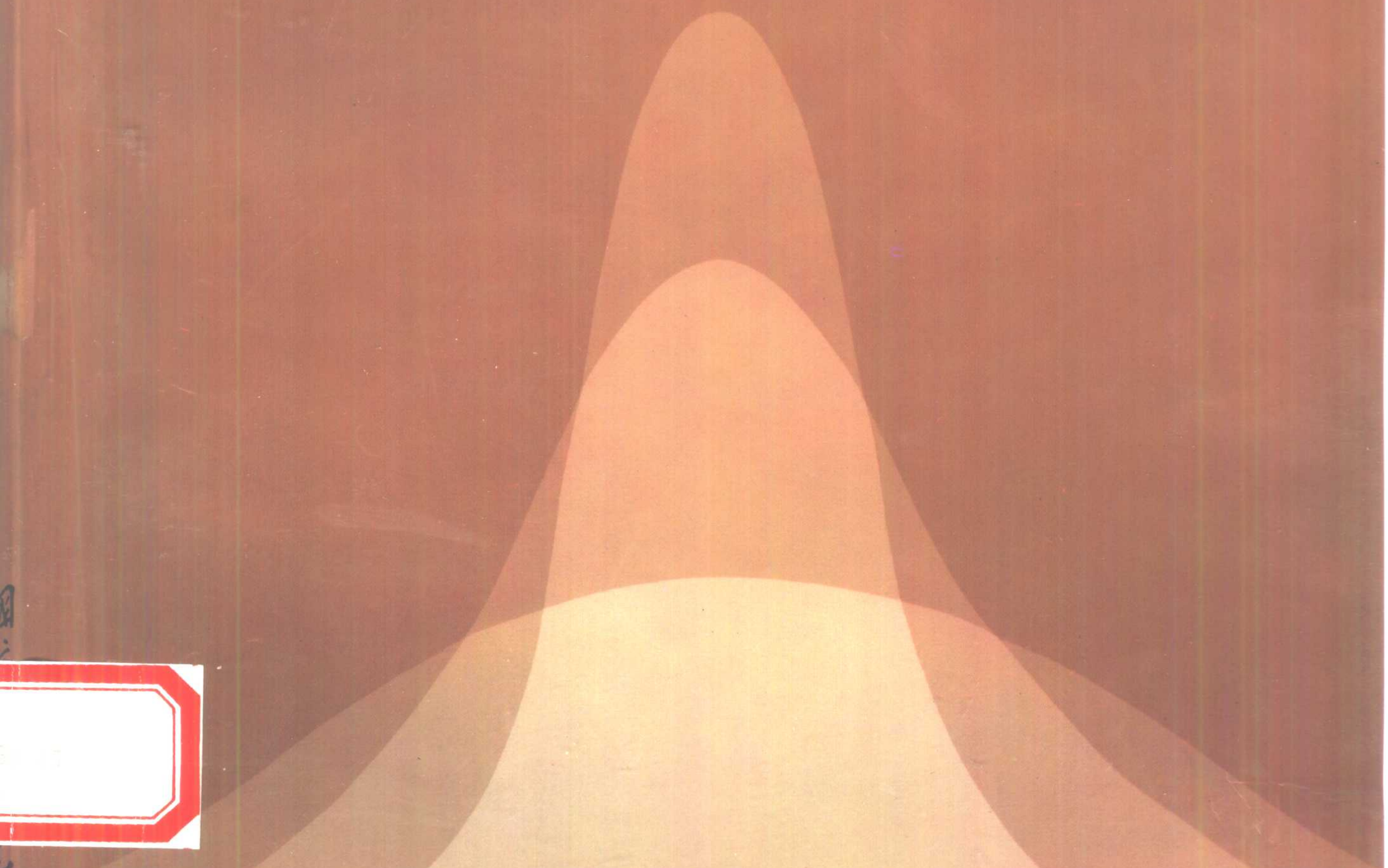
测量不确定度

CELIANG BUQUEDING DU

叶德培 编

国防工业出版社



G F G Y C B S

测量不确定度

测量不确定度

叶德培　编

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

测量不确定度/叶德培编著.-北京:国防工业出版社;1996.5

ISBN 7-118-01562-8

Ⅰ.测… Ⅱ.叶… Ⅲ.技术测量-精度,不确定度 Ⅳ.T6801

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第05738号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码100044)

