广义逆阵理论选讲

党诵诗

八一出版社

广义逆阵理论选讲

党 诵 诗

八 一 出 版 社

京新登字117号

广义逆阵理论选讲
总参谋部测绘局

解放军出版社出版发行
（北京平安里三号）
（邮政编码100035）
一二〇一工厂印刷

787×1092毫米　32开本　3.75印张　80千字
1993年11月第1版　1993年11月（北京）第1次印刷
ISBN　7-5081-0134-0/E·61

内 容 简 介

本书以较小篇幅讲述了广义逆阵中若干重要的基本问题，主要包括有矩阵方程，分块阵的非奇异性，带权广义逆阵的公式，广义阵在平差中的应用，以及在特征值反问题的应用，特别是，为了对于Drazin广义逆阵的研究，还系统而完整地论述了Jordan标准形的结构及其与最小多项式的关系。所有这些，在取材上，涉及面较为广泛一些，在讲法上，也有与其它书中不尽相同之处。

本书适合从事应用数学、数值代数、测量平差以及其它有关方面的科研和工程技术人员阅读，也可作为大专院校有关专业师生的参考用书。

前　言

广义逆阵问题是数值代数理论中极为重要的内容，它在研究测量平差、误差分析、参数估计等方面有着广泛应用，例如，在著者1960年所译著作〔4〕中，就曾专门论及逆长阵概念在大地计算中的作用。目前，常见于国内的专著，主要有Rao和Mitra的〔2〕，Ben-Israel和Greville的〔1〕以及Campbell等人的〔3〕，内容十分丰富。在这些专著里，不少是对有关问题所做的一些总结性工作。

本书系著者多年来在郑州测绘学院为数学师资班、研究生班进行教学的部分讲义，现经修改补充写成此书，其中，也收进了著者个人在这方面的某些工作。

书中假定读者已具备线性代数的一般知识（如〔21〕的内容），在编著中，希望能以较小篇幅讲述广义逆阵中若干基本内容，俾有助于读者尽快熟悉这一领域的课题。本书取材较为广泛，在讲法上，也有与其它书中不尽相同之处。如Jordan标准型问题，我们利用特征值指标概念，系统而完整地研究了标准形的结构及其与最小多项式以及Drazin的广义逆阵的关系，然后再给出特征矩阵的初等因子、不变因式，等等。

由于著者水平所限，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正！

著者谨识

本 书 记 号

$C^{m\times n}$ ——全体mxn矩阵所成之集，

$C_r^{m\times n}$ ——$C^{m\times n}$中秩为r的矩阵所成之子集，

C_n ——n维(复)向量的全体，

{0} ——只含零矩阵或零向量的集，

R(X)——矩阵X的像域，

N(X)——矩阵X的零空间，

rk(X)——X的铁，

dim$L$——空间L的维数，

X^* ——X的转置共轭，

A^+ ——A的Moore-Penrose广义逆阵，

A^* ——A的群逆，

A^d ——A的Drazin广义逆阵，

I_k ——k阶单位矩阵(有时简写为I)，

$\|v\|$——向量v的长$\sqrt{v^*v}$，

$\|v\|_p$——向量v的带权p的长$\sqrt{v^*pv}$，

$(v, u)_p$——带权p的内积u^*pv，

$\|v\|_F$——Frobenius范数，

$\oplus$ ——直和，

$\Longleftrightarrow$ ——等价(必要而且充分的条件)

目　　录

§1 若干引理

一、M-P广义逆阵

设$A\in C^{m\times n}$，$X\in C^{n\times m}$。以后将考虑X与A的下列诸关系：

$$AXA=A, \tag{1}$$

$$XAX=X, \tag{2}$$

$$(AX)^*=AX, \tag{3}$$

$$(XA)^*=XA, \tag{4}$$

$$AX=XA,\ (m=n) \tag{5}$$

$$A^sXA=A^s,\ (m=n) \tag{1^s}$$

如果X满足条件(i)，(j)，…，(k)，则记$X=A^{(i,j,\cdots,k)}$，这种X的全体所成之集用$A\{i,j,\cdots,k\}$表示。$A^+=A^{(1,2,3,4)}$叫做A的Moore-Penrose广义逆阵（M-P逆阵），$A^{(1)}$、$A^{(2)}$分别叫做内逆阵、外逆阵。关于A^+的性质、计算以及应用将陆续加以研究。其中，有些性质，虽然证明简单，但却经常用到。例如，

