

高等工科学学校适用教材

机电控制工程

东南大学 王积伟 主编

机械工业出版社



TB114.2

22

高等工科学学校适用教材

机电控制工程

王积伟 主编
万德钧 主审



机械工业出版社

本书以经典控制理论为基础,结合机电控制系统实践,阐述控制工程的基本理论、基本方法和基本内容。对现代控制理论也作简要介绍。主要内容包括控制工程基本概念、数学模型、时域、频域和根轨迹分析、控制系统的设计与校正、线性离散系统、现代控制理论简介和控制系统的计算机辅助分析等共九章。

书中附有例题和习题,书后附有习题参考答案和用Pascal语言编写的控制系统计算机辅助分析通用程序。

本书是高等工科学校机械类、仪表、电气等非自控专业本科生教材,也可作为大专生教材或教学参考书,并可供科技人员学习机电控制工程时参考。

机电控制工程

东南大学 王积伟 主编

*

责任编辑:林松 版式设计:冉晓华

封面设计:郭景云 责任校对:姚培新

责任印制:王同光

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

邮政编码:100037

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092¹/₁₆·印张 19³/₄·字数 487千字

1995年10月第1版·第1次印刷

印数 0 001—3 500 定价:19.50元

*

ISBN 7-111-04678-1/TM·583(课)

序

由于现代科学技术的迅猛发展，特别是由于微电子技术、电子计算机技术的迅猛发展，机械工业已发生了而且还在继续发生极为深刻的变化。这一深刻的变化反映在机械工程、机械工业的面貌与内容。过去，理论上主要以力学作为基础，实践上主要以经验作为基础。现在，作为基础的理论远不限于力学，还有系统论、控制论、信息论、传感理论、信号处理理论等等。作为实践的基础也远不限于经验，而且还涉及各有关的学科，同时就其本身也形成自己的学科体系——制造理论、工艺理论。

现在的机械产品在不同程度上都同微电子技术、微型计算机技术相结合，取代、延伸、加强与扩大人脑的部分作用，形成新一代的机电一体化产品。与此相适应，机械制造技术正在彻底改造，从数控化走向柔性化、集成化、智能化，这种先进制造技术已成为机械工程的热点。

机械制造技术发生深刻变化中，最引人注目之一的是控制理论的引入，计算机已经开始取代人参与对加工过程的控制，使整个加工过程实现预期的最优指标。这样一来，就涉及每个环节与整个系统的动态性能问题。于是，将控制理论与计算机技术相结合来研究每一个环节与整个系统就必不可少了。对每一台设备如此，对一条生产线如此，对整个生产过程、整个企业乃至整个部门更应如此。

总之，控制理论、微电子技术、计算机技术同机械制造理论与技术的结合，将促使机械制造领域中的试验、研究、设计、制造、维修、组织、管理等各个方面发生巨大的乃至根本性的变化，目前这种变化还只是开始而已。

在高等院校的机械工程类专业开设“控制工程基础”（或称“机械工程控制基础”、“机电控制工程”）课程是适应科学技术发展的急需，也是进一步的继续试探。

王积伟教授长期从事本门课程的教学工作，根据多年的教学和科研实践，在他原主编的《控制工程基础》的基础上，进行修改和补充，出版了本书。借出版之际，谨向王积伟教授致以衷心的祝贺。

中国科学院院士 杨叔子

1994年10月

前 言

随着现代技术的迅速发展,控制工程科学在机电系统中的应用越来越广泛。为了适应机电一体化的发展,本书是在王积伟、潘亚东主编的《控制工程基础》的基础上,参考了其它兄弟院校的同类教材,结合多年来的教学实践和科研成果,作了许多修改和补充,重新编著而成的。

本书以经典控制理论为主线,结合机电控制系统的实际,阐述控制工程的基本理论、基本方法和基本内容。在编写过程中,以少而精原则安排章节,对基本章节的内容则要求完整、系统、严谨。书中所举实例和习题包含了机电控制工程中常见的机、电、液等不同类型。为了满足计算机日益普及的需要,编入了控制系统计算机辅助分析的内容,并在书末附有目前各高校常用的Pascal语言编写的通用程序,这些程序兼有作图功能,使用非常方便。此外,本书阐述思路清晰,文字通俗易懂。为便于自学,书中备有例题和习题,书后附有参考答案。

全书共分九章,第一章阐述控制工程基本概念;第二章介绍数学模型;第三章至第五章分别介绍系统的时域、频域和根轨迹分析;第六章介绍控制系统的设计与校正;第七章是线性离散系统;第八章对现代控制理论作简要介绍;第九章为控制系统计算机辅助分析。本书的教学时数为40~60学时,各校可根据不同专业的要求和教学时数选取有关章节进行讲授。

本书由王积伟主编。参加编写的有东南大学王积伟(第一至第四章和第七、八章以及附录A和第五章部分习题)、南昌航空工业大学杨开锦(第五、六章)、东南大学贾民平(第九章及附录B)。最后由王积伟对全书进行统稿。