北京怀柔新华印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 9¼ 205千字

1996年5月第1版 1996年5月北京第1次印刷

印数:1—6000册 定价:15.00元

序 言

工业生产、科学实验、发明和发现，都离不开测量手段的检验。参量和效应的检测的准确性是对产品质量和科技成果可信度的直接评价，间接地也影响到科技和经济的发展。对于测量结果的准确性，过去长期以来采用测量值相对于被测量值的误差来表示，但是由于被测量的真值是一个未知数，因此使过去的表示法产生了定量的困难。国际上早在60年代提出了用"不确定度"来定量表示测量结果可信程度的建议；也就是说，在当前认识条件和某个置信水平下定量给出被测量值在测量结果的某一范围之内，这一原则澄清了一系列模糊概念，被国际计量委员会（CIPM）和国际计量局（BIPM）所肯定，并向各国推荐，得到了一致同意。国际标准化组织（ISO）还为此起草了《测量不确定度表示导则》。这一概念上的革新将使测量技术对科技和工业生产起到更实际和积极的作用。叶德培研究员对测量理论和技术有深入的了解，编著了《测量不确定度》一书。该书表达简洁，明确地对新的测量不确定度的

表示法作了全面的阐述；并采用了国际推荐的表示方法。她还译出了《测量不确定度表示导则》ISO 1993(E)和美国国家标准和技术研究院(NIST)的《测量不确定度的评定和表示指南》，和前者合成一书，形成整体。该书对我国计量、测量界有重要的参考价值，可以起到新的测量结果表示法的指南作用；对于我国的开放和国际科技交流也会有所帮助。相信出版后将会得到科技界和产业界的广泛重视和应用。

陈芳允

1996年4月3日

内 容 简 介

工业生产、科学实验、发明和发现，都离不开测量手段的检验。参量和效应的检测的准确性是对产品质量和科技成果可信度的直接评价，间接地也影响到科技和经济的发展。对于测量结果的准确性，过去长期以来系用测量值相对于被测量值的误差来表示，但是由于被测量的真值是一个未知数，因此使过去的表示法产生了定量的困难。国际上早在60年代提出了用“不确定度”来定量表示测量结果可信程度的建议；也就是说，在当前认识条件和某个置信水平下定量给出被测量值在测量结果的某一范围内。这一原则澄清了一系列模糊概念，被国际计量委员会(CIPM)和国际计量局(BIPM)所肯定，并向各国推荐，得到了一致同意。

本书向读者介绍了正确表述测量不确定度的意义、国际《测量不确定度表示导则》的由来及适用范围，正确表示不确定度时需用到的概率与数理统计知识，不确定度的定义与基本概念，不确定度的评定方法与实用举例，以及报告测量不确定度时的要求。本书附录给出了由作者翻译的两个文件：ISO 出版的《测量不确定度表示导则》和美国 NIST 的《NIST 测量结果不确定度的评定和表示指南》。这两个文件作为首次正式出版物和我国广大学者见面。

ISO 测量不确定度适用于如下的领域：生产过程的质量控制和保证；法律、法规规程和规范；科技研究及工程领域；计量标准比对；为溯源或量传而进行的各种校准与检定；对系统或产品的性能测试、检验；标准物质的鉴定；标准参考数据；其他与测量有关的合同、协议、出版物等。

