

计算流体力学的理论、 方法及应用

吴江航 韩庆书 著

科学出版社

计算流体力学的理论、 方法及应用

吴江航 韩庆书 著



科学出版社

1988

内 容 简 介

本书全面系统地介绍了计算流体力学这门新兴学科的理论、方法及应用,包括计算流体力学的数学物理基础、计算方法(有限差分法、有限单元法、有限分析法、各种形式的格林函数法与分步法)及数值模拟三个主要部分。本书的特点是理论与应用并重,分析与方法兼顾,数学与物理相结合,其中反映了作者在此领域内多年的教学和科研部分成果。

本书可供从事计算流体、计算数学、计算物理、流体工程,以及大气、海洋和环境科学有关方面的科技人员、大专院校有关专业的师生参考和使用。

计算流体力学的理论 方法及应用

吴江航·韩庆书 著

责任编辑 赵徐懿 谭卫瀚

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988年5月第1版 开本:787×1092 1/16

1988年5月第一次印刷 印张:19

插1—550 插页:插2

印数:41—5,100 字数:434,000

ISBN 7-03-000275-X/O·76

布面精装 7.50 元
定价: 平 装 5.50 元

序

计算流体力学是一门新兴的边缘学科,具有很强的理论性和应用性。随着电子计算机的发展,流体流动的计算机模拟已成为流体力学理论研究和流体工程设计的重要手段。理论分析,实验研究和数值模拟三者相互渗透,不仅推动了流体力学理论的新发展,而且大大加强了流体力学的工程应用。今天,计算流体力学已取得许多重要成果,建立和开创了颇多的理论和方法,所涉及的面很广,国外出版的有关书籍也不少,但这些书大多是偏重某一方面的方法和问题,有的只是偏重于实际应用,有的又只是偏重于数学理论,而且许多新的方法还散布在有关的杂志和文献中。为了在一定的理论高度、应用的广度和较新的成果方面,将计算流体力学系统地介绍给我们的读者,本书意在遵循理论与应用、分析与方法、数学与物理相结合的途径,力求对计算流体力学进行较系统和严密的论述。为此,在书中对其数学理论基础给予一定的阐述,尽可能吸取当前的新成果,给出计算流体力学中的一些主要典型方法,并在书中收入了一些数值模拟的实例。某些篇幅是作者多年来从事计算流体力学工作的研究成果。

我们希望本书能介绍计算流体力学的全貌。为此,本书由数学物理基础、计算方法及数值模型三部分内容组成,包括有限差分法、有限元方法、有限分析法、各种形式的 Green 函数方法以及各种杂交方法等。各章保持着相对的独立性,对其中某些章节感兴趣的读者可以很方便地从中做出取舍。

我们希望本书既实用,又有一定的理论分析内容。为此,我们在第 1 章中阐述了计算流体力学中的基本方程组、定解问题及求解中的困难,对间断面-激波和水跃作了论述,从 Airy 理论和 Boussinesq 理论出发研究了浅水波,也对旋转分层流和湍流作了概述。

为了不被流体力学中纷纭复杂的现象所迷惑,抓住其主要之点,在第 2 章中,我们选取了能代表复杂流体力学方程组的模型方程,阐述其数学物理性质,以使用这些模型方程来深入研究数值方法的特性,比较各种方法的优劣,减少和修正某些非物理效应,构造物理上合理、数学性质优良的数值格式。

第 3, 4 章为有限差分近似的数学性质和 Banach 空间理论。

我们认为,计算流体力学所涉及的内容不只是求解流体力学初边值数学问题的各种数值方法,它的实质是要建立流体运动的有限数值模型,而对这些数值模型不仅要从数学上,而更重要的还要从物理上来加以考察,这对理论工作者和实际工作者都是非常重要的。为此,我们特别写了第 5 章:离散近似的伪物理效应及其修正,希望以此引导实际工作者从物理的角度来研究和改善方法。