本书由博士生导师万德钧教授主审,对本书提出了许多宝贵意见和建议并给予极大帮助,华中理工大学杨克冲教授对本书的出版给予很大支持,对此编者一并表示衷心感谢。

由于时间和水平限制,书中难免有不少失误和欠妥之处,恳请广大读者批评指正。

编者

1994年6月

目 录

序

前言

第一章 绪论 1

第一节 控制工程发展概况 1

第二节 控制系统的工作原因及其组成 2

第三节 控制系统的基本类型 5

第四节 对控制系统的基本要求 7

习题 7

第二章 数学模型 9

第一节 控制系统的运动微分方程 9

第二节 非线性数学模型的线性化 14

第三节 拉氏变换与反变换 17

第四节 传递函数 30

第五节 方框图和信号流图 40

第六节 机电控制系统传递函数推导举例 53

习题 60

第三章 时域分析 66

第一节 典型输入信号 66

第二节 一阶系统的时间响应 67

第三节 二阶系统的时间响应 70

第四节 高阶系统的时间响应 81

第五节 误差分析与计算 84

第六节 稳定性分析 94

习题 103

第四章 根轨迹分析 106

第一节 根轨迹的基本概念 106

第二节 根轨迹的基本特性及绘制方法 109

第三节 控制系统的根轨迹分析 116

习题 119

第五章 频域分析 121

第一节 频率特性的基本概念 121

第二节 典型环节的频率特性图 125

第三节 开环频率特性图 134

第四节 频域稳定判据及稳定裕量 144

第五节 闭环频率特性 158

第六节 频域特征量与时域性能指标 160

第七节 用开环频率特性分析系统的性能 163

习题 166

第六章 控制系统的设计与校正 170

第一节 概述 170

第二节 PID控制规律 171

第三节 PID控制规律的实现 176

第四节 频率法设计与校正 183

第五节 并联校正与复合校正 193

习题 197

第七章 线性离散系统 199

第一节 概述 199

第二节 采样过程与采样定理 200

第三节 Z变换与Z反变换 205

第四节 脉冲传递函数 212

第五节 离散系统稳定性分析 220

第六节 离散系统的校正与设计 223

习题 228

第八章 现代控制理论简介 230

第一节 概述 230

第二节 状态空间分析法 231

第三节 最优控制 239

第四节 系统辨识 248

第九章 控制系统的计算机

辅助分析 256

第一节 求传递函数 256

第二节 求时域特性 259

第三节 求频域特性 267

第四节 求稳定性 272

第五节 求根轨迹 274

附录

附录A 常用函数的拉氏变换表 279

附录B 控制系统计算机辅助分析程序 281

习题参考答案 307

参考文献 312

第一章 绪 论

第一节 控制工程发展概况

控制工程是一门新型的技术科学，也是一门边缘科学。它的理论基础是工程控制论。

早在一千多年以前，我国就先后发明了铜壶滴漏计时器、指南针以及天文仪器等多种自动控制装置，这些发明促进了当时社会经济的发展。即使从1788年瓦特 (J. Watt)发明蒸汽机飞球调速器算起，控制工程也已有二百多年的历史。然而，控制工程作为一门学科，它的形成并迅速发展却是最近五六十年事。

二次世界大战前，控制系统的设计因缺乏系统的理论指导而多采用试凑法。二次大战期间，由于建造飞机自动驾驶仪、雷达跟踪系统、火炮瞄准系统等军事装备的需要，推动了控制理论的飞跃发展。1948年维纳(N. Wiener)发表了著名的《控制论》，从而基本上形成了经典控制理论，使控制工程有了扎实的理论支撑。经典控制理论以传递函数为基础，主要研究单输入-单输出系统的分析和控制问题。

除了维纳之外，在经典控制理论的形成和发展过程中作出重大贡献的还有：1868年，麦克斯威尔 (J. C. Maxwell) 发表了“调速器”一文，首先提出了“反馈控制”的概念；1884年，劳斯 (E. J. Routh) 和1895年，霍尔维茨 (A. Hurwitz) 先后独立地提出了判别系统稳定性的代数判据；1932年，奈奎斯特 (H. Nyquist) 提出了著名的奈奎斯特稳定性判据；此后，波德 (H. W. Bode) 总结出了负反馈放大器；1948年，伊万斯 (W. R. Evans) 提出了根轨迹法，进一步充实了经典控制理论。

二次世界大战后，控制理论扩展到民用，在化工、炼油、冶金等工业部门得到了进一步的应用，控制理论也日渐成熟。1954年，我国科学家钱学森发表了《工程控制论》这一名著，为控制工程这门技术科学奠定了理论基础。

50年代末和60年代，控制工程又出现了一个迅猛发展时期，这时由于导弹制导、数控、空间技术的发展需要和电子计算机技术的成熟，控制理论发展到了一个新的阶段，产生了现代控制理论。它是以状态空间法为基础，主要分析和研究多输入-多输出、时变、非线性等系统的最优控制问题。特别是近十年来，在计算机技术和现代应用数学高速发展的推动下，现代控制理论在最优滤波、系统辨识、自适应控制、智能控制等方面又有重大进展。

