

现代数学手册

• 计算机数学卷

Modern Mathematics Handbook

《现代数学手册》编纂委员会

• 华中科技大学出版社 •

现代数学手册

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

计算机数学卷

《现代数学手册》编纂委员会

• 华中科技大学出版社 •
(华中理工大学出版社)
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

现代数学手册·计算机数学卷/《现代数学手册》编纂委员会
武汉:华中科技大学出版社,2001年2月
ISBN 7-5609-2174-4

I. 现…

II. 现…

III. ①数学-手册 ②电子计算机-数学-手册

IV. O 1-62

现代数学手册·计算机数学卷

《现代数学手册》编纂委员会

责任编辑:龙纯曼 余健棠

责任校对:张欣

封面设计:刘卉

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社 武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012
经销:新华书店湖北发行所

录排:湖北省新华印刷厂

印刷:湖北省新华印刷厂

开本:880×1230 1/32

版次:2001年2月第1版

ISBN 7-5609-2174-4/O·207

印张:34.5 插页:6

印次:2001年2月第1次印刷

字数:1 340 000

印数:1—8 000

定价:100.00元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

《现代数学手册》编纂委员会

顾问	钱伟长	吴文俊	杨叔子	
主编	徐利治			
副主编	张尧庭	林化夷	卢开澄	
分卷主编	经典数学卷	廖晓昕		
	近代数学卷	胡适耕		
	计算机数学卷	卢开澄		
	随机数学卷	陈希孺	郑忠国	
	经济数学卷	王国俊	施光燕	
	(以下按姓氏笔画为序)			
编委	王兴华	王能超	毛经中	叶其孝
	史树中	李国伟	苏维宜	余家荣
	余健棠	陈文忠	周蕴时	胡毓达
执行编委	余健棠	林化夷	郭永康	姜新祺
责任编辑	龙纯曼	叶见欣	李立鹏	佟文珍
	余健棠	周芬娜	姜新祺	

前 言

在人类开始跨入 21 世纪的历史时期,人们已普遍地看到了一种历史现象,即数学问题的多样性与数学应用的广泛性及深入性,已经成为现代科技发展的重要特征。可以预期,伴随着计算机科技在新世纪里的不断发展,此特征今后还将以更高的水平显示出来。

在中国,“科学技术是第一生产力”(邓小平名言)已逐渐成为人们信奉的朴实真理。国家富强显然要以第一生产力即科技的发达为必要条件。但是,如果没有近、现代发展起来的数学各分支学科作工具,当然也就不会有现代科技。因此“国家富强必须要依靠数学发达”这句经典名言(拿破仑(Napoleon)名言),自然也是一条不容置疑的客观真理。

基于上述认识,在华中理工大学出版社的倡议与委托下,我们通过集体协作,努力编纂了这部《现代数学手册》巨著,其目的正是怀着对我国将在新世纪里能尽快成为富强国家的热切希望,而欲为科技界提供一份力所能及的奉献。具体说来,这部工具性巨著服务的读者(或使用者)对象,包括广大科学工作者、工程技术人员、经济管理工作者、高等院校的教师和学生等。

那么,作为数学工具书,这部巨型手册要求具备哪些特点呢?在编写过程中,出版社负责人和我们达成了一项共识,即手册应具备科学性、先进性、实用性、规范性与简明性。200 余位撰稿人与审稿人(来自中国科学院、北京大学、清华大学、复旦大学、南京大学、浙江大学、北京师范大学、厦门大学、上海交通大学、西安交通大学、中国科技大学、南开大学、武汉大学、华中理工大学、大连理工大学、南京航空航天大学、陕西师范大学等 40 多所高校与研究所)按照这些特点和要求付出了

艰辛的劳动。我们要感谢他们的通力合作与努力,使本手册基本上体现了上述所希冀的特点或特色。

为了读者选购和使用方便,本手册分5卷出版,分别名为“经典数学卷”、“近代数学卷”、“计算机数学卷”、“随机数学卷”和“经济数学卷”。需要指出的是,各个分支(篇目)的归属是相对的,这里考虑了各分卷篇幅大小的平衡问题。例如,“蒙特卡罗法”这一篇也可归入“计算机数学卷”。

我们要感谢诸分卷主编为精心组稿、编稿、审稿付出的精力和时间。特别要对中国科学院两位老院士钱伟长先生与吴文俊先生,以及杨叔子院士乐愿担任本手册的顾问而致以诚挚的谢忱。最后,还要对华中理工大学出版社具有远见卓识的负责人和埋头苦干的编辑人员与我们在本手册的生产全过程中的互相配合和精诚合作,深表谢忱。