本书可作为全国各行业计量测试人员、科学研究工程技术人员、大学教师和学生的技术工具书和参考书。

目　录

第一章 引　言

一　正确表述测量不确定度的意义

测量是在科学技术、工农业生产、国内外贸易、工程项目以至日常生活的各个领域中不可缺少的一项工作，测量的目的是确定被测量的量值。测量的质量往往会直接影响到国家和企业的经济利益。如果我们出口货物，由于称重不准，多了就白送给外商，少了就要赔款，都会造成很大损失。测量的质量还往往成为科学实验成败的重要因素。如果对卫星的重量测量偏低，就可能会导致卫星发射因推力不足而失败。测量的质量也会影响到人身的健康和安全。在使用 γ 射线或激光治疗疾病时，若对剂量测量不准，剂量太小达不到治病的目的，延误治疗；剂量过大会造成对人体的伤害。测量结果和由测量结果得出的结论还可能成为决策的重要依据。因此，当报告测量结果时，必须对测量结果的质量给出定量的说明，以确定测量结果的可信程度。测量不确定度就是对测量结果的质量的定量评定。测量结果是否有用，在很大程度上取决于其不确定度的大小，所以测量结果必须有不确定度说明时，才是完整的和有意义的。

测量不确定度的定量表示是计量学领域中一个较新的概念，它的应用具有广泛性和普遍性。正如国际单位制计量单位已渗透到各种科学技术的测量领域并被全世界采用一样，所有的测量都要给出测量结果，无论哪个学科领域的测量都用到测量不确定度。尤其是在全球经济和市场激烈竞争的今天，测量不确定度表示方法的统一是国际贸易和技术交流所不可缺少的，它可使各国进行的测量和得到的结果进行相互比对，取得相互的承认或共识。因此统一测量不确定度的表示方法和推广应用国际公认的规则受到了国际组织的高度重视。

我国要取得国际经济和市场中的平等竞争地位，必须在各方面与国际接轨，包括我国出具的校准证书、鉴定报告、测试报告、学术报告、技术规范、产品标准、产品目录，甚至合同、协议等文件中有关测量结果和测量不确定度的表述，都应该采用与国际一致的表达方式，因此，应该重视和学习国际标准化组织发布的《测量不确定度表示导则》。

二　《测量不确定度表示导则》的由来和国际动向

早在 1963 年美国国家标准局(NBS)的 Eisenhart 在研究“仪器校准系统的精密度和准确度的估计”时提出了定量表示不确定度的建议。70 年代，NBS 在研究和推广测量保证方法(MAP)时在不确定度的定量表示方面有了进一步的发展。不确定度这个术语逐渐在测量领域内被广泛应用，但表示方法各不相同。1977 年 5 月国际电离辐射咨询委员会(CCEMRI)的 X—γ 射线和电子组讨论了关于校准证书如何表达不确定度的几种不同建议，但未作出决议。1977 年 7 月的 CCEMRI 会上提出了这个问题的迫切性。CCEMRI 主席、美国 NBS 局长 Ambler 同意将此问题列入送交国际计量局的报告，并且他作为国际计量委员会(CIPM)

的成员向CIPM发起了解决测量不确定度表示的国际统一问题的提案。1978年,CIPM要求国际计量局(BIPM)着手解决这个问题。BIPM就此问题制定了一份详细的调查表,分发到32个国家计量实验室及5个国际组织征求意见。到1979年底得到了21个国家实验室的复函。1980年,BIPM召集和成立了不确定度表述工作组,在征求各国意见的基础上起草了一份建议书:INC—1(1980)。该建议书向各国推荐了不确定度的表述原则。对测量不确定度的表示方法取得了国际的统一。1981年第七十届国际计量委员会批准了上述建议,并发布了一份CIPM建议书:CI—1981。1986年,CIPM再次重申采用上述测量不确定度表示的统一方法,并发布了CIPM建议书:CI—1986。CIPM建议书推荐的方法是以INC—1(1980)为基础的。CIPM要求所有参加CIPM及其咨询委员会赞助下的国际比对及其他工作的参加者在给出结果时必须使用合成不确定度。自80年代以来,CIPM建议的不确定度表示方法已经在世界各国许多实验室和计量机构中使用。但正如国际单位制计量单位不仅在计量部门使用一样,测量不确定度应该可以应用于一切使用测量结果的领域。为了进一步促进CIPM方法在国际上的广泛应用,1986年CIPM要求国际标准化组织ISO能在INC—1(1980)建议书的基础上起草一份能广泛应用的指南性文件。这项工作得到了7个国际组织的倡议和支持,该7个国际组织为:BIPM、IEC(国际电工委员会)、IFCC(国际分析化学联盟)、ISO(国际标准化组织)、IUPAC(国际纯化学和应用化学联盟)、IUPAP(国际纯物理和应用物理联盟)、OIML(国际法制计量组织)。自此,由国际标准化组织(ISO)的第四技术顾问组(TAG4)第三工作组(WG3)开始起草《测量不确定度表示导则》,该工作组的成员是由BIPM、IEC、ISO和OIML四个国际组织提名的。1993年《测量不确定度表示导则》[1]的第一版(见附录一)已经以7个国际组织的名义由ISO出版发行并在全世界推广应用。同时终止了ISO/TC69/SC6/WG3关于测量不确定度标准的起草工作。