对现代控制理论作出突出贡献的有：1892年，沙俄的李雅普诺夫 (A. M. Ляпунов) 提出的判定系统稳定性的方法被广泛应用于现代控制理论；1956年，前苏联的邦特略京 (Л. С. Понтрягин) 提出了极大值原理；1957年，美国的贝尔曼 (R. I. Bellman) 提出了动态规划理论；1960年，美国的卡曼 (R. E. Kalman) 提出了卡曼滤波理论。

纵观控制工程发展历程，它是与控制理论、计算机技术、现代应用数学的发展息息相关的。控制工程与各个工程学科相结合便衍生出不同的分支。机电控制工程着重研究有关机电控制系统的分析和控制问题。它是在机电一体化产品和系统大量涌现的形势下，应运而生

的。

由于课程学时限制，本书主要讨论涉及经典控制理论方面的内容，对于现代控制理论方面的内容只作简要介绍。

第二节 控制系统的工作原理及其组成

一、工作原理

首先以恒温控制系统为例，分析其控制过程。实现恒温控制有人工控制和自动控制两种办法。图1-1为人工控制的恒温箱简图。人工控制的目的是克服外界干扰（如电源电压波动、环境温度变化等等），保持箱内温度恒定，以满足物体对温度的要求。操作者可以通过调压器改变电阻丝的电流，以达到控制温度的目的。箱内温度是由温度计测量的。人工调节过程可归结如下：

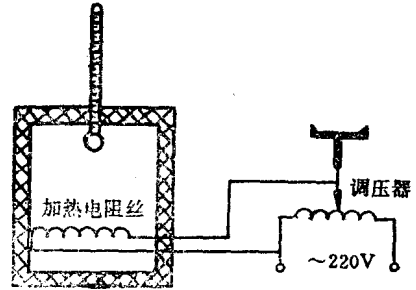


图1-1 人工控制的恒温箱

1) 观测由测量元件（温度计）测出的恒温箱的温度（被控制量）。

2) 与要求的温度值（给定值）进行比较，得出偏差的大小和方向。

3) 根据偏差的大小和方向再进行控制。当恒温箱温度高于所要求的给定温度值时，就移动调压器使电流减小，温度降低。若温度低于给定的值，则移动调压器，使电流增加，温度升到正常范围。

因此，人工控制的过程就是测量、求偏差、再控制以纠正偏差的过程。简单地说就是“检测偏差再纠正偏差”的过程。

这种人工控制要求操作者随时观察箱内温度的变化情况，随时进行调节。对于这样简单的控制形式，当然可以用一个控制器来代替人的职能，把人工控制变成一个自动控制系统。

图1-2就是一个自动控制系统。其中，恒温箱的温度是由给定信号电压 u_1 控制的。当外界因素引起箱内温度变化时，作为测量元件的热电偶，把温度转换成对应的电压信号 u_2 ，并反馈回去与给定信号 u_1 相比较，所得结果即为温度的偏差信号 $\Delta u = u_1 - u_2$ 。经过电压、功率放大后，用以改变电机的转速和方向，并通过传动装置拖动调压器动触头。当温度偏高时，动触头向着减小电流的方向运动，反之加大电流，直到温度达到给定值为止。即只有在偏差信号 $\Delta u = 0$ 时，电机才停转。这样就完成了所要求的控制任务。而所有这些装置便组成了一个自动控制系统。

分析上述恒温箱的两种工作过程，可以看出，自动控制系统和人工控制系统非常相似。这里，测量装置相当于人的眼睛，控制器类似于人脑，执行机构好比于人手。它们的共同特点都是要检测偏差，并用检测到的偏差去纠正偏差。因此，可以说没有偏差就不会有调节过程。

在控制系统中，给定量又称系统的输入量，被控制量也称系统的输出量。输出量的返回过程称为反馈，它表示输出量通过测量装置将信号的全部或一部分返回输入端，使之与输入量进行比较。比较产生的结果称为偏差。在人工控制中，这一偏差是通过人眼观测后，由人