《现代数学手册》编纂委员会

主编 徐利治

1999年12月于武汉

现代数学手册

篇目录

经典数学卷

- | | | | |
|--------|-----------|--------|-------|
| 第 1 篇 | 微积分 | 第 11 篇 | 差分方程 |
| 第 2 篇 | 无穷级数与广义积分 | 第 12 篇 | 积分方程 |
| 第 3 篇 | 高等代数 | 第 13 篇 | 偏微分方程 |
| 第 4 篇 | 矩阵论 | 第 14 篇 | 变分学 |
| 第 5 篇 | 微分几何 | 第 15 篇 | 计算数论 |
| 第 6 篇 | 复变函数论 | 第 16 篇 | 群论 |
| 第 7 篇 | 实变函数 | 附录 1 | 初等代数 |
| 第 8 篇 | 特殊函数 | 附录 2 | 平面三角 |
| 第 9 篇 | 积分变换与级数交换 | 附录 3 | 欧氏几何 |
| 第 10 篇 | 常微分方程 | 附录 4 | 解析几何 |

近代数学卷

- | | | | |
|--------|-------------|--------|------------|
| 第 1 篇 | 数理逻辑 | 第 12 篇 | 泛函微分方程 |
| 第 2 篇 | 组合数学 | 第 13 篇 | 偏微分方程的近代理论 |
| 第 3 篇 | 图论 | 第 14 篇 | 分支理论 |
| 第 4 篇 | 拓扑学 | 第 15 篇 | 变分不等式 |
| 第 5 篇 | 流形上的微积分 | 第 16 篇 | 动力系统 |
| 第 6 篇 | 李群与李代数 | 第 17 篇 | 渐近分析方法 |
| 第 7 篇 | 泛函分析 | 第 18 篇 | 函数逼近方法 |
| 第 8 篇 | 傅里叶分析 | 第 19 篇 | 样条函数 |
| 第 9 篇 | 广义函数 | 第 20 篇 | 分形几何 |
| 第 10 篇 | 常微分方程的稳定性理论 | 第 21 篇 | 生物数学 |
| 第 11 篇 | 常微分方程的几何理论 | | |

计算机数学卷

- | | | | |
|-------|-------------|-------|---------|
| 第 1 篇 | 数值分析 | 第 5 篇 | 多重网格法 |
| 第 2 篇 | 数值代数 | 第 6 篇 | 区域分解方法 |
| 第 3 篇 | 有限元法与边界元法 | 第 7 篇 | 小波分析 |
| 第 4 篇 | 计算流体力学中的差分法 | 第 8 篇 | Petri 网 |

- | | | | |
|--------|-------------|--------|----------------|
| 第 9 篇 | 网络最优化 | 第 17 篇 | 符号计算 |
| 第 10 篇 | 电路网络 | 第 18 篇 | 自动定理证明 |
| 第 11 篇 | 随机算法 | 第 19 篇 | 并行与分布计算中的模型与算法 |
| 第 12 篇 | 算法设计与复杂性分析 | 第 20 篇 | 计算几何 |
| 第 13 篇 | 组合最优化的近似算法 | 第 21 篇 | S 计算几何 |
| 第 14 篇 | 遗传算法 | 第 22 篇 | 代数编码 |
| 第 15 篇 | 模拟退火算法 | 第 23 篇 | 近代密码学 |
| 第 16 篇 | 数学机械化与机械化数学 | 第 24 篇 | 多值逻辑 |

随机数学卷

- | | | | |
|--------|--------|--------|----------|
| 第 1 篇 | 概率论 | 第 11 篇 | 现代统计计算方法 |
| 第 2 篇 | 数理统计 | 第 12 篇 | 随机过程 |
| 第 3 篇 | 试验设计 | 第 13 篇 | 时间序列分析 |
| 第 4 篇 | 抽样调查 | 第 14 篇 | 随机分析 |
| 第 5 篇 | 质量管理 | 第 15 篇 | 排队论 |
| 第 6 篇 | 线性模型 | 第 16 篇 | 库存论 |
| 第 7 篇 | 多元统计分析 | 第 17 篇 | 马尔可夫决策过程 |
| 第 8 篇 | 贝叶斯统计 | 第 18 篇 | 可靠性与生存分析 |
| 第 9 篇 | 稳健统计 | 第 19 篇 | 决策分析 |
| 第 10 篇 | 蒙特卡罗法 | | |

