现代数学手册

·计算机数学卷

Modern Mathematics Handbook

《现代数学手册》编纂委员会

· 华中科技大学出版社 ·

现代数学手册

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

计算机数学卷

《现代数学手册》编纂委员会

· 华中科技大学出版社 ·
（华中理工大学出版社）
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

现代数学手册·计算机数学卷/《现代数学手册》编纂委员会
武汉:华中科技大学出版社,2001年2月
ISBN 7-5609-2174-4

Ⅰ.现…
Ⅱ.现…
Ⅲ.①数学-手册 ②电子计算机-数学-手册
Ⅳ.O 1-62

现代数学手册·计算机数学卷 《现代数学手册》编纂委员会

责任编辑:龙纯曼 余健棠 封面设计:刘 卉
责任校对:张 欣 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社 武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012
经销:新华书店湖北发行所

录排:湖北省新华印刷厂
印刷:湖北省新华印刷厂

开本:880×1230 1/32 印张:34.5 插页:6 字数:1 340 000
版次:2001年2月第1版 印次:2001年2月第1次印刷 印数:1—8 000
ISBN 7-5609-2174-4/O·207 定价:100.00元

《现代数学手册》编纂委员会

前　言

在人类开始跨入21世纪的历史时期，人们已普遍地看到了一种历史现象，即数学问题的多样性与数学应用的广泛性及深入性，已经成为现代科技发展的重要特征。可以预期，伴随着计算机科技在新世纪里的不断发展，此特征今后还将以更高的水平显示出来。

在中国，"科学技术是第一生产力"(邓小平名言)已逐渐成为人们信奉的朴实真理。国家富强显然要以第一生产力即科技的发达为必要条件。但是，如果没有近、现代发展起来的数学各分支学科作工具，当然也就不会有现代科技。因此"国家富强必须要依靠数学发达"这句经典名言(拿破仑(Napoleon)名言)，自然也是一条不容置疑的客观真理。

基于上述认识，在华中理工大学出版社的倡议与委托下，我们通过集体协作，努力编纂了这部《现代数学手册》巨著，其目的正是怀着对我国将在新世纪里能尽快成为富强国家的热切希望，而欲为科技界提供一份力所能及的奉献。具体说来，这部工具性巨著服务的读者(或使用者)对象，包括广大科学工作者、工程技术人员、经济管理工作者、高等院校的教师和学生等。

那么，作为数学工具书，这部巨型手册要求具备哪些特点呢？在编写过程中，出版社负责人和我们达成了一项共识，即手册应具备科学性、先进性、实用性、规范性与简明性。200余位撰稿人与审稿人(来自中国科学院、北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、浙江大学、北京师范大学、厦门大学、上海交通大学、西安交通大学、中国科技大学、南开大学、武汉大学、华中理工大学、大连理工大学、南京航空航天大学、陕西师范大学等40多所高校与研究所)按照这些特点和要求付出了

艰辛的劳动。我们要感谢他们的通力合作与努力,使本手册基本上体现了上述所希冀的特点或特色。

为了读者选购和使用方便,本手册分5卷出版,分别名为“经典数学卷”、“近代数学卷”、“计算机数学卷”、“随机数学卷”和“经济数学卷”。需要指出的是,各个分支(篇目)的归属是相对的,这里考虑了各分卷篇幅大小的平衡问题。例如,“蒙特卡罗法”这一篇也可归入“计算机数学卷”。

我们要感谢诸分卷主编为精心组稿、编稿、审稿付出的精力和时间。特别要对中国科学院两位老院士钱伟长先生与吴文俊先生,以及杨叔子院士乐愿担任本手册的顾问而致以诚挚的谢忱。最后,还要对华中理工大学出版社具有远见卓识的负责人和埋头苦干的编辑人员与我们在本手册的生产全过程中的互相配合和精诚合作,深表谢忱。

《现代数学手册》编纂委员会

主编 徐利治

1999年12月于武汉

现代数学手册

篇目录

经典数学卷

近代数学卷

计算机数学卷

随机数学卷

经济数学卷

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

CONTENTS

CLASSICAL MATHEMATICS

MODERN MATHEMATICS

COMPUTER MATHEMATICS

STOCHASTIC MATHEMATICS

ECONOMIC MATHEMATICS

·计算机数学卷·

目　录

·计算机数学卷·

第1篇

数值分析

编　者　徐萃薇
审校者　高　立

目　录

引　言

数值分析是用数值计算的方法来研究数学分析中的一些问题.本篇内容包括:插值、拟合、数值微分、数值积分、常微分方程和偏微分方程的数值解法.其中除研究求解方程的数值方法外,也包括一些理论问题,如数值解的存在唯一性、格式的收敛性、稳定性以及误差分析等.