判断、决策得出的；而在自动控制中，偏差则是通过反馈，由控制器进行比较、计算产生的。

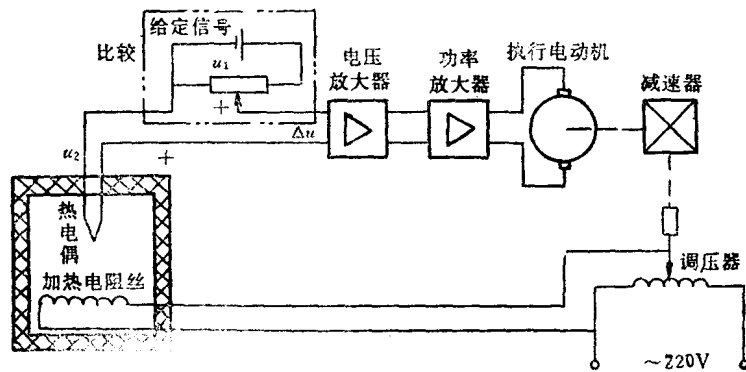


图1-2 恒温箱的自动控制系统

综上所述，可以归纳控制系统的工作原理如下：

- 1) 检测输出量的实际值。
- 2) 将实际值与给定值（输入量）进行比较得出偏差值。
- 3) 用偏差值产生控制调节作用去消除偏差。

这种基于反馈原理、通过“检测偏差再纠正偏差”的系统称为反馈控制系统。可见，作为反馈控制系统至少应具备测量、比较（或计算）和执行三个基本功能。

控制系统的控制过程可以用系统的职能框图清晰而形象地表示。图1-3所示为恒温箱温度自动控制系统的职能框图。⊗代表比较元件，箭头代表作用方向，每个职能框代表一个环节，各环节的作用是单向的，其输出受输入的控制。从图中可以清楚地看到反馈控制的基本原理。各种不同的控制系统实现自动控制的装置可以不尽相同，但反馈控制的原理却是相同的，可以说，反馈控制是实现自动控制最基本的方法。

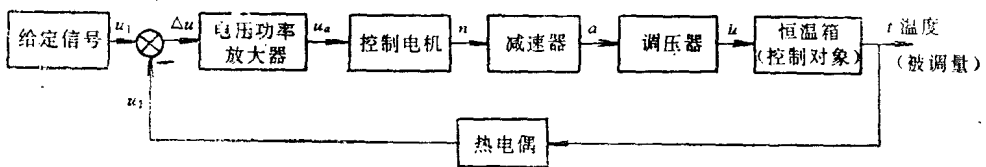


图1-3 恒温箱温度自动控制系统职能框图

二、开环控制与闭环控制

实际的控制系统，根据有无反馈作用可以分为开环控制系统与闭环控制系统两类。

1. 开环控制系统

如果系统只是根据输入量和干扰量进行控制，而输出端和输入端之间不存在反馈回路，输出量在整个控制过程中对系统的控制不产生任何影响，这样的系统称为开环控制系统。图1-4所示的数控机床进给系统，由于没有反馈通道，所以是一个开环系统。系统的输出量仅受输入量的控制。



图1-4 数控机床的开环控制系统

开环控制系统用一定输入量产生一定的输出量，如果由于某种干扰作用使输出量偏离原始值，它没有自动纠偏的能力。要进行补偿，必须再借助人工作改变输入量。所以开环系统的控制精度较低。但是如果组成系统的元件特性和参数值比较稳定，而且外界的干扰也比较小时，则这种控制系统也可以保证一定的精度。开环控制系统的最大优点是系统简单，一般都能稳定可靠地工作，因此对于要求不高的系统可以采用。

2. 闭环控制系统

如果系统的输出端和输入端之间存在反馈回路，输出量对控制过程产生直接影响，这种系统称为闭环控制系统。这里，闭环的作用就是应用反馈来减少偏差。因此，反馈控制系统必定是闭环控制系统。例如，前述的恒温箱温度自动控制系统也是一个闭环控制系统。

闭环控制系统的突出优点是控制精度高，不管遇到什么干扰，只要被控制量的实际值偏离给定值，闭环控制就会产生控制作用来减小这一偏差。

闭环控制系统也有它的缺点，这类系统是靠偏差进行控制的，因此，在整个控制过程中始终存在着偏差，由于元件的惯性（如负载的惯性），若参数配置不当，很容易引起振荡，使系统不稳定，而无法工作。所以，在闭环系统中精度和稳定性之间总会存在着矛盾，必须合理地解决。

在机电系统中，常用的控制方式是闭环控制。所以本书主要介绍闭环控制系统。

三、闭环控制系统的组成

图1-5所示为一个较完整的闭环控制系统。由图可见，闭环控制系统一般应该包括给定元件、反馈元件、比较元件、放大元件、执行元件及校正元件等。

1) 给定元件 主要用于产生给定信号或输入信号。例如，图1-2中电位计里的可变电阻。

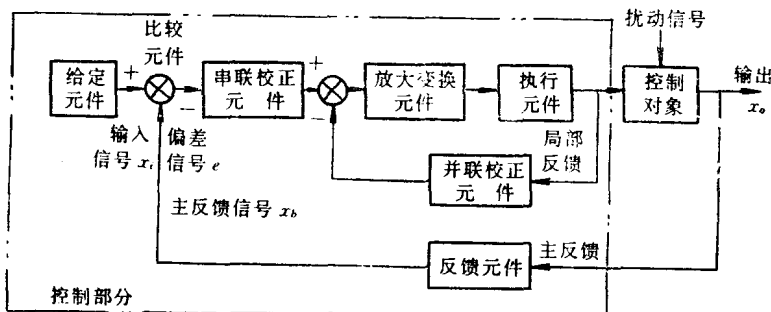


图1-5 闭环控制系统的组成

2) 反馈元件 它测量被控制量或输出量，产生主反馈信号。一般，为了便于传输，主反馈信号多为电信号。因此，反馈元件通常是一些用电量来测量非电量的元件。例如，用电位器或旋转变压器将机械转角变换为电压信号；用测速发电机将转速变换为电压信号；用热电偶将温度变换为电压信号和用光栅测量装置将直线位移变换为数字电信号等。