经济数学卷

- | | | | |
|--------|-------------|--------|----------|
| 第 1 篇 | 计量经济 | 第 11 篇 | 投入产出分析 |
| 第 2 篇 | 数理经济 | 第 12 篇 | 线性控制系统理论 |
| 第 3 篇 | 金融数学 | 第 13 篇 | 最优控制理论 |
| 第 4 篇 | 经济控制论 | 第 14 篇 | 卡尔曼滤波 |
| 第 5 篇 | 精算数学 | 第 15 篇 | 系统辨识 |
| 第 6 篇 | 单目标与多目标线性规划 | 第 16 篇 | 大系统理论 |
| 第 7 篇 | 非线性规划 | 第 17 篇 | 对策论 |
| 第 8 篇 | 不可微优化 | 第 18 篇 | 信息论 |
| 第 9 篇 | 整数规则 | 第 19 篇 | 人工神经网络 |
| 第 10 篇 | 动态规划 | 第 20 篇 | 模糊数学 |

MODERN MATHEMATICS HANDBOOK

CONTENTS

CLASSICAL MATHEMATICS

Part 1	Calculus	Part 11	Difference Equation
Part 2	Infinite Series and Generalized Integral	Part 12	Integral Equation
Part 3	Advanced Algebra	Part 13	Partial Differential Equation(PDE)
Part 4	Theory of Matrices	Part 14	Calculus of Variations
Part 5	Differential Geometry	Part 15	Computing Number Theory
Part 6	Function of Complex Variable	Part 16	Group Theory
Part 7	Function of Real Variable	Appendix 1	Elementary Algebra
Part 8	Special Function	Appendix 2	Plane Trigonometry
Part 9	Integral Transform and Series Transform	Appendix 3	Euclidean Geometry
Part 10	Ordinary Differential Equation(ODE)	Appendix 4	Analytic Geometry

MODERN MATHEMATICS

Part 1	Mathematical Logic	Part 12	Functional Differential Equation
Part 2	Combinatorial Mathematics	Part 13	Modern Theory of PDE
Part 3	Graph Theory	Part 14	Branch Theory
Part 4	Topology	Part 15	Variational Inequality
Part 5	Calculus on Manifold	Part 16	Dynamical System
Part 6	Lie Group and Lie Algebra	Part 17	Asymptotically Analytic Method
Part 7	Functional Analysis	Part 18	Approximation Method of Functions
Part 8	Fourier Analysis	Part 19	Spline Function
Part 9	Generalized Function	Part 20	Fractal Geometry
Part 10	Stability Theory of ODE	Part 21	Biomathematics
Part 11	Geometric Theory of ODE		

COMPUTER MATHEMATICS

Part 1	Numerical Analysis		Fluid Mechanics
Part 2	Numerical Algebra	Part 5	Multigrid Method
Part 3	Finite Element Method and Boundary Elementary Method	Part 6	Domain Decomposition Method
Part 4	Difference Method in Computational	Part 7	Wavelet Analysis
		Part 8	Petri Nets

Part 9	Network Optimization		Mechanized Mathematics
Part 10	Electrical Circuit Networks	Part 17	Symbolic Computation
Part 11	Randomized Algorithms	Part 18	Automated Theorem Proving
Part 12	Design of Algorithms and Complexity Analysis	Part 19	Models and Algorithms in Parallel and Distributed Computing
Part 13	Approximate Algorithms of Combinatorial Optimizations	Part 20	Computational Geometry
Part 14	Genetic Algorithms	Part 21	S Computational Geometry
Part 15	Simulated Annealing Algorithms	Part 22	Algebraic Coding Theory
Part 16	Mathematical Mechanizations and	Part 23	Modern Cryptography
		Part 24	Many-valued Logic

STOCHASTIC MATHEMATICS

Part 1	Probability	Part 11	Modern Statistical Computing Method
Part 2	Mathematical Statistics	Part 12	Stochastic Process
Part 3	Experimental Design	Part 13	Time Series Analysis
Part 4	Sampling Survey	Part 14	Stochastic Analysis
Part 5	Statistical Quality Control	Part 15	Queueing Theory
Part 6	Linear Model	Part 16	Theory of Inventory System
Part 7	Multivariate Statistical Analysis	Part 17	Markov Decision Process
Part 8	Bayes Statistics	Part 18	Reliability and Survival Analysis
Part 9	Robust Statistics	Part 19	Decision Analysis
Part 10	Monte Carlo Method		