因此,《测量不确定度表示导则》是在INC—1(1980)和CIPM的CI-1981和CI—1986的基础上编制的应用指南。在术语定义、概念、评定方法和报告时的表达方式上都作了更进一步的统一规定。《导则》代表了当前国际上在表示测量结果及其不确定度时的约定做法。使全世界不同国家、不同地区、不同学科、工程、商业、工业、法规等领域在表述测量结果和测量不确定度时具有一致的含义,便于理解、翻译和比对。因此,《导则》的应用必将对推动人类的科技进步和促进国际交流具有重要的意义。

美国NIST(国家标准和技术研究院,其前身为NBS)非常重视这项工作,Lyons院长认为:虽然目前NIST给出的测量结果都已带有定量的不确定度说明,但是在NIST,不确定度的表示方法也还没有统一。为了保证给出数据的一致性,他于1992年7月委任了一个NIST关于不确定度表述的特别委员会,该委员会认真地评价了用户对不确定度表述方面的需求,分析了这些需求与CIPM方法的一致性,在此基础上提出了NIST执行国际方法时的方针。此方针由院长批准已订入NIST的管理手册中,要求NIST的职工必须遵照执行。根据这个方针,保证了NIST在不确定度的表述方面取得内部一致并与现行国际做法一致,这将有助于使NIST的用户提高在国内和国际市场上的竞争能力。为了进一步帮助NIST的职工贯彻实施上述方针,他还专门指定二名特别委员会的成员起草了一份《NIST测量结果不确定度评定和表示指南》,于1993年1月公布了其第一版。该指南简明扼要,规定比较具体,具有较强的指导作用。在执行过程中又提出了一些问题,因此NIST及时进行了适当的修改和补充,于1994年9月又公布了其第二版(见附录二)[2]。

目前国际上许多国家许多标准实验室和计量机构也都制定了相应措施，例如西欧校准协作组织（WECC）、欧洲计量组织（EUROMET）等。1995年美国国家标准实验室大会上有不少公司企业介绍了采用不确定度评定和表示的经验。可以预计ISO《导则》的正式发布必将进一步起到推动和促进的作用。

三 适 用 范 围

ISO测量不确定度适用于广阔的测量领域。在以下各方面需要给出测量结果、编制技术文件、出具报告或证书时，应按国际《测量不确定度表示导则》[1]指出的方法正确表述。

(1)生产过程的质量控制和质量保证；

(2)法律、法规、规程、规范；

(3)科技研究及工程领域，包括基础研究、应用研究和开发工作；

(4)计量标准的比对；

(5)为溯源或量传而进行的各种校准与检定；

(6)对系统或产品的性能测试、检验；

(7)标准物质的鉴定；

(8)标准参考数据；

(9)其他，例如与测量有关的合同、协议、出版物、技术文献资料等。

第二章　概率统计的基础知识

在学习测量不确定度的概念和表示方法时，要涉及到许多概率统计方面的基础知识。为有助于读者对基础知识的了解，这里仅就有关的内容作些介绍[4]。

一　概率与概率分布

1. 概率

概率是某一随机事件在试验中出现可能性大小的一个度量。可以理解为事件发生的可能性、把握性。

由于测量的不完善或人们对被测量及其影响量的认识不足，由测量所得的被测量的值（即测量结果）是以一定的概率落在某个区间内的。我们用 $P(x_0<x<x_0+\Delta x)$ 表示测量值 X 落在由 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的区间的概率，可简写为概率 P。