摸清模型方程的基本格式,对于指导进一步的工作是重要的。为此,我们在第 6, 7 章中专门介绍典型格式,特别对守恒型和特征型格式给予注意,对精解差分格式也作了介绍。

为适应工程界普遍的需要,构造比较经济的数值格式,第 8 章详细论述了多维初值问题分步法的数学原理及实用的分步格式。

第9章的目的在于阐述物理解的计算和比较好的格式,第10章介绍处理 Navier-Stokes 方程行之有效的的方法和技巧,以便实际工作者参考。

有限元方法是计算流体中的重要方面,我们从试函数方法的革新与发展的角度论述有限元,这样可使脉络清晰,在第11,12章中,不仅包括固定域和可变域的变分有限元,而且包括更为普遍的 Galerkin 有限元,还着重论述了流体力学所特有的方法及有限元的近代发展。

有限分析方法在计算流体中的作用并非为很多人所了解,我们在第13章中抽出篇幅来阐述这种将控制方程的局部分析解组成整体的数值解的方法,从基本思想到数学结构乃至在流体力学中的应用,都做了较为简略而又全面的论述。

第14章着重把潮流、对流扩散及不可压粘性流的分步杂交计算方法介绍给读者。

第15章阐明流体力学中各种形式的 Green 函数方法和它们的优点。

计算流体力学在飞速发展,有些新的理论和新的成果还不能马上反映在我们的书中,由于作者的水平有限,错误也在所难免,欢迎各界读者批评指正。

作者

1986年10月

目 录

引言	I
第 1 章 流体力学基本方程组	4
§ 1.1 均匀流体不可压无粘性流的方程组	4
§ 1.2 可压缩气体无粘性流的方程组和间断面关系式	5
§ 1.3 浅水波的近似方程组	7
§ 1.4 浅水环流的方程组和边界条件	11
§ 1.5 不可压粘性流动的 Navier-Stokes 方程和边界条件	12
§ 1.6 可压缩粘性流动的 Navier-Stokes 方程	13
§ 1.7 旋转分层流动的基本方程组	14
§ 1.8 湍流的封闭方程组	16
§ 1.9 边界拟合坐标系	20
第 2 章 流体力学的模型方程及其数学物理性质	27
§ 2.1 无粘性流体力学的模型方程, 弱解与物理解	27
§ 2.2 粘性流体力学的模型方程, Burger 方程及其极限解	39
§ 2.3 KdV 方程的数学性质	44
第 3 章 有限差分近似及其数学性质	50
§ 3.1 离散近似	50
§ 3.2 初值问题的差分方程	53
§ 3.3 截断误差与差分近似的相容性	53
§ 3.4 舍入误差与差分解的稳定性	54
§ 3.5 离散化误差与差分解的收敛性	62
第 4 章 数值解算的数学理论基础	64
§ 4.1 泛函分析中的若干定义和符号	64
§ 4.2 距离空间, Banach 不动点定理及其在迭代求解代数方程中的应用	65
§ 4.3 Banach 空间, 有界线性算子的扩张定理, 一致有界定理	70
§ 4.4 适定的初值问题在 Banach 空间的数学提法	73
§ 4.5 有限差分逼近的相容性、收敛性及稳定性在 Banach 空间的数学表示	75
§ 4.6 Lax 等价定理	76
§ 4.7 受扰差分系统的稳定性定理	78
§ 4.8 多层差分方程在辅助 Banach 空间中的数学表示	79
§ 4.9 等价范数定理	81
第 5 章 离散近似的伪物理效应及其修正	83
§ 5.1 “逆风”效应与“迎风”修正	83
§ 5.2 数值耗散与数值频散	89
§ 5.3 能量增长与反常能谱转移效应, 伪湍流现象	94
第 6 章 流体力学模型方程的几种差分格式	96
§ 6.1 过程的稳定性和定解条件的恰当性	96