ECONOMIC MATHEMATICS

Part 1	Econometrics	Part 11	Input-output Analysis
Part 2	Mathematical Economics	Part 12	Linear Control Systems Theory
Part 3	Financial Mathematics	Part 13	Optimal Control Theory
Part 4	Economic Control Theory	Part 14	Kalman Filtering
Part 5	Actuarial Mathematics	Part 15	System Identification
Part 6	Simple Objective Programming and Multiple Objective Programming	Part 16	Large-scale Systems Theory
Part 7	Non-linear Programming	Part 17	Game Theory
Part 8	Non-differentiable Optimization	Part 18	Information Theory
Part 9	Integer Programming	Part 19	Artificial Neural Networks
Part 10	Dynamic Programming	Part 20	Fuzzy Mathematics

·计算机数学卷·

目 录

第 1 篇	数值分析	(1)
第 2 篇	数值代数	(73)
第 3 篇	有限元法与边界元法	(117)
第 4 篇	计算流体力学中的差分法	(149)
第 5 篇	多重网格法	(263)
第 6 篇	区域分解方法	(295)
第 7 篇	小波分析	(345)
第 8 篇	Petri 网	(369)
第 9 篇	网络最优化	(405)
第 10 篇	电路网络	(469)
第 11 篇	随机算法	(527)
第 12 篇	算法设计与复杂性分析	(561)
第 13 篇	组合最优化的近似算法	(641)
第 14 篇	遗传算法	(677)
第 15 篇	模拟退火算法	(703)
第 16 篇	数学机械化与机械化数学	(727)
第 17 篇	符号计算	(779)
第 18 篇	自动定理证明	(801)
第 19 篇	并行与分布计算中的模型与算法	(819)
第 20 篇	计算几何	(873)
第 21 篇	S 计算几何	(947)
第 22 篇	代数编码	(991)
第 23 篇	近代密码学	(1023)
第 24 篇	多值逻辑	(1057)
索引		(1079)

· 计算机数学卷 ·

第 1 篇

数值分析

编 者 徐萃薇

审校者 高 立

目 录

引言	(3)	5.7 刚性方程组的数值解法	(43)
1 误差	(3)	6 常微分方程边值问题的数值解	(44)
1.1 误差的类型与来源	(3)	6.1 常微分方程边值问题	(44)
1.2 误差的一些基本概念	(4)	6.2 打靶法	(45)
1.3 误差分析	(5)	6.3 边值问题的差分法	(46)
2 插值	(6)	7 椭圆型偏微分方程的差分法	(48)
2.1 代数插值的提法及存在唯一性	(6)	7.1 椭圆型方程及定解条件	(48)
2.2 拉格朗日插值	(7)	7.2 网格剖分和差分近似	(48)
2.3 分段线性插值	(8)	7.3 差分方程组的可解性和收敛性	(52)
2.4 埃尔米特插值	(10)	8 抛物型方程的差分法	(53)
2.5 三次样条插值	(13)	8.1 抛物型方程及定解条件	(53)
3 曲线拟合	(15)	8.2 抛物型方程的差分近似	(54)
3.1 曲线拟合及最小二乘原理	(15)	8.3 几种常用差分格式	(56)
3.2 多变量的数据拟合	(18)	8.4 差分格式的稳定性	(57)
3.3 用正交多项式作最小二乘拟合	(19)	8.5 差分格式的收敛性	(59)
4 数值积分与数值微分	(20)	8.6 二维热传导方程混合型问题的差分近似	(61)
4.1 牛顿-科茨公式、梯形求积公式、抛物线求积公式	(20)	9 双曲型方程的差分法	(63)
4.2 复化求积公式	(23)	9.1 双曲型方程及其定解条件	(63)
4.3 逐次分半法	(24)	9.2 微分方程的差分近似	(64)
4.4 理查森外推法和龙贝格求积法	(25)	9.3 定义、定理和稳定性	(68)
4.5 高斯型求积公式	(27)	9.4 对流-扩散方程的差分格式及稳定条件	(70)
4.6 数值微分	(30)	参考文献	(71)
5 常微分方程初值问题的数值解法	(31)		
5.1 几个常用的定义	(31)		
5.2 几种简单的一步法	(33)		
5.3 龙格-库塔方法	(35)		
5.4 线性多步法	(37)		
5.5 预估-校正方法	(40)		
5.6 常微分方程组和高阶方程初值问题的数值解	(41)		

引 言

数值分析是用数值计算的方法来研究数学分析中的一些问题.本篇内容包括:插值、拟合、数值微分、数值积分、常微分方程和偏微分方程的数值解法.其中除研究求解方程的数值方法外,也包括一些理论问题,如数值解的存在唯一性、格式的收敛性、稳定性以及误差分析等.