$$(A^*)^+=(A^+)^*,\ (A^+)^+=A \tag{1.1}$$

$$(A^*A)^+A^*=A^+=A^*(AA^*)^+ \tag{1.2}$$

下面就性质和计算各举一例。

例1 （A^+的唯一性）若X与Y均为A的M-P逆阵，则$X=Y$。

证 事实上，我们从下列诸等式便可看出，即

$$
\begin{aligned}
Y &= Y\underbrace{AY} = YY^*A^* = Y\underbrace{Y^*(A^*}\underbrace{X^*A^*}) = Y\underbrace{AYA}X \\
&= YAX = \underbrace{Y(A}\underbrace{XA})X = \underbrace{A^*Y^*A^*}X^*X \\
&= \underbrace{A^*X^*}X = XAX = X.
\end{aligned}
$$

例2 设$C\in C^{k\times n}$，$p\in C^{1\times n}$，$B=\begin{bmatrix} I_k \\ pc^+ \end{bmatrix}$，计算$C^+B^+$。

记$x=pC^+$，$h^{-1}=(1x)\begin{pmatrix}1\\x^*\end{pmatrix}=1+xx^*$，则 $B^*B=I_k+x^*x$。熟知([21]，p202)：$hx^*=(I_k+x^*x)^{-1}x^*$，故

$$
\begin{aligned}
B^+ &= (B^*B)^+B^* = (I_k+x^*x)^{-1}(I_k \,\vdots\, x^*) \\
&= ((I_k+x^*x)^{-1} \,\vdots\, kx^*);
\end{aligned}
$$

又，利用恒等式$(I+S)^{-1}=I-(I+S)^{-1}S$，有

$$(I_k+x^*x)^{-1}=I_k-\underbrace{(I_k+x^*x)^{-1}x^*}x=I_k-hx^*x$$

最后即可得到

$$C^+B^+=(C^+-C^+hx^*x \,\vdots\, c^+hx^*)=(c^+-fpc^+ \,\vdots\, f),$$

其中，$f=c^+hx^*=c^+(c^*)^+p^*h=c^+(c^*)^+p^*[1+pc^+(c^*)^+p^*]^{-1}$。

二、新的定义方程 引理

现在证明本书后面需要用到的一些引理。

A的像域R(A)和零空间N(A)分别表示C_m中的下列子空间：

$$R(A)=\{y;\ y=A\lambda,\ \lambda\in C_n\},$$

$$N(A^*)=\{z;\ A^*z=0\},$$

引理1.1 $rk(CC^{(1)})=rkC=rk(C^{(1)}C)$;

$rk(CC^{(2)})=rkC^{(2)}=rk(C^{(2)}C)$.

证 因为 $rk(CC^{(1)}) \leqslant rkC = rk(CC^{(1)}C) \leqslant rk(CC^{(1)})$，所以，这些不等式必须全取等号，即$rk(CC^{(1)}) = rkC$。同理可证$rk(C^{(1)}C) = rkC$。

仿此，可以证明引理中的其它关于秩的等式。

引理1.2 $rk(CC^{(1,2)}) = rkC = rkC^{(1,2)} = rk(C^{(1,2)}C)$。

证 这只要从等式$C^{(1,2)}CC^{(1,2)} = C^{(1,2)}$，$CC^{(1,2)}C = C$即可仿照引理1.1的证明去证明。

引理1.3 对于前面的等式(1)、(2)以及等式

$$rkX = rkA \qquad (*)$$

从其中的任何两个，可以推出另外一个。

证 (i)由(1)、(2)推出(*)：既然$X \in A\{1, 2\}$，则从引理1.2可知，$rkX = rkA$。(ii)由(1)、(*)推出(2)：显然$R(X) \supset R(XA)$，根据引理1.1，$rkA = rkXA$，故$rkX = rkA = rkXA$，即$\dim R(X) = \dim R(XA)$，因此，$R(X) = R(XA)$。于是，存在有C，使$X = XAC$，从而得