§ 6.2	对流方程的几种差分格式	98
§ 6.3	扩散方程和对流扩散方程的差分格式	103
§ 6.4	KdV 方程的差分格式	107
§ 6.5	双曲型方程组,特征型和守恒型的差分格式	108
第 7 章	非线性方程的差分格式	114
§ 7.1	无粘性方程的差分格式	114
§ 7.2	粘性方程的差分格式	117
§ 7.3	隐式格式	119
§ 7.4	线性化方法	119
§ 7.5	精解差分格式	121
第 8 章	求解多维初值问题的分步方法和交替方向的隐式格式	126
§ 8.1	数学原理与基本思想	126
§ 8.2	分步差分格式	129
§ 8.3	交替方向的隐式格式	131
§ 8.4	稳化修正格式	133
§ 8.5	分步方法在求解多维流体力学问题中的应用	135
第 9 章	计算气体与浅水波运动物理解的差分格式	138
§ 9.1	单调差分格式	138
§ 9.2	一维 Godunov 格式	144
§ 9.3	活动网格的 Godunov 格式	148
§ 9.4	二维 Godunov 格式	150
§ 9.5	关于物理解的计算问题	154
第 10 章	不可压粘性流的差分解	158
§ 10.1	网格步长与差分格式的选取	158
§ 10.2	定常 Navier-Stokes 方程的差分格式	159
§ 10.3	边界格式	163
§ 10.4	压力的 Poisson 方程格式	166
§ 10.5	人工压缩性方法的交替方向隐式 (ADI) 格式	168
§ 10.6	不定常 Navier-Stokes 方程的差分格式	169
§ 10.7	MAC 方法	170
§ 10.8	罚函数方法	171
第 11 章	流体力学中的有限元方法	172
§ 11.1	试函数方法	172
§ 11.2	试函数方法的革新与发展	188
§ 11.3	单元类型与插值函数	190
第 12 章	二维不可压粘性流与浅水流动的有限元解	200
§ 12.1	不可压粘性流的有限元解	200
§ 12.2	流体力学有限元方法的发展	204
第 13 章	求解对流扩散问题与不可压粘性流的有限分析方法	216
§ 13.1	有限分析法的基本思想与数学结构	216
§ 13.2	有限分析的离散格式	217
§ 13.3	定常不可压粘性流的有限分析解	233

§ 13.4	不定常不可压粘性流的有限分析解	238
第 14 章	求解对流扩散问题与不可压粘性流的分步杂交方法	243
§ 14.1	对流扩散方程及其分步杂交解法	243
§ 14.2	分步杂交方法的 L_∞ 稳定性分析	249
§ 14.3	检验与应用举例	250
第 15 章	流体力学中的 Green 函数方法	276
§ 15.1	数值求解定常不可压粘性流的 Green 函数方法	276
§ 15.2	Stokes 流解	279
§ 15.3	非线性问题解	282
§ 15.4	求解不可压粘性流动的积分表达式方法	284
§ 15.5	求解不可压位势流动的有限基本解法	285
参考文献		288

引言

高速、大容量电子计算机的出现为各种复杂问题的大规模计算提供了可能性。物理领域内的大量经验告诉我们,在满足下列两个条件下,各种问题的数值模拟和数值计算可用于预测和工程设计的目的:

(1) 对问题的物理本质了解得很清楚,并可用精确的数学模型来表达。

(2) 有足够大的计算机,以便在实际可能的时间和费用下,用数值方法解出这些数学问题。

天体力学是首先满足这两个条件并使计算机得到重大应用的领域之一。计算机求解牛顿运动方程能非常准确地算出行星和卫星的运行表。宇宙航行就是现代高速电子计算机用于天体力学的一个实例。目前在天体力学中,计算机完成着所有的轨道计算,而不需要任何实验的帮助。在60年代,比较先进的计算机出现之后,用 Monte-Carlo 方法来计算中等系统的热中子流特性成为可能。计算结果是如此之准确,以致计算机的中子系统分析在很大的程度上取代了原来用于核武器临界性研究的实验工作。许多早年使用过的实验设备已被拆除了,计算机已经取代了它们,成为提供所需数据的主要手段。