插值的使用可追溯到公元 6 世纪,当时中国科学家刘焯用等距二次插值法来计算天文学公式;到微积分创立的牛顿时代,对插值进行了进一步的研究.18 世纪,欧拉用差商代替微商,开始了数值求解常微分方程初值问题的先例.1928 年,柯朗等提出差分格式收敛的一个必要条件——CFL 条件等等.但是,只是在 20 世纪后半叶电子计算机快速发展和普及以后,数值方法才得到了充分发展和广泛应用.

自然界中的各种现象,工程技术的不同领域,甚至人类社会活动的某些范畴(如政治、经济、文化和军事等),其规律性常常是用方程来表示的,求出方程的解,人们就可以定量以及定性地了解事物发展的规律和各种因素之间的制约关系.由于传统数学理论所提供方法的局限性,迫切要求有一种新的途径来求解这些问题,电子计算机的出现,使得今日用数值方法求解方程已成为主流.

1 误 差

1.1 误差的类型与来源

误差在近似计算中是不可缺少的,它主要产生于用数学和计算机来解决实际问题的过程中.误差有以下一些种类:

(1) 模型误差.用数学模型描述实在物理现象时要作简化,这种简化产生的误差叫模型误差.

(2) 观测误差.数学模型中通常会包含一些观测数据.这些观测数据不会绝对准确,这就会产生观测误差.如自由落体下落时,距离和时间的关系式

$$S(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是一个物理常数,通常取 $g \approx 9.81\text{m/s}^2$,它是由观测得到的近似值.

(3) 截断误差.由模型求得的准确解与用数值方法求得的解之间的误差称截断误差.如一个无穷级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0),$$

在实际计算时,只能取前面有限项(如 n 项)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0),$$

$$\text{而} \quad \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

就是截断误差.

(4) 舍入误差. 因计算机字长有限, 原始数据在计算机上表示会产生误差, 这个误差称舍入误差. 如 π 、 $\sqrt{2}$ 、 $1/3$ 等, 在计算机上只能取有限位 (如取小数后四位), 则

$$\rho_1 = 3.1416 - \pi = +0.0000074\cdots,$$

$$\rho_2 = 1.4142 - \sqrt{2} = -0.000013\cdots,$$

$$\rho_3 = 0.3333 - \frac{1}{3} = -0.000033\cdots$$

就是舍入误差.

1.2 误差的一些基本概念

(1) 浮点数. 任何一个浮点数均可以表示为

$$\pm \beta^j w, \quad (1-1)$$

其中 β 叫做基, 如十进制数, 基 $\beta = 10$, 二进制数, 基 $\beta = 2$; j 称为阶, 是一个整数, 取正、负或零; w 称为尾数, 由 t 位小数构成, 可表示为

$$w = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t,$$

其中 $1 \leq \alpha_1 \leq \beta - 1, 0 \leq \alpha_i \leq \beta - 1 (i = 2, 3, \cdots, t)$, 尾数中 t 叫做浮点数的精度.

(2) 误差. 设 x^* 是准确值 x 的一个近似值, 则 x^* 和 x 之差称为误差, 用 e 表示:

$$e = x^* - x.$$

误差可正可负, 误差为正, x^* 称为强近似; 误差为负, x^* 称为弱近似.

(3) 误差界. 若事先估计出误差的绝对值不超过某个正数 ε , 则 ε 称为 x^* 的误差界, 即

$$|e| = |x^* - x| \leq \varepsilon.$$

用 $x = x^* \pm \varepsilon$ 表示 x^* 的精确度, 即准确值 x 所在的范围, 亦即

$$x^* - \varepsilon \leq x \leq x^* + \varepsilon.$$

(4) 有效数字. 将 x^* 表示成

$$x^* = \pm 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \times 10^p, \quad (1-2)$$

其中 $\alpha_1 \neq 0, p$ 是一整数. 若其误差界

$$|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{p-n},$$

则 x^* 具有 n 位有效数字.

(5) 相对误差. 称

$$e_r = \frac{e}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

为 x^* 的相对误差. 由于 x 一般是未知的, 而且 x 与 x^* 相差不大, 所以也用

$$e_r = \frac{e}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$$

表示 x^* 的相对误差.