2. 概率分布

测量结果的值和该值出现的概率之间的对应关系称为测量结果的概率分布。

概率分布通常可用概率密度曲线画出，如图 2－1 所示。横坐标为测量值，纵坐标为概率密度函数 $p(x)$。

概率密度函数 $p(x)$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时测量值落在 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 区间的概率与 Δx 之比的极限

$$p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x_0<x<x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

若已知某个量的概率密度函数，则测量值 X 落在区间 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 内的概率 P 可用下式进行计算

$$P(x_0<x<x_0+\Delta x)=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}p(x)\mathrm{d}x \quad (2-1)$$

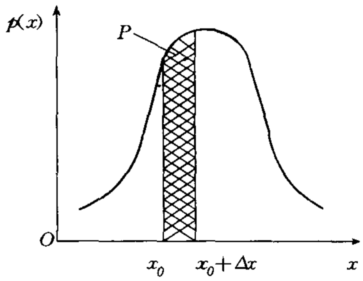


图 2－1　概率密度曲线

由此可见概率 P 是区间 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 在概率分布曲线下包含的面积。当 $P=1$，即概率为 1，表明测量值以 100% 的可能性落在该区间内，也就是测量值必定在此范围内。当 $P=0.9$，表明测量值有 90% 的可能性落在该区间内，该区间包含了概率分布总面积的 90%，所以 P 又称为包含概率或置信的水平（我们简称为置信水平）。区间 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 称为置信区间，置信区间的两个界限 x_0 和 $x_0+\Delta x$ 分别称为下限和上限。

二　期望、方差、标准偏差

数学期望与方差是概率分布的两个特征量。

1. 数学期望

数学期望是随机变量的统计平均值，简称期望。

(1)用 μ 表示期望

$$\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \tag{2-2}$$

测量值的期望是对被测量进行无穷多次测量所得的测量值 x_i 的算术平均值的极限。在数理统计中把期望称为总体均值或均值。

(2)常把 X 量的期望用 $E(X)$表示

$$E(X)=\mu=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP_i \tag{2-3}$$

测量值的期望是无穷多次测量的可能值 x_i 及其相应的概率 P_i 乘积之和,即按概率的加权平均值。

(3)当已知概率密度函数时,可用下式计算得到期望值

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x \tag{2-4}$$

期望是概率密度曲线与 x 坐标轴所构成之面积的重心所在的横坐标,所以期望是决定曲线位置的量。对于单峰、对称的概率分布来说,期望在分布曲线峰顶对应的横坐标。用无穷多次测量的平均值作为测量结果时,测量值的期望与真值之差即测量的系统误差。真值 X_T 是被测量的定义值。由此可见虽然真值、期望值和误差都是客观存在,但都是理想情况下的概念。因为不可能进行无穷多次测量,也不可能没有测量误差,因此不可能通过测量获得真值。

2.方差与标准偏差

(1)方差是无穷多次测量的测得值的误差平方的算术平均值,用 σ^2 表示

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}\right] \tag{2-5}$$

测量值与期望值之差为随机误差,用 δ_i 表示,$\delta_i=x_i-\mu$。方差就是测量值的误差平方的数学期望,有时用 $V(X)$表示,即

$$\sigma^2=V(X)=E[(X-\mu)^2]=E\{[X-E(X)]^2\}$$

在运用微机计算时,为计算方便把上式变为如下形式

$$\sigma^2=E(X^2)-[E(X)]^2$$

即方差为测量值平方的期望减去期望的平方。当已知概率密度函数为 $p(x)$时,方差可根据下式计算得到

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2p(x)\mathrm{d}x \tag{2-6}$$

当期望值 μ 为零时

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\mathrm{d}x$$

(2)标准偏差是方差的正平方根,简称标准差,用 σ 表示:

$$\sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}} \tag{2-7}$$

从图 2-2 看出 σ 小表明测量值比较集中,σ 大表明测量值比较分散。因为方差的量纲是

单位的平方，使用不便，所以常用标准偏差表征测量值的分散程度，例如用标准偏差表征测量仪器的重复性和复现性。由于标准偏差 σ 是无穷多次测量的误差的正均方根值，所以又称总体标准偏差。