众所周知,近年来,在结构设计方面,根据有限元方法编制出来的通用计算机程序也可用来确定各种复杂的应力分布。流体运动是最为复杂的机械运动,流体的运动远不如上述领域中的问题容易在计算机上进行模拟。但电子计算机的飞速发展对流体力学也产生了重要影响。这种影响首先反映在空气动力学方面。

过去在飞机和导弹的设计中,风洞试验是提供气动力数据的主要手段。但计算水平的惊人发展提供了与传统风洞试验完全不同的气动力流场的模拟方法。因为计算机和风洞的主要局限性完全不同,所以这两种设备所提供的气流模拟是相互补充的。计算机和风洞的相对地位显然取决于为适应现有计算机而作的数学模型的简化程度。自1946年第一台电子计算机“ENIAC”问世以来,计算机发展的速度是极其迅速的。在最近25年中,运算速度增长了五个数量级,主存增加了三个数量级。与此同时,计算技术也有很大的发展。现在计算机已能计算出飞机的全机压力分布,并可取得不可能从风洞试验得到的数据(Chapman, 1979)。对粘性不很重要的其他气体运动,如核爆炸冲击波的传播、绕射等,计算机已成为取得动态模拟数据的主要手段。

本世纪初,人类进入航空时代。作为航空基础之一的空气动力学开始迅速发展。60年代,载人宇宙飞船的问世标志着高速空气动力学的发展已达到成熟阶段。其中电子计算机在解决有关问题中起了重要作用。

70年代前后,根据人类生产实践的迫切需要,科学工作者开始对能源开发、环境保护等问题作深入的研究,提出了越来越多的流体力学问题。地球物理流体力学、环境流体力学、海洋动力学等一些新兴学科应运而生,并在海底采油、控制污染、防止自然灾害及天气预报等方面得到广泛应用。在解决这些问题中电子计算机发挥着越来越大的作用。

对过去建立在经验公式基础上的古老水力学,电子计算机也可以使其精确化,“返老还童”。许多过去只能依靠实物模型(如水工模型)解决的问题,现在已可通过计算机解决。当前,在潮汐河流的研究、洪水演变的计算、垮坝波的模拟、截流方案的选择和电站冷却水的分析方面,电子计算机也在得到广泛的应用。

计算机的数值模拟不仅可用于各种预测和工程设计的目的,有如实验一样,它还可用来揭示许多新的流动现象。

早年,流体力学和其他物理学科一样,分为理论和实验两个分支。随着电子计算机的出现和现代计算技术的发展,已可用电子计算机作为模拟和实验手段,数值地求解流体力学中各种各样的问题。这样就构成了流体力学的另外一个分支——计算流体力学。由于电子计算机所能表示的数字和数位均是有限的,而且只能进行离散量的运算,所以各种各样的流体力学问题必须首先变为离散的有限的数值模型,才能在计算机上求解;而将流体的连续流动用多个质点、离散涡元或有限波系的运动来近似,在数学上就表示为有限差分、有限单元、有限基本解或有限分析的形式。因此,计算流体力学不只是探求流体力学微分方程的初边值问题的各种数值解法,它的实质是要在物理直观和力学实验的基础上建立各种流体运动的有限的数值模型。也就是说,计算流体力学必须从各种流体运动的实际现象出发,掌握流体力学总结出来的规律性,从而建立在物理上合理、在数学上适定、适合于在计算机上进行计算的有限数值模型。由于作为连续介质的流体运动在理论上是一个无限的信息系统,而计算流体力学实际上所能给出的却是一个有限的信息系统,所以计算流体力学还要对用这样有限的信息系统去代替无限的信息系统的可靠程度作出估计。最后,计算流体力学还必须给出在实际可能的时间和费用下实现这种数值模型的快速算法。