$$XAX = XA\underbrace{(XAC)} = XAC = X。$$

(iii)由(2)、(*)推出(1)：这只要在上面的证明中，将X与A对调即可。

引理1.4 设$W = UV$。若U为列满秩阵，则$rkW = rkV$；若V为行满秩阵，则$rkW = rkU$。

证 若U为列满秩阵，则因$U^+U = I$，故$U^+W = V$，从而

$$rkW \geqslant rk(U^+W) = rkV;$$

另一方面，有

$$rkW = rk(UV) \leqslant rkV$$

于是所证等一个等式成立。同理，可证明第二个等式。

引理1.5 等式$N(A^*) = N(A^+)$，$R(A^*) = R(A^+)$成立。

证 由(1.2)式知

$$A^{+}=(A^{*}A)^{+}A^{*} \tag{1.3}$$

$$=A^{*}(AA^{*})^{+} \tag{1.3$'$}$$

同样容易证明

$$A^{*}=(A^{*}A)A^{+} \tag{1.4}$$

$$=A^{+}(AA^{*}) \tag{1.4$'$}$$

所以，从(1.3)，(1.4)可得到第一个等式；从(1.3)′，(1.4)′可得到第二个等式。

引理1.6 设E为幂等的埃尔米特阵，则$E^{+}=E$。

证 实际上，从等式$E^2=E=E^*$，结合M-P逆阵定义，立即可得到本引理。

引理1.7 令$E_1=I-A^{(1,4)}A$，$E_2=I-BB^{(1,3)}$，$E_3=I-A^{(2,4)}A$，$E_4=I-BB^{(2,3)}$，则有

$$E_i^{+}=E_i \tag{1.5}$$

证 先就E_3证明。从$A^{(2,4)}\in A\{4\}$可证$E_3^*=E_3$，且因

$$\begin{aligned}E_3&=(I-A^{(2,4)}A)^2=I-2A^{(2,4)}A+\underbrace{A^{(2,4)}AA^{(2,4)}}A\\&=I-2A^{(2,4)}A+A^{(2,4)}A=I-A^{(2,4)}A=E_3\end{aligned} \tag{1.6}$$

故E_3是幂等的埃尔米特阵，于是由引理1.6即知$i=3$时，(1.5)式成立。顺便指出矩阵$F_3=A^{(2,4)}A$是与E_3成酉交的矩阵，即$E_3^*F_3=0=F_3^*E_3$。

对于$i=1, 2, 4$，可同样证明类似结论。特别地，经常要遇到的幂等的埃尔米特矩阵是，形如$I-AA^{+}$或$I-A^{+}A$的矩阵。

定义1.1 矩阵$A^{(1)}\in A\{1\}$和$A^{(2)}\in A\{2\}$分别叫做A的**内逆(阵)**和**外逆(阵)**；$A^{(1,2)}\in A\{1, 2\}$叫做A的**反射逆(阵)**。

定理1.1 $X=A^+$的必要与充分条件是，下面的任何一组等式成立，即

$$(\mathrm{i})\begin{cases}AA^*X^*=A & (1.7)\\ XX^*A^*=X & (1.8)\end{cases}$$

$$(\mathrm{ii})\begin{cases}X^*A^*A=A & (1.9)\\ A^*X^*X=X & (1.10)\end{cases}$$

证(i) **充分性** 事实上，由(1.7)、(1.8)可分别得到$(XA)^*=XA$，$(AX)^*=AX$，将这两个等式再依次代入(1.7)、(1.8)即知

$$X\in A\{1,\ 4\},\ X\in A\{2,\ 3\} \qquad (1.11)$$

由此，有$X\in A\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$。

必要性 根据A^+的定义方程可以立即得证。

证(ii) 仿照上面的证明，(1.9)、(1.10)蕴含着

$$X\in A\{1,\ 3\},\ X\in A\{2,4\} \qquad (1.12)$$

因此，满足(ii)中一组等式的$X\in A\{1,2,3,4\}$，且该组等式亦为必要条件。

定理1.1证毕。实际上，(i)或(ii)均可作为A^+的定义方程。

满足(1.9)式的广义逆阵$X=A^{(1,3)}$叫做A的**最小二乘广义逆阵**，其特点是，$\forall$向量b，则$y_0=Xb$是方程$Ay=b$的最小二乘解。

证 因为，由(1.9)式，$A^*(Ay_0-b)=A^*(AX-I)b=0\cdot b=0$，所以，有$A(y-y_0)\perp(Ay_0-b)$(在复数范围内，$\perp$表示酉交)，从而，得

$$\begin{aligned}\|Ay-b\|^2&=\|(Ay_0-b)+A(y-y_0)\|^2\\&=\|Ay_0-b\|^2+\|A(y-y_0)\|^2\\&\geqslant\|Ay_0-b\|^2,\end{aligned}$$