3) 比较元件 用来接收输入信号和反馈信号并进行比较，产生反映两者差值的偏差信

号。例如，图1-2中的电位计。

4) 放大元件 对偏差信号进行放大的元件。例如，电压放大器、功率放大器、电液伺服阀等。放大元件的输出一定要有足够的能量，才能驱动执行元件，实现控制功能。

5) 执行元件 直接对受控对象进行操纵的元件。例如，伺服电动机、液压马达、伺服液压缸等。

6) 校正元件 为保证控制质量，使系统获得良好的动、静态性能而加入系统的元件。校正元件又称校正装置。串接在系统前向通路上的称为串联校正装置；并接在反馈回路上的称为并联校正装置。

尽管一个控制系统是由许多起着不同作用的元件所组成，但从总体来看，比较元件、放大元件、执行元件和反馈元件等共同起着控制作用。而剩余的部分就是受控对象。因此，任何控制系统也可以说仅由控制部分和受控对象两部分组成。图1-5双点划线所包含的内容就是控制部分。

扰动信号不是由元件产生的，而是由系统的外部环境或内部因素造成的，它集中地反映在控制对象上。因此不管扰动信号是什么，也不管扰动信号有多少，都集中地表现在控制量与被控制量之间的偏差上。而闭环控制系统就是按偏差进行自动调节的，所以采用图1-5所示的这种表示方式是合适的。

第三节 控制系统的基本类型

控制系统的种类很多，在实际工程中，可以从不同的角度对控制系统进行分类。

一、按输入量的特征可分为

1. 恒值控制系统

这种控制系统的输入量是一个恒定值，一经给定，在运行过程中就不再改变（但可定期校准或更改输入量）。恒值控制系统的任务是保证在任何扰动作用下系统的输出量为恒值。

工业生产中的温度、压力、流量、液面等参数的控制，有些原动机的速度控制，机床的位置控制，电力系统的电网电压、频率控制等，均属此类。

2. 程序控制系统

这种系统的输入量不为常值，但其变化规律是预先知道和确定的。可以预先将输入量的变化规律编成程序，由该程序发出控制指令，在输入装置中再将控制指令转换为控制信号，经过全系统的作用，使被控对象按指令的要求而运动。计算机绘图就是典型的程序控制系统。

工业生产中的过程控制系统按生产工艺的要求编制成特定的程序，由计算机来实现其控制。这就是近年来迅速发展起来的数字程序控制系统和计算机控制系统。微处理机控制将程序控制系统推向更普遍的发展阶段。

图1-6表示程序控制系统。

3. 随动系统

随动系统在工业部门又称伺服系统。这种系统的输入量的变化规律是不能预先确定的。当输入量发生变化时，则要求输出量迅速地、平稳地跟随着变化，且能排除各种干扰因素的影响，准确地复现控制信号的变化规律（此即伺服的含义）。控制指令可以由操作者根据需

要随时发出，也可以由目标物或相应的测量装置发出。

机械加工中的仿形机床和武器装备中的火炮自动瞄准系统以及导弹目标自动跟踪系统等均属随动系统。

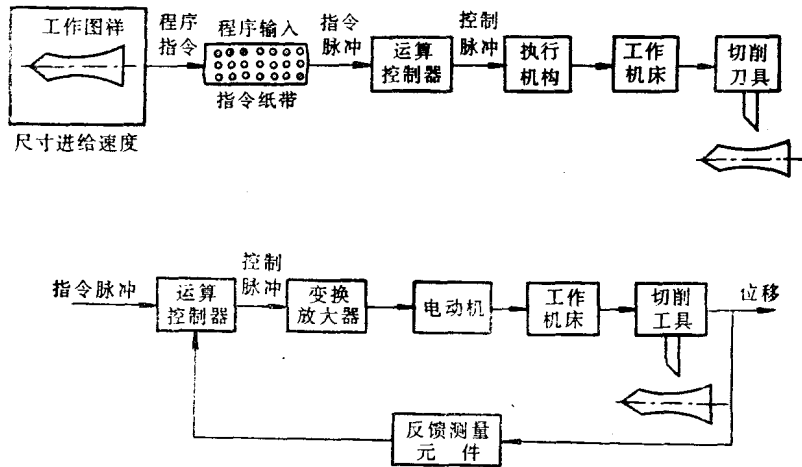


图1-6 程序控制系统

函数记录仪是一种自动记录电压信号的设备，其原理如图1-7所示。其中记录笔与电位器 R_M 的电刷机构联结。因此，由电位器 R_0 和 R_M 组成桥式线路的输出电压 u_p 与记录笔位移是成正比的。当有输入信号 u_r 时，在放大器输入端得到偏差电压 $\Delta u = u_r - u_p$ ，经放大后驱动伺服电动机，并通过齿轮系及绳轮带动记录笔移动，同时使偏差电压减小，直至 $u_p = u_r$ 时，电机停止转动。这时记录笔的位移 L 就代表了输入信号的大小。若输入信号随时间连续变化，则记录笔便跟随并描绘出信号随时间变化的曲线。由于该系统的输入信号的变化规律是不能预先确定的，故它属于随动系统。