插值的使用可追溯到公元6世纪,当时中国科学家刘焯用等距二次插值法来计算天文学公式;到微积分创立的牛顿时代,对插值进行了进一步的研究.18世纪,欧拉用差商代替微商,开始了数值求解常微分方程初值问题的先例.1928年,柯朗等提出差分格式收敛的一个必要条件——CFL条件等等.但是,只是在20世纪后半叶电子计算机快速发展和普及以后,数值方法才得到了充分发展和广泛应用.

自然界中的各种现象,工程技术的不同领域,甚至人类社会活动的某些范畴(如政治、经济、文化和军事等),其规律性常常是用方程来表示的,求出方程的解,人们就可以定量以及定性地了解事物发展的规律和各种因素之间的制约关系.由于传统数学理论所提供方法的局限性,迫切要求有一种新的途径来求解这些问题,电子计算机的出现,使得今日用数值方法求解方程已成为主流.

1　误　差

1.1　误差的类型与来源

误差在近似计算中是不可缺少的,它主要产生于用数学和计算机来解决实际问题的过程中.误差有以下一些种类:

(1) 模型误差.用数学模型描述实在物理现象时要作简化,这种简化产生的误差叫**模型误差**.

(2) 观测误差.数学模型中通常会包含一些观测数据.这些观测数据不会绝对准确,这就会产生**观测误差**.如自由落体下落时,距离和时间的关系式

$$S(t) = \frac{1}{2} g t^2,$$

其中 g 是一个物理常数,通常取 $g \approx 9.81 \mathrm{m/s^2}$,它是由观测得到的近似值.

(3) 截断误差.由模型求得的准确解与用数值方法求得的解之间的误差称**截断误差**.如一个无穷级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0),$$

在实际计算时,只能取前面有限项(如 n 项)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0),$$

而
$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$$
就是截断误差.

(4) 舍入误差.因计算机字长有限,原始数据在计算机上表示会产生误差,这个误差称**舍入误差**.如 π、$\sqrt{2}$、1/3 等,在计算机上只能取有限位(如取小数后四位),则

$$\rho_1=3.1416-\pi=+0.0000074\cdots,$$
$$\rho_2=1.4142-\sqrt{2}=-0.000013\cdots,$$
$$\rho_3=0.3333-\frac{1}{3}=-0.000033\cdots$$

就是舍入误差.

1.2　误差的一些基本概念

(1) 浮点数.任何一个**浮点数**均可以表示为
$$\pm\beta^J w,\tag{1-1}$$
其中 β 叫做**基**,如十进制数,基 $\beta=10$,二进制数,基 $\beta=2$;J 称为**阶**,是一个整数,取正、负或零;w 称为**尾数**,由 t 位小数构成,可表示为
$$w=0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t,$$
其中 $1\leqslant\alpha_1\leqslant\beta-1, 0\leqslant\alpha_i\leqslant\beta-1(i=2,3,\cdots,t)$,尾数中 t 叫做浮点数的**精度**.

(2) 误差.设 x^* 是准确值 x 的一个近似值,则 x^* 和 x 之差称为**误差**,用 e 表示:
$$e=x^*-x.$$
误差可正可负,误差为正,x^* 称为强近似;误差为负,x^* 称为弱近似.

(3) 误差界.若事先估计出误差的绝对值不超过某个正数 ε,则 ε 称为 x^* 的**误差界**,即
$$|e|=|x^*-x|\leqslant\varepsilon.$$
用 $x=x^*\pm\varepsilon$ 表示 x^* 的精确度,即准确值 x 所在的范围,亦即
$$x^*-\varepsilon\leqslant x\leqslant x^*+\varepsilon.$$

(4) 有效数字.将 x^* 表示成
$$x^*=\pm0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\times10^p,\tag{1-2}$$
其中 $\alpha_1\neq0$,p 是一整数.若其误差界
$$|x^*-x|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{p-n},$$
则 x^* 具有 n 位**有效数字**.

(5) 相对误差.称

$$e_r = \frac{e}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

为 x^* 的**相对误差**.由于 x 一般是未知的,而且 x 与 x^* 相差不大,所以也用

$$e_r = \frac{e}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

表示 x^* 的相对误差.