即 $\|Ay_0-b\|=\min\limits_{y}\|Ay-b\|$。证毕。

满足(1.7)式的广义逆阵 $X=A^{(1,4)}$ 叫做A的**范数极小的广义逆阵**，其特点是，对于相容方程 $Ay=b$，$y_0=Xb$ 不仅是解，而且就范数而言，还是极小的。

证　先证是解。因为方程相容，故 $b=A\lambda$，$\lambda\in C^{n\times1}$。于是方程成为 $Ay=A\lambda$，而 $y_0=Xb=XA\lambda$，由(1.7)知道，它确实是解，此时，通解为 $y=y_0+(I-XA)z$，$\forall z$，再由(1.7)知道，

$$\begin{aligned}\lambda^*A^*X^*(I-XA)&=\lambda^*XA(I-XA)\\&=\lambda^*X\cdot0=0,\end{aligned}$$

所以，有 $y_0\perp(I-XA)z$，从而，与上面同样道理可知

$$\|y\|^2=\|y_0+(I-XA)z\|^2\geqslant\|y_0\|^2,$$

即 $\|y_0\|=\min\limits_{z}\|y\|$。证毕。

§2 矩阵方程

一、AXB＝D的通解

定理2.1 固定$A^{(1)}$，$B^{(1)}$，矩阵方程 $AXB=D$ 有解的充要条件是

$$AA^{(1)}DB^{(1)}B=D, \tag{2.1}$$

且如果有解，则$X_0=A^{(1)}DB^{(1)}$是一特解。

证 充分性。因为 $AX_0B=AA^{(1)}DB^{(1)}B=D$，所以，在所给条件下，$X_0$的确满足方程。

必要性 如果方程有解，则

$$D=AXB=AA^{(1)}\underbrace{AXB}B^{(1)}B=AA^{(1)}DB^{(1)}B,$$

即相容条件成立。

定理2.2 在定理2.1的方程中，若X_0是一特解，则其通解为

$$X=X_0+V-A^{(1)}AVBB^{(1)} \tag{2.2}$$

其中，V 是任意的。

证 先证是解。$\forall V$，有

$$AXB=AX_0B+AVB-AA^{(1)}AVBB^{(1)}B=AX_0B=D,$$

即所给X满足方程。再证是通解，事实上，对任一解$\tilde{X}$，因为

$$A\tilde{X}B=D=AX_0B,$$

故令 $V=\tilde{X}-X$。即可得到 $A^{(1)}AVBB^{(1)}=A^{(1)}A\tilde{X}BB^{(1)}-$

$A^{(1)}AX_0BB^{(1)}=0$，因而

$X=X_0+V-A^{(1)}AVBB^{(1)}=\widetilde{X}$。

定理2.3　上面的通解可以写成 $X=X_0+(I-A^{(1)}A)K+L(I-BB^{(1)})$，其中，K、L是任意的。

证　在定理2.2的通解X的表达式中，如果令 $V=V_1+V_2$，则

$$X=X_0+(I-A^{(1)}A)(V_1+V_2BB^{(1)})$$
$$+(V_2+A^{(1)}AV_1)(I-BB^{(1)}),$$

然后，记 $K=V_1+V_2BB^{(1)}$，$L=V_2+A^{(1)}AV_1$，(V_1、V_2 是任意的)，于是，可以得到定理中的表达式。

定理2.4　$AX=AF$ 具有通解 $X=A^{(1)}AF$
$$+(I-A^{(1)}A)Z。$$

证　显然，$X_0=A^{(1)}AF$ 是方程的一解，因此，由定理2.2，其通解为 $\widetilde{X}=X_0+(I-A^{(1)}A)V$。

定理2.5　$XB=EB$ 具有通解 $X=EBB^{(1)}$
$$+Z(I-BB^{(1)})。$$

证　将方程写成 $B^*X^*=B^*E^*$，然后根据定理2.4解出 X^*，最后即可得到定理的结果。

定理2.6　$\forall b\in R(A)$，方程 $Ax=b$ 具有解 $x=Xb$ 的充要条件是，$X\in A\{1\}$。

证　充分性，∵可以令 $b=A\lambda$，∴$AXb=AXA\lambda=A\lambda=b$，于是 Xb 是方程的解。

必要性　$\forall\lambda$，$b=A\lambda\in R(A)$，故 $x=Xb$ 是 $Ax=b$ 的解，即

$$AXA\lambda=AXb=b=A\lambda,$$

既然 λ 是任意的，故 $AXA=A$，或 $X\in A\{1\}$。

定理2.7　关于 $A^{(1)}$、$A^{(2)}$ 的转置共轭阵，有下面关系：