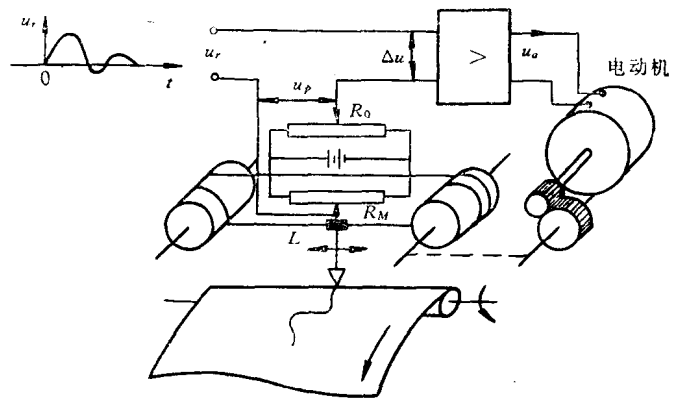


图1-7 函数记录仪原理图

二、按系统中传递信号的性质可分为

1. 连续控制系统

系统中各部分传递的信号都是连续时间变量的系统称为连续控制系统。连续控制系统又有线性系统和非线性系统之分。用线性微分方程描述的系统称为线性系统；不能用线性微分方程描述、存在着非线性部件的系统称为非线性系统。

2. 离散控制系统

系统中某一处或数处的信号是脉冲序列或数字量传递的系统称为离散控制系统。在离散系统中，数字测量、放大、比较、给定等部件一般均由微处理机实现，计算机的输出经D/A转换加给伺服放大器，然后再去驱动执行元件。

由于连续控制系统和离散控制系统的信号形式有较大差别，因此在分析方法上也有明显的不同。连续控制系统以微分方程来描述系统的运动状态，并用拉氏变换法求解微分方程；而离散系统则用差分方程来描述系统的运动状态，用Z变换法引出脉冲传递函数来研究系统的动态特性。

此外，还可按系统部件的物理性质分为机械、电气、机电、液压、气动、热力等控制系统。

第四节 对控制系统的基本要求

控制系统应用于不同场合，对它有不同性能要求。但从控制工程的角度来看，对控制系统却有一些共同的要求，一般可归结为稳定、精确、快速。

一、稳定性

由于控制系统都包含储能元件，若系统参数匹配不当，便可能引起振荡。稳定性就是指系统动态过程的振荡倾向及其恢复平衡状态的能力。对于稳定的系统，当输出量偏离平衡状态时，应能随着时间收敛并且最后回到初始的平衡状态。稳定性乃是保证控制系统正常工作的先决条件。

二、精确性

控制系统的精确性即控制精度，它是以稳态误差来衡量的。所谓稳态误差是指以一定变化规律的输入信号作用于系统，当调整过程结束而趋于稳定时，输出量的实际值与给定值之间的误差值，它反映了动态过程后期的性能。

这种误差一般是很小的。如数控机床的加工误差小于 0.02mm ，一般恒速、恒温控制系统的稳态误差都在给定值的 1% 以内。

三、快速性

快速性是指当系统的输出量与输入量之间产生偏差时，消除这种偏差的快慢程度。快速性好的系统，它消除偏差的过渡过程时间就短，就能复现快速变化的输入信号，因而具有较好的动态性能。

由于受控对象的具体情况不同，各种系统对稳定、精确、快速这三方面的要求是各有侧重的。例如，调速系统对稳定性要求较严格，而随动系统则对快速性提出较高的要求。

即使对于同一个系统稳、准、快也是相互制约的。提高快速性，可能会引起强烈振荡；改善了稳定性，控制过程又可能过于迟缓，甚至精度也会变差。分析和解决这些矛盾，正是本书所要讨论的主要内容之一。

习 题

- 1-1 什么是闭环控制系统的基本工作原理？
- 1-2 试列举几个日常生活中的开环控制和闭环控制系统，并说明它们的工作原理。
- 1-3 仓库大门自动控制系统的原理如图1-8所示。试说明自动控制大门开启和关闭的工作原理并画出系统框图。
- 1-4 图1-9所示的两个液位控制系统，试分别绘出其组成的框图，并说明其工作原理。