计算流体力学不是纯粹的理论分析,因为流体力学具有特别强的非线性性质,它需要进行很多数值实验。描述流体运动的方程可以是抛物型、椭圆型、双曲型以至混合型的微分方程(如跨音速气流和水波中的陷波现象),它们可能有各阶的数学奇点以及未知的或无穷远的边界。而现有的非线性问题的数值解法的数学理论还是很不完备的。现在尚无严格的稳定性分析、误差估计和收敛性的证明。虽然在解的存在性和唯一性方面取得某些结果,但还不足以对我们所感兴趣的问题给予肯定的回答。在计算流体力学中,仍然是一方面要依靠对比较简单的线性的问题的严格数学分析,另一方面也要依靠物理直观、力学实验的启发和在计算机上的数值试验。这种数值实验有其自己独特的优点。它可以完全控制流体的性质,如流体的密度、粘性等。它的“实验探针”对流动不产生扰动。它可以进行纯二维的实验,这在实验室内是不可能真正实现的。它对于流动参数的选择具有巨大的灵活性,例如它能任意选择边界层的初始厚度和速度剖面而不依赖于单位长度的雷诺数和马赫数,这在风洞中也是不可能的。数值实验可以做无论是理论分析还是实物模型实验所不能办到的事情,它能检验流动现象对理论分析中所做的各种近似的敏感性,如常粘性系数、忽略浮力、边界层近似和普朗特数取作1等。它还能检验新的流体模型的本构方程的合理性。

但是计算流体力学中的有限的数值模型只有在网格尺度为零的极限情况下才能精确地模拟连续介质。而这种极限是永远无法达到的。离散化的结果不仅在数量上影响计算的精度,而且在性质上还会改变流动的特征(产生伪物理效应,如数值粘性与频散;在非

线性问题中的反常能谱转移效应等)。在有限的数值模型中也无法反映小尺度或短波长的流动现象,如滑移线和拐角处的极小涡流,而这些现象可能影响着流动的大尺度特征。计算流体力学是不同于实验流体力学和理论流体力学的一门独立的学科,它同时又是一门边缘学科。计算流体力学有它自己的特点、自己的方法和自己的困难。它的理论基础是流体力学,而计算数学是建立数值模型和解决有关问题必不可少的一部分内容。因此,计算流体力学正处在实验流体力学、理论流体力学和计算数学的汇合点上。它的有成效的发展历史说明,必须把这三者紧密地有机地结合起来。

第1章 流体力学基本方程组

§ 1.1 均匀流体不可压无粘性流的方程组

对于均匀流体(密度各处相等)的不可压无粘性流,有

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

其中的第一个方程为流体的运动学方程,表示流体的不可压性质;第二个方程为动力学方程,表示牛顿第二定律.若将铅直方向取为坐标轴 z ,并以向上为正,则(1.1.1)式的第二个方程还可以改写为

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \quad (1.1.2)$$

在固壁上应满足不穿透条件

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{设固壁静止不动}) \quad (1.1.3)$$

对于具有自由面的流动,在自由面

$$F(\mathbf{x}, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0 \quad (1.1.4)$$

上,应满足运动学条件

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0 & \text{或} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = w \end{cases} \quad (1.1.5)$$

和动力学条件

$$p = p_a = \text{const} \quad (1.1.6)$$

对于无粘性不可压的均匀流体,若在初始时刻运动是无旋的,即存在速度势 ϕ ,满足 $\mathbf{v} = \nabla \phi$;则在以后的任意时刻,运动也应是无旋的.这种流动应满足下列方程:

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (1.1.7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (1.1.8)$$

和边界条件:

在不动的固壁 $z = -h(x, y)$ 上,有

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (1.1.9)$$

在自由面 $z = \zeta(x, y, t)$ 上,有

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\zeta = 0 \end{cases} \quad (1.1.10)$$

(取自由面上的压力 $p_a = 0$; 假设无穷远处流体静止, 自由面 $z = 0$)