(6) 相对误差界. 相对误差绝对值的上界叫作相对误差界, 用 ϵ_r 表示, 即

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{|x^*|}.$$

形如(1-2)式的近似数 x^* , 具有 n 位有效数字, 则其相对误差界

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{|x^*|} \leq \frac{1}{2\alpha_1} 10^{-(n-1)}. \quad (1-3)$$

但要注意的, 形如(1-2)式的近似数 x^* , 当相对误差界满足关系式

$$\epsilon_r \leq \frac{1}{2(\alpha_1 + 1)} 10^{-(n-1)} \quad (1-4)$$

时, x^* 至少具有 n 位有效数字.

1.3 误差分析

1.3.1 基本算术运算结果的误差界

设 x^* 和 y^* 分别表示 x 和 y 的近似值, 并把它们的误差界看作是相应的微分,

即

$$dx = |x^* - x|; \quad dy = |y^* - y|,$$

则

$$\begin{cases} d(x \pm y) = dx + dy, \\ d(xy) \approx |y| dx + |x| dy, \\ d\frac{x}{y} \approx \frac{|x| dy + |y| dx}{|y|^2} \quad (y \neq 0). \end{cases} \quad (1-5)$$

若把 $d_x x$ 与 $d_y y$ 看作是 x^* 和 y^* 的相对误差界, 即

$$d_x x = \frac{dx}{x} = d \ln x; \quad d_y y = \frac{dy}{y} = d \ln y,$$

则

$$\begin{cases} d_x(x + y) \approx \max(d_x x, d_y y) & (x, y \text{ 同号}), \\ d_x(x - y) \approx (|x| d_x x + |y| d_y y) / |x - y| & (x, y \text{ 同号}), \\ d_x(x \cdot y) \approx d_x x + d_y y, \\ d_x \frac{x}{y} \approx d_x x + d_y y & (y \neq 0). \end{cases} \quad (1-6)$$

1.3.2 函数求值的误差估计

在计算函数值 $f(x)$ 时, 由于自变量 x 不精确, 会使 $f(x)$ 产生误差. 若 x 的近似值为 x^* , 用 $f(x^*)$ 表示 $f(x)$ 的近似值, 误差界 $df(x)$ 可用泰勒(Taylor)公式估计. 假设 f 在包含 x 和 x^* 的一个开区间上存在足够高阶导数, 则有

$$df(x) = f(x^*) - f(x) = f'(x^*)(x^* - x) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x)^2,$$

其中 $\xi \in (x, x^*)$. 取绝对值得

$$|df(x)| = |f(x^*) - f(x)| \leq |f'(x^*)| dx + \left| \frac{f''(\xi)}{2!} \right| (dx)^2.$$

若 $f''(x)$ 与 $f'(x)$ 相比不太大, 则可忽略高阶项得

$$df(x) \approx |f'(x^*)| dx. \quad (1-7)$$

如果 $|f'(x^*)|$ 是零或值很小, 则要考虑后面的项, 特别, 若

$$f'(x^*) = f''(x^*) = \cdots = f^{(k-1)}(x^*) = 0,$$

$$f^{(k)}(x^*) \neq 0,$$

且 $|f^{(k+1)}(\xi)|$ 不很大, $\xi \in (x, x^*)$, 则

$$df(x^*) \approx \left| \frac{f^{(k)}(x^*)}{k!} \right| (dx)^k. \quad (1-8)$$

对多元函数的误差界可用多元函数的泰勒公式得到

$$df(x_1, \cdots, x_n) \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_i} \right| dx_i. \quad (1-9)$$

2 插 值

表 2-1

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

若通过某种方法已知 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一组对应关系如表 2-1 所示, 插值的目的是根据给定数据, 寻找一个解析函数 $\varphi(x)$ 近似地代替 $f(x)$.

函数 $\varphi(x)$ 的类型可以有不同选择, 但最常用的是代数多项式, 用多项式做插值函数称为代数插值.

2.1 代数插值的提法及存在唯一性

在 $[a, b]$ 区间上给出了 $n+1$ 个点上的函数值表 2-1 以后, 需要构造一个多项式 $\varphi(x)$ 满足条件:

1° $\varphi(x)$ 是不超过 n 次的多项式;

2° $\varphi(x_i) = f(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \cdots, n)$.

$\varphi(x)$ 称为插值函数, x_i 称为插值节点, 条件 1°、2° 称为插值条件, $[a, b]$ 称为插值区