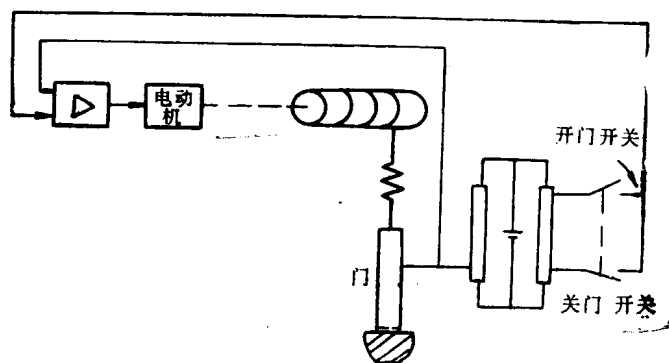


图1-8 题1-3图

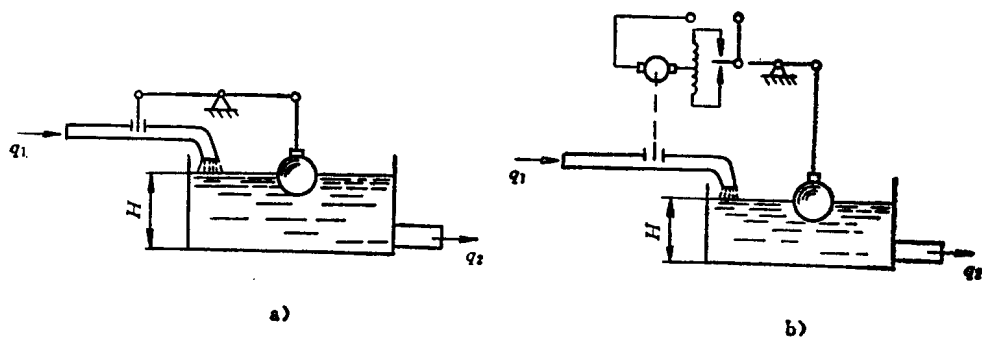


图1-9 题1-4图

第二章 数学模型

为了从理论上对控制系统进行性能分析，首先要建立系统的数学模型。

系统的数学模型，是描述系统输入、输出量以及内部各变量之间关系的数学表达式，它揭示了系统结构及其参数与其性能之间的内在关系。

系统数学模型有多种形式，这取决于变量和坐标系统的选择。在时间域，通常采用微分方程或一阶微分方程组的形式；在复数域则采用传递函数形式；而在频率域采用频率特性形式。

必须指出，建立合理的数学模型，对于系统的分析和研究极为重要。由于不可能将系统实际的错综复杂的物理现象完全表达出来，因而要对模型的简化性与精确性进行折衷的考虑。一般是根据系统的实际结构参数和系统分析所要求的精度，忽略一些次要因素，建立既能反映系统内在本质特性，又能简化分析计算工作的模型。

建立系统数学模型，一般采用解析法或实验法。所谓解析建模法，即依据系统及元件各变量之间所遵循的物理学定律，理论推导出变量间的数学关系式，从而建立数学模型。本章仅讨论解析建模方法，关于实验法将在后面的章节进行介绍。

第一节 控制系统的运动微分方程

工程中的控制系统，不管它是机械的、电气的、液压的还是热力的、化学的，其运动规律都可以用微分方程加以描述。因此，用解析法建立系统或元件的数学模型就是从列写它们的运动微分方程开始的。如果对这些微分方程求解，就可以获得系统在输入作用下的输出响应。

一、建立数学模型的一般步骤

用解析法列写系统或元件微分方程的一般步骤是：

- 1) 分析系统的工作原理和信号传递变换的过程，确定系统和各元件的输入、输出量。
- 2) 从系统的输入端开始，按照信号传递变换过程，依据各变量所遵循的物理学定律，依次列写出各元件、部件的动态微分方程。
- 3) 消去中间变量，得到一个描述元件或系统输入、输出变量之间关系的微分方程。
- 4) 写成标准化形式。将与输入有关的项放在等式右侧，与输出有关的项放在等式的左侧，且各阶导数项按降幂排列。

二、控制系统微分方程的列写

(一) 机械系统

任何机械系统的数学模型都可以应用牛顿定律来建立。机械系统中以各种形式出现的物理现象，都可以使用质量、弹性和阻尼三个要素来描述。

1. 机械平移系统

图2-1所示为常见的质量-弹簧-阻尼系统，图中的 m 、 K 、 C 分别表示质量、弹簧刚度

和粘性阻尼系数。系统在静止平衡时的那一点为零点，即平衡工作点，这样的零位选择消除了重力的影响。设系统的输入量为外作用力 $f_i(t)$ ，输出量为质量块的位移 $x_o(t)$ 。现研究外力 $f_i(t)$ 与位移 $x_o(t)$ 之间的关系。

在输入 $f_i(t)$ 力的作用下，质量块 m 将有加速度，从而产生速度和位移。质量块的速度和位移使阻尼器和弹簧产生粘性阻尼力 $f_c(t)$ 和弹性力 $f_k(t)$ 。这两个力反馈作用于质量块上，影响输入 $f_i(t)$ 的作用效果，从而使质量块的速度和位移随时间发生变化，产生动态过程。

根据牛顿第二定律，有

$$f_i(t) - f_c(t) - f_k(t) = m \frac{d^2}{dt^2} x_o(t)$$

由阻尼器、弹簧的特性，可写出

$$f_c(t) = C \frac{d}{dt} x_o(t)$$

$$f_k(t) = K x_o(t)$$

由以上三个式子，消去 $f_c(t)$ 和 $f_k(t)$ ，并写成标准形式，得

$$m \frac{d^2}{dt^2} x_o(t) + C \frac{d}{dt} x_o(t) + K x_o(t) = f_i(t) \quad (2-1)$$

