sum \epsilon_i^2(X) = \min \quad (1.14)$$

经过一定的数学变换，可由上式解出  $X$ ，从而使问题得解。

## 1.6 解离散型反演问题的数值计算方法

用于解离散型地球物理反演问题的数值计算方法常用的有广义逆方法和最优化方法。

### 1.6.1 广义逆方法

广义逆方法的基本步骤是把正问题线性化，由目标函数列出线性方程组，解这个线性方程组，得模型参数。具体方法是：由给定的模型参数，计算相应的理论值。若 (1.12) 式中的  $Y^c(X)$  为线性函数，则其各分量可以写成

$$\begin{aligned} y_1^c(X) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2^c(X) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m^c(X) &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned} \quad (1.15)$$

其中  $a_{ij}$  为常数。上式也可以直接写成矩阵形式

$$Y^c(X) = A \times X \quad (1.16)$$

其中  $Y^c$  为  $m$  维向量， $X$  为  $n$  维向量， $A$  为  $m \times n$  矩阵（系数矩阵）。

令残差向量为观测值与理论值之差

$$\epsilon(X) = Y^o - Y^c(X) = Y^o - A \times X \quad (1.17)$$

于是有关系

$$A \times X = Y^0 - \epsilon(X) \quad (1.18)$$

一般来说, 地球物理问题所反映的函数关系都是非线性关系, 所以对正问题做线性化处理。在模型参数的某个初始值  $X_0$  点进行 Taylor 展开, 略去二阶以上高次项, 有

$$\begin{aligned} y_1^c(X) &= y_1^c(X_0) + \Sigma(y_1^c/x_j)_{x_0} \Delta x_j \\ y_2^c(X) &= y_2^c(X_0) + \Sigma(y_2^c/x_j)_{x_0} \Delta x_j \\ &\dots \dots \dots \\ y_m^c(X) &= y_m^c(X_0) + \Sigma(y_m^c/x_j)_{x_0} \Delta x_j \end{aligned} \quad (1.19)$$

写成矩阵形式为

$$Y^c(X) = Y^c(X_0) + A \times \Delta X \quad (1.20)$$

其中  $A$  为微分系数矩阵 (即 Jacobi 矩阵), 而  $\Delta X$  为模型参数  $X$  的改正量。

由 (1.20) 式, 残差向量可以写成

$$\epsilon(X) = Y^0 - Y^c(X) = Y^0 - Y^c(X_0) - A \times \Delta X \quad (1.21)$$

令向量  $b = Y^0 - Y^c(X_0)$ , 表示观测值与初始模型理论计算值之差, 则 (1.21) 式可以写成

$$A \times \Delta X = b - \epsilon(X) \quad (1.22)$$

可见, (1.22) 式与 (1.18) 式在形式上是相似的, 即一个非线性问题可以转换成线性问题进行计算。所以, 在广义逆方法中一般只考虑线性方程组

$$A \times X = b \quad (1.23)$$

的解法。对于线性反演问题, 可直接把  $X$  做为模型参数,  $b$  做为观测值。对于非线性反演问题,  $X$  做为模型参数的改正量  $\Delta X$ ,  $b$  做为观测值与理论值之差。在 (1.23) 式中, 均略去了 (1.18) 和 (1.22) 式中的残差项  $\epsilon(X)$ , 这说明这种计算是近似的。但用迭代法可以使这种近似计算逐步逼近真值。

从以上讨论可见, 解上述反演问题实际上归结为求解线性方程组 (1.23) 的问题, 也就是求系数矩阵  $A$  的逆矩阵问题。根据逆矩阵的定义, 只有当系数矩阵  $A$  为满秩 (非奇异) 时, 它的逆矩阵才有意义。这时, (1.23) 式有唯一解, 并可以写成简单而又紧凑的形式

$$X = A^{-1}b \quad (1.24)$$

不过, 非奇异矩阵只是矩阵的一种特殊形式, 常见的是奇异矩阵或长方阵。对于这些一般的矩阵, 显然不存在通常意义下的逆矩阵, 并且这时 (1.23) 式也没有 (1.24) 表示的那种唯一解。