3. 期望的最佳估计值——算术平均值

(1)大数定理：若干个独立同分布的随机变量的平均值以无限接近于 1 的概率接近其期望值 μ

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1 \quad (2-8)$$

由大数定理证明，测量值的算术平均值是其期望的最佳估计值。

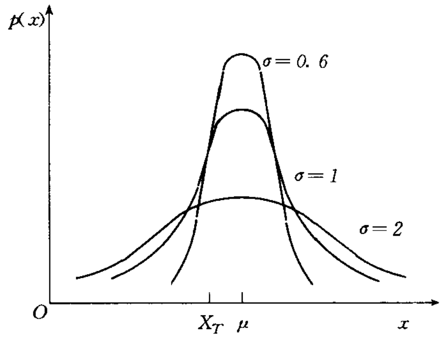


图 2-2　$x\sim\sigma$ 关系图

(2)算术平均值：在相同条件下对被测量 X 进行有限次独立重复测量得到的测量列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，算术平均值 $\overline{X}$ 为

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \quad (2-9)$$

算术平均值是有限次测量的均值，所以是由样本构成的统计量。即使在同一条件下对同一量进行多组测量，每组的平均值都不相同，说明算术平均值本身也是随机变量。

4. 有限次测量时标准偏差的估计值——实验标准偏差

实际工作中不可能测量无穷多次，因此无法得到总体标准偏差 σ。用有限次测量的数据估计得到的测量值的估计标准偏差称为实验标准偏差或称样本标准偏差，用 s 表示。

现介绍几种常用的实验标准偏差的估计方法。

在相同条件下，对被测量 X 进行有限次独立的重复测量，每次测得值为 x_i，测量次数为 n，则实验标准偏差可按以下几种方法进行估计：

(1)贝塞尔公式法

$$s=\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\right]^{1/2} \quad (2-10)$$

式中　$\overline{X}$——n 次测量的算术平均值；

$v_i=x_i-\overline{X}$——残差；

$\nu=n-1$——自由度；

s——标准偏差的估计值。

残差是测得值与算术平均值之差，测量值的误差是不可能得到的，而残差为实际测得的。由贝塞尔公式估计的标准偏差是被测量的残差平方和的统计平均值。自由度是指计算残差平方和时具有独立项的个数。因为 n 较大时残差和为零，因此 n 个残差中的任何一个残差可以从另外 $n-1$ 个残差中推算出来，独立的残差只有 $n-1$ 个，也就是自由度为 $n-1$。也可理解为：被测量只有一个时，为估计被测量，只需测量一次，但为了提高测量的可信程度而多测了 $n-1$ 次，多测的次数可以酌情规定，所以称自由度。由此可以推论，当待测量为 t 个，测量次数为 n 时，则自由度为 $n-t$；如果另有 r 个约束条件，则自由度为 $n-t-r$。贝塞尔公式是一种最基本的方法，一般适用于测量次数 n 不小于 5 的情况。

(2)最大残差法

$$s=c_n|v_{max}| \tag{2-11}$$

从有限次测量的测量列中找出最大残差 v_{max}，并根据测量次数 n 查表 2-1 得到 c_n，代入上式可以得到估计的标准偏差 s。

表 2-1　最大残差法的 c_n 值表

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
c_n	1.77	1.02	0.83	0.74	0.68	0.64	0.61	0.59	0.57	0.51	0.45

(3)极差法

$$s=(x_{max}-x_{min})/d_n \tag{2-12}$$

从有限次测量的测量列中找出最大值 x_{max} 和最小值 x_{min}，得到极差($x_{max}-x_{min}$)；根据测量次数 n 查表 2-2 得到 d_n，代入上式可以得到估计的标准偏差 s。

表 2-2　极差法的 d_n 值表

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
d_n	1.13	1.69	2.06	2.33	2.53	2.70	2.85	2.97	3.08	3.47	3.74

(4)较差法

$$s=\sqrt{\frac{[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\cdots\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2]}{2(n-1)}} \tag{2-13}$$