(6) 相对误差界.相对误差绝对值的上界叫作**相对误差界**,用 ε_r 表示,即

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{|x^*|}.$$

形如(1-2)式的近似数 x^*,具有 n 位有效数字,则其相对误差界

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{|x^*|} \leqslant \frac{1}{2\alpha_1}10^{-(n-1)}. \tag{1-3}$$

但要注意的是,形如(1-2)式的近似数 x^*,当相对误差界满足关系式

$$\varepsilon_r \leqslant \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)}10^{-(n-1)} \tag{1-4}$$

时,x^* 至少具有 n 位有效数字.

1.3 误差分析

1.3.1 基本算术运算结果的误差界

设 x^* 和 y^* 分别表示 x 和 y 的近似值,并把它们的误差界看作是相应的微分,即

$$dx = |x^* - x|; \quad dy = |y^* - y|,$$

则

$$\begin{cases} d(x \pm y) = dx + dy, \\ d(xy) \approx |y|\,dx + |x|\,dy, \\ d\dfrac{x}{y} \approx \dfrac{|x|\,dy + |y|\,dx}{|y|^2} \quad (y \neq 0). \end{cases} \tag{1-5}$$

若把 $d_r x$ 与 $d_r y$ 看作是 x^* 和 y^* 的相对误差界,即

$$d_r x = \frac{dx}{x} = d\ln x; \quad d_r y = \frac{dy}{y} = d\ln y,$$

则

$$\begin{cases} d_r(x + y) \approx \max(d_r x, d_r y) \quad (x, y \text{ 同号}), \\ d_r(x - y) \approx (|x|\,d_r x + |y|\,d_r y)/|x - y| \quad (x, y \text{ 同号}), \\ d_r(x \cdot y) \approx d_r x + d_r y, \\ d_r \dfrac{x}{y} \approx d_r x + d_r y \quad (y \neq 0). \end{cases} \tag{1-6}$$

1.3.2 函数求值的误差估计

在计算函数值$f(x)$时,由于自变量x不精确,会使$f(x)$产生误差.若x的近似值为x^*,用$f(x^*)$表示$f(x)$的近似值,误差界$\mathrm{d}f(x)$可用泰勒(Taylor)公式估计.假设f在包含x和x^*的一个开区间上存在足够高阶导数,则有

$$\mathrm{d}f(x) = f(x^*) - f(x) = f'(x^*)(x^* - x) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x)^2,$$

其中$\xi \in (x, x^*)$.取绝对值得

$$|\mathrm{d}f(x)| = |f(x^*) - f(x)| \leqslant |f'(x^*)|\,\mathrm{d}x + \left|\frac{f''(\xi)}{2!}\right|(\mathrm{d}x)^2.$$

若$f''(x)$与$f'(x)$相比不太大,则可忽略高阶项得

$$\mathrm{d}f(x) \approx |f'(x^*)|\,\mathrm{d}x. \tag{1-7}$$

如果$|f'(x^*)|$是零或值很小,则要考虑后面的项,特别,若

$$f'(x^*) = f''(x^*) = \cdots = f^{(k-1)}(x^*) = 0,$$
$$f^{(k)}(x^*) \neq 0,$$

且$|f^{(k+1)}(\xi)|$不很大,$\xi \in (x, x^*)$,则

$$\mathrm{d}f(x^*) \approx \left|\frac{f^{(k)}(x^*)}{k!}\right|(\mathrm{d}x)^k. \tag{1-8}$$

对多元函数的误差界可用多元函数的泰勒公式得到

$$\mathrm{d}f(x_1, \cdots, x_n) \approx \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}x_i. \tag{1-9}$$

2 插　　值

表 2-1

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

若通过某种方法已知$y = f(x)$在区间$[a, b]$上的一组对应关系如表2-1所示,插值的目的是根据给定数据,寻找一个解析函数$\varphi(x)$近似地代替$f(x)$.

函数$\varphi(x)$的类型可以有不同选择,但最常用的是代数多项式,用多项式做插值函数称为**代数插值**.

2.1 代数插值的提法及存在唯一性

在$[a, b]$区间上给出了$n+1$个点上的函数值表2-1以后,需要构造一个多项式$\varphi(x)$满足条件:

1° $\varphi(x)$是不超过n次的多项式;

2° $\varphi(x_i) = f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$.

$\varphi(x)$称为**插值函数**,x_i称为**插值节点**,条件1°、2°称为**插值条件**,$[a, b]$称为**插值区**