§ 1.2 可压缩气体无粘性流的方程组和间断面关系式

对于可压缩气体的无粘性流, 质量守恒、动量守恒和能量守恒的方程式可以分别写为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathcal{J}) = \rho \mathbf{F} \\ \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{v} + p \mathbf{v}) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \end{cases} \quad (1.2.1)$$

其中 $\mathcal{J} = \{\delta_{ij}\}$ 为单位张量, $E = e + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ 为单位容积中气体的总能量。

对于完全气体 $e = \frac{1}{(\gamma - 1)} \frac{p}{\rho}$, 非守恒型的连续方程、动量方程和能量方程又可写为如下的形式

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla p = \rho \mathbf{F} \\ \frac{Dp}{Dt} + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

微分形式的守恒型方程 (1.2.1) 和非守恒型方程 (1.2.2) 是完全等价的, 但用它们来构造的数值格式却不是等价的。

对于可压缩气体的无粘性流, 除了固壁和自由面的边界外 (其边界条件与不可压流体的无粘性流相同), 还可能产生间断面, 包括激波、接触面和滑移面。在激波上应满足 Rankine-Hugoniot 条件:

$$\begin{cases} M = \rho_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} - c) = \rho_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} - c) \\ M (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}) = p_1 - p_2 \\ M \left(e_2 + \frac{1}{2} v_2^2 - e_1 - \frac{1}{2} v_1^2 \right) = (p_1 \mathbf{v}_1 - p_2 \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{n} \times \mathbf{v}_1 = 0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

式中前面三个方程分别表示气体穿过激波后质量守恒、动量守恒和能量守恒关系式, 其中 c 为激波速度, 下标“2”表示激波后的量, 下标“1”表示激波前的量。最后一个方程表示在激波面的两侧, 切向速度连续。

在接触面上有

$$\begin{cases} \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = U \\ \mathbf{n} \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{v}_1 \end{cases} \quad (1.2.4)$$

两侧的气体无相对运动,仅密度和温度有间断.

在滑移面上

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = U \quad (1.2.5)$$

密度和切向速度分量 $\mathbf{n} \times \mathbf{v}$ 可以有任意跳跃值.

对于完全气体,熵为

$$S = C_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const} \quad (1.2.6)$$

内能为

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (1.2.7)$$

若用 $\xi = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$ 表示激波强度,将 (1.2.6) 和 (1.2.7) 代入激波关系式 (1.2.3) 可得

$$\frac{S_2 - S_1}{C_v} = \ln \frac{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \xi\right)^\gamma (1 + \xi)}{\left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \xi\right)^\gamma} \quad (1.2.8)$$

实际上, $\gamma > 1$, $\xi > -1$; 由 (1.2.8) 可以看出, $\frac{d(S_2 - S_1)}{d\xi} > 0$. 根据热力学第二定律, 流体微团穿过激波时熵应增加, 即 $S_2 - S_1 > 0$, 这意味着

$$\xi > 0 \quad (1.2.9)$$

激波只可能是压缩间断. 对于正激波, 由这一结论可以得出: 相对于激波的运动, 激波前的气流是超音速的, 即

$$M_1 = \frac{c - u_1}{a_1} = \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \xi\right)^{\frac{1}{2}} > 1 \quad (1.2.10)$$

激波后的气流则为亚音速的, 即

$$M_2 = \frac{c - u_2}{a_2} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \xi}{1 + \xi}\right)^{\frac{1}{2}} < 1 \quad (1.2.11)$$

其中 $a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ 为音速.

上述不等式 (1.2.9), (1.2.10) 和 (1.2.11) 虽然是对完全气体而导出的, 但对于其他非完全气体也普遍成立 (Landau and Lifshitz, 1959). 对于可压缩气体的无粘性流, 在间断面上满足激波关系式 (1.2.3) 并在连续流动区域满足方程组 (1.2.2) 的解可以是不唯一的, 如超音速气流绕楔形物体的流动, 在数学上存在三个解, 而实际在物理上存在的解只有一个. 在物理上存在的解必须满足在激波上熵增加的条件 (简称熵条件). 在 § 2.2 中我们可以看到, 满足熵条件的解则是唯一的. 这种解一般称作物理解. 熵条件对于我们以后计算可压缩气体的无粘性流是非常重要的. 它要求我们在数值求解这类问题时采用的数值格式必须保证它的数值解收敛于物理解, 否则我们的计算结果可能是毫无意义的.