一般 m 、 C 、 K 均为常数，故式(2-1)为二阶常系数线性微分方程，它描述了输入 $f_i(t)$ 和输出 $x_o(t)$ 之间的动态关系。方程的系数取决于系统的结构参数，而方程的阶次等于系统中独立的储能元件（惯性质量、弹簧）的数量。

当质量 m 很小可忽略不计时，系统由并联的弹簧和阻尼器组成，如图2-2所示。

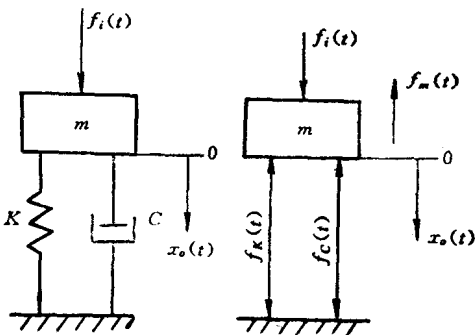


图2-1 机械平移系统力学模型

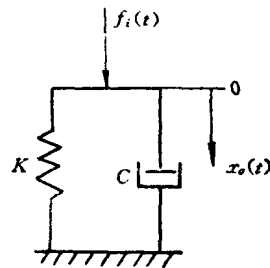


图2-2 弹簧-阻尼系统力学模型

此时，系统的运动方程为一阶常系数微分方程

$$C \frac{d}{dt} x_o(t) + K x_o(t) = f_i(t)$$

这说明，同一系统由于简化程度的不同，可以有不同的数学模型。

2. 机械旋转系统

包含定轴旋转的机械系统用途极其广泛。其建模方法与平移系统非常相似。只是这里将质量、弹簧、阻尼分别变成转动惯量、扭转弹簧、旋转阻尼。

图2-3所示为一机械旋转系统，回转体通过柔性轴（用扭转弹簧 K 表示）与齿轮连接。回

转体在粘性介质中旋转，因而承受与旋转速度成正比的阻尼力矩。

设齿轮扭转角 $\theta_i(t)$ 为系统输入量，回转体扭转角 $\theta_o(t)$ 为系统输出量，据此建立系统的运动微分方程(忽略轴承上的摩擦)。扭转弹簧左、右端的扭转角分别为 $\theta_i(t)$ 、 $\theta_o(t)$ ，设它加给回转体的扭矩为 $T_K(t)$ (当 $\theta_i = \theta_o$ 时，弹簧的扭矩为零)，则

$$T_K(t) = K[\theta_i(t) - \theta_o(t)]$$

回转体上除了受弹簧的扭矩外，也受阻尼扭矩 $T_c(t)$ 作用，因而有扭矩平衡方程

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta_o(t) = T_K(t) - T_c(t)$$

和旋转阻尼特性方程

$$T_c(t) = C \frac{d}{dt} \theta_o(t)$$

由以上三式整理可得机械旋转系统运动微分方程

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta_o(t) + C \frac{d}{dt} \theta_o(t) + K \theta_o(t) = K \theta_i(t) \quad (2-2)$$

(二) 电气系统

电阻 R 、电感 L 和电容器 C 是电路中的三个基本元件。通常利用基尔霍夫定律来建立电气系统的数学模型。

$R-L-C$ 无源电路网络如图2-4所示，设输入端电压 $u_i(t)$ 为系统输入量。电容器 C 两端电压 $u_o(t)$ 为系统输出量。现研究输入电压 $u_i(t)$ 和输出电压 $u_o(t)$ 之间的关系。电路中的电流为中间变量。

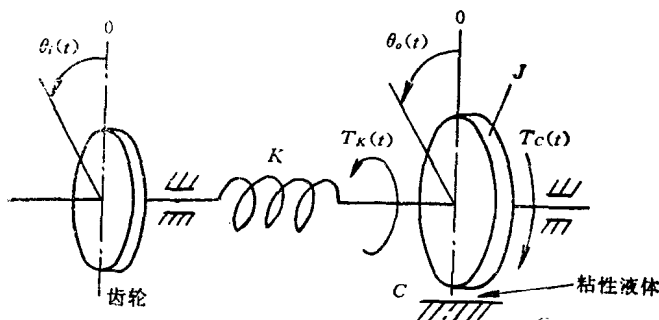


图2-3 机械旋转系统力学模型

J —回转体转动惯量 K —扭转刚度系数 C —粘性阻尼系数

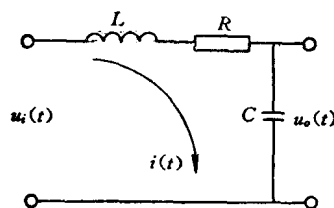


图2-4 $R-L-C$ 无源电路网络

根据基尔霍夫定律，有

$$u_i = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$u_o = -\frac{1}{C} \int i(t) dt$$

消去中间变量 $i(t)$ ，稍加整理，即得

$$LC \frac{d^2}{dt^2} u_o(t) + RC \frac{d}{dt} u_o(t) + u_o(t) = u_i(t) \quad (2-3)$$

一般假定 R 、 L 、 C 都是常数，则上式为二阶常系数线性微分方程。

若 $L = 0$ ，系统也可简化为一阶常微分方程