广义逆理论就是解决这种一般矩阵的求逆问题。对于任意的  $m \times n$  矩阵, 一般  $m \neq n$ , 且  $A$  可以有任意秩, 在广义逆的概念下, 它们存在着逆矩阵。并当 (1.23) 式有解时, 其解也可以表示成类似于 (1.24) 式的紧凑形式, 即

$$X = G \times b$$

其中,  $G$  是  $m \times n$  矩阵  $A$  的广义逆矩阵。这样, 广义逆理论就把解一般方程组的理论概括统一起来。其中, 常用的计算方法有正交分解法和奇异值分解法。

### 1.6.2 最优化方法

最优化方法是直接求目标函数  $\varphi(X)$  的极小值。其基本思路是用数值方法产生一个模型参数的点列

$$x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$$



使其满足

$$\varphi(x_0) > \varphi(x_1) > \dots > \varphi(x_k) > \dots$$

直到  $\varphi(x_n)$  小于给定精度为止。

最优化方法的一般计算步骤为：

- ① 给定实际观测数据与测点位置信息；
- ② 选择进行解释计算用的地球物理模型；
- ③ 给定理论模型各个参数的初值；
- ④ 用当前模型参数正演计算模型体的理论观测值，并将它与实际观测值对比；
- ⑤ 评定理论观测值与实际观测值的符合程度，即它们之间差异的大小，判断是否需要修改理论模型的参数重新计算对比；
- ⑥ 如果不满足要求，自动修改理论模型的参数，使理论观测值与实际观测值之间的差异不断减小；
- ⑦ 如此反复迭代，直到满足要求为止；
- ⑧ 最终得到的理论模型的参数，作为实际模型体的解释结果。

设实际观测值用  $\Delta T_k$  表示 ( $k$  为观测点号)， $k=1, 2, \dots, m$ ； $m$  为观测点数。模型体的理论观测值用  $f_k$  表示，它是观测点坐标和模型体参数的函数，即

$$f_k = f(x_k, y_k, z_k, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.25)$$

其中， $x_k, y_k, z_k$  为观测点坐标； $x_1, x_2, \dots, x_n$  模型体位置、大小、产状和物性参数等参量； $n$  为参量的个数。

通常，实测异常与理论异常之间差异的大小，是以各测点上两者之间偏差的平方和表示，即

$$\varphi = \sum (\Delta T_k - f_k)^2 \quad (1.26)$$

(1.25) 式中， $x_k, y_k, z_k$  在计算迭代过程中是不变的，需要求的是地质体参数  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 。所以， $\varphi$  可视为  $X$  的函数，即  $\varphi = \varphi(X)$ 。在上述的基本步骤中，关键问题是如何实现自动修改模型体的参数，即如何计算出这些参数的改正量。就是说，如何求一组参数  $X$ ，它使  $\varphi(X)$  为极小。

设给定的模型体的初始参数为  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ ，我们的目的在于求出一组关于模型体参数的改正量  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ ，来修改给定的初始参数，即有

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \delta_1 \\ x_2 &= x_2^0 + \delta_2 \\ \dots &\dots \dots \\ x_n &= x_n^0 + \delta_n \end{aligned} \quad (1.27)$$

写成向量的形式为：

$$X = X^{(0)} + \delta$$

这样便求出关于模型体参数的一组新值。如果将这组新参数代入 (1.26) 式能使目标函数  $\varphi$  减小，这就是成功的计算。如果能够确定这组新参数在一定精度范围内使  $\varphi$  取极小，就取  $x_1, x_2, \dots, x_n$  做为模型体的最终解释结果。

就如何自动修改理论模型参数，最优化方法又分为只利用目标函数值的直接法和利用目标函数的一阶导数或二阶导数的间接法。直接法不用计算目标函数的导数，通过对目标函数