下面我们还可看到对于具有水跃的浅水流动也须注意与此完全相同的问题。

§ 1.3 浅水波的近似方程组

为了推导简单起见,我们首先从二维不可压无粘性流的方程出发,导出浅水波方程,然后推广到三维情况。

二维不可压无粘性流的方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (1.3.1)$$

设河床底部为水平的,并取底部的坐标为 $z = 0$, 自由表面为 $z = h(x, t)$ 。 $h(x, t)$ 在此同时表示水深,如图 1.3.1。

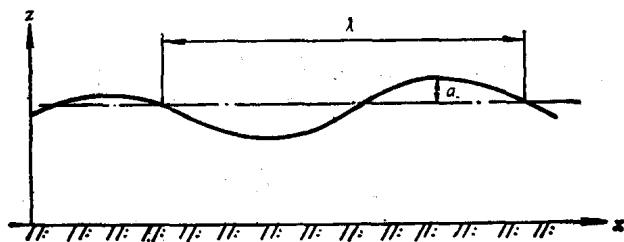


图 1.3.1 浅水波示意图

在自由面上 $z = h(x, t)$:

$$\begin{aligned} p|_{z=h} &= 0 \\ w|_{z=h} &= \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{z=h} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

以下我们寻求水面位置 $h(x, t)$ 和垂向平均的水平速度

$$\bar{u}(x, t) = \frac{1}{h(x, t)} \int_0^{h(x, t)} u(x, z, t) dz \quad (1.3.3)$$

将 (1.3.1) 中的第一个方程对 z 积分,得

$$w = - \int_0^z \frac{\partial u}{\partial x} dz, \quad w|_{z=0} = 0 \quad (1.3.4)$$

由 (1.3.4) 和 (1.3.2) 得

$$\frac{\partial}{\partial x} h \bar{u} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dz = \frac{\partial h}{\partial x} u|_{z=h} + \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial h}{\partial x} u|_{z=h} - w|_{z=h} = - \frac{\partial h}{\partial t}$$

即

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h \bar{u}) = 0 \quad (1.3.5)$$

积分 (1.3.1) 中的第二个方程,从 $z = 0$ 到 $z = h(x, t)$, 得

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}[h(\bar{u}^2 + \bar{p})] = 0 \quad (1.3.6)$$

其中

$$\overline{hu^2} = \int_0^h u^2 dz$$

$$h\bar{p} = \frac{1}{\rho} \int_0^h p dz$$

平均压力 $\bar{p}$ 可通过积分 (1.3.1) 中的第三个方程而得到:

$$\frac{p}{\rho}(x, z, t) = - \int_h^z \left(g + \frac{Dw}{Dt} \right) dz \quad (1.3.7)$$

其中

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{aligned} h\bar{p}(x, t) &= \int_0^h \frac{p}{\rho}(x, z, t) dz \\ &= \int_0^h \left[\int_z^h \left(g + \frac{Dw}{Dt} \right) dz' \right] dz = \frac{g\bar{h}^2}{2} + \int_0^h \left(z \frac{Dw}{Dt} \right) dz \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

故 (1.3.6) 可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h\bar{u}^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^h z \frac{Dw}{Dt} dz + h(\bar{u}^2 - \bar{u}^2) \right] = 0 \quad (1.3.9)$$

Ursell 数为

$$Ur = \left(\frac{a}{h} \right) / \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \quad (1.3.10)$$