较差法和最大残差法使用起来比较简便，但当给定数据的分布与正态分布偏离较大时，应当以贝塞尔公式法的结果为准。较差法就是阿仑方差的估计方法，更适用于随机过程的方差分析。还有其他估计方法这里就不一一介绍了。

5. 算术平均值的标准偏差

若单次测量值的估计标准偏差为 $s(X)$，则算术平均值的估计标准偏差 $s(\overline{X})$ 为

$$s(\overline{X})=\frac{s(X)}{\sqrt{n}} \tag{2-14}$$

由此可见，有限次测量的算术平均值的标准偏差与 $\sqrt{n}$ 成反比。测量次数增加，算术平均值的分散性减小。这是因为多次测量取平均时，可使正负误差相互抵偿的结果。所以在对测量要求高时希望适当增加测量次数，但当 $n>20$ 时，随 n 的增加 $s(\overline{X})$ 减小的速度减慢，而测量次数的增加意味着测量时间和测量成本的增长，因此选取 n 时应综合考虑。在一般情况下取 n 为 4～20 次。

6. 实验标准偏差的标准偏差

标准偏差的估计值 s 本身还存在标准偏差，其估计值用 $\hat{\sigma}(s)$ 表示，即

$$\hat{\sigma}(s)=\frac{s}{\sqrt{2(n-1)}} \tag{2-15}$$

[例如]　当 $n=9$ 时，s 的相对标准偏差 $\hat{\sigma}(s)/s$ 估计约为 1/4。即 $\hat{\sigma}(s)$ 为 s 的 25%。一般标准偏差的估计值 s 取 1～2 位有效数字。所以当测量次数较多时对 $\hat{\sigma}(s)$ 可以忽略不计。

三　常用的几种概率分布

1. 正态分布

正态分布又称高斯分布。正态分布的概率密度函数 $p(x)$ 为

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]}\qquad(-\infty<x<+\infty,\sigma>0)\tag{2-16}$$

正态分布的概率计算：测量值 x 落在 (a,b) 区间内的概率为

$$\begin{aligned}P(a<x<b)&=\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b \mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x\\&=\Phi(u_2)-\Phi(u_1)\end{aligned}$$

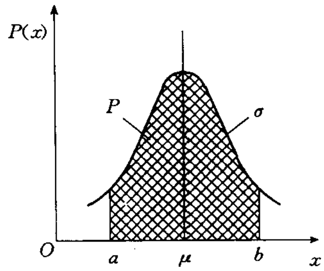


图 2-3　正态分布图

式中　$u=\delta/\sigma,\delta=x-\mu$；

$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u$——标准正态分布函数。

表 2-3　标准正态分布函数表（摘录）

z	1.0	2.0	2.58	3.0
$\Phi(z)$	0.84134	0.97725	0.99506	0.99865

例如　设 $|\delta|\leqslant 3\sigma$，测量值 X 落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 区间内的概率为

$$\begin{aligned}P(|x-\mu|\leqslant 3\sigma&=\Phi(3)-\Phi(-3)=2\Phi(3)-1\\&=2\times 0.99865-1=0.9973\end{aligned}$$

同样：$P(|\delta|\leqslant 2\sigma)=2\Phi(2)-1=2\times 0.97725-1=0.9545$

即区间 $(-2\sigma,2\sigma)$ 包含的面积占概率分布总面积的 95% 左右。所以，可以计算得到正态分布时测量值落在 $\mu\pm k\sigma$ 区间内的概率，如表 2-4 所列。包含概率与 k 值有关，k 被称为包含因子。

表 2-4　正态分布时概率与包含因子 k 的关系

包含概率 P(%)	包含因子 k	包含概率 P(%)	包含因子 k
50	0.675	95.45	2
68.27	1	99	2.576
90	1.645	99.73	3
95	1.96		

2. 均匀分布

均匀分布又称矩形分布，见图 2-4。均匀分布的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a_+-a_-} & a_-\leqslant x\leqslant a_+\\ 0 & x>a_+,x<a_-\end{cases}\tag{2-17}$$