其中 a 为水波的振幅, λ 为水波的波长 (见图 1.3.1)。根据 Ur 的不同, 有两种不同的浅水波方程和绝然相反的浅水波理论。

(1) Airy 浅水长波方程

对于浅水长波的运动, 当 $Ur \gg 1$ 时, 即 $\left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \ll 1$, $\left(\frac{a}{h} \right)$ 为任意值, 方程式 (1.3.9)

中左端最后一项可以忽略, 这时的浅水波方程可以写为

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}) = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.3.11)$$

(1.3.1) 称为 Sain-Venant 方程组。这是根据下列近似假设所推导出来的:

(i) 铅直方向上的加速度 $\frac{Dw}{Dt} = 0$, 压力等于静水压力 $p = \rho g(\zeta - z)$ 。

(ii) 水平速度在铅直方向上无变化。

对于三维的浅水波, 河床底部平坦但不一定是严格水平的, 则有近似方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (1.3.12)$$

其中 u, v 为垂向平均的水平速度; h 为水面至底部的深度; ζ 为水面位置, $\zeta = h + h_b(x, y)$; $h_b(x, y)$ 为底部高程。

上列方程组 (1.3.12) 在

$$\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \ll 1, \quad \frac{a}{h} \sim 0(1)$$

的条件下, 可由精确的自由面重力流方程 (1.1.7), (1.1.8) 和边界条件 (1.1.9), (1.1.10) 严格导出 (Madsen and Mei, 1969)。

方程组 (1.3.12) 在数学上与二维可压缩气体的无粘性流方程 (1.2.2) 完全类似。事实上, 令

$$\begin{cases} \rho = h \\ \dot{p} = \frac{1}{2} g h^2 = \frac{1}{2} g \rho^2 \\ \hat{F}_x = -g \frac{\partial h_b}{\partial x} \\ \hat{F}_y = -g \frac{\partial h_b}{\partial y} \end{cases}$$

对应于 $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 2$ 的多方气体, 其运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} + \rho \hat{F}_x \\ \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = - \frac{\partial \dot{p}}{\partial y} + \rho \hat{F}_y \end{cases} \quad (1.3.13)$$

这种比拟关系式对于我们是非常有用的。根据这种比拟关系式, 我们可以将气体力学中所得到的许多知识和数学方法 (包括数值方法) 直接用于浅水长波的运动。这里需要强调的是: 方程 (1.2.2) 在气体力学中是准确的; 而方程 (1.3.11) 和 (1.3.12) 只是对浅水长波运动的一种近似描写, 在这种运动中水平特征尺度比垂向尺度要大得多。气体力学理论预示了激波的存在, 而 Airy 理论所给出的方程 (1.3.11) 和 (1.3.12) 则预示了水跃的发生。但是利用方程 (1.3.11) 和 (1.3.12) 来研究水跃的形成却要特别小心, 因为在发生水跃时浅水长波理论的前提 $\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \ll 1$ 不再成立, 方程 (1.3.11) 和 (1.3.12) 照理不再适用。但是, 水跃毕竟是在实际中常见到的现象, 从这一方面来看, 方程 (1.3.11) 和 (1.3.12) 也不能说绝对不适用。然而, 另一方面, 根据方程 (1.3.11) 和 (1.3.12), 由于其非线性的性质, 光滑凸起的水面不能长时间保持, 最后要受到破坏。这一论断又是和我们在实验中经常观察到的简谐波以至于孤立波的存在是相矛盾的。Airy 理论和方程 (1.3.11) 及 (1.3.12) 有时能够给出正确的结果, 有时又给出错误的论断! 有关这一理论的详细阐述可参阅 Whitham (1974)。在发生水跃的情况下, 水跃前后也应满足类似于激波的条件。用 c 表示水跃移动速度, 水跃上的条件为

$$\begin{cases} (c - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}) h_1 = (c - \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}) h_2 \\ (c - \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}) h_1 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n} - (c - \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}) h_2 \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} g h_1^2 - \frac{1}{2} g h_2^2 \end{cases} \quad (1.3.14)$$