天津師範大學

學術論文選編

自然科学部分

科 研 处

1985.11

前　　　　　言

（自然科学部分）

为了更广泛地进行学术交流，提高我校教学与学术水平，我们从理科各专业教师近几年来发表的论文中选编了这本文集，题为《天津师范大学学术论文选编（自然科学部分）》。

党的十一届三中全会以来，学校端正了办学方向，加强了基础科学和应用科学的研究。重视科技学术交流，有计划地选派教师出国进修，聘请外国专家来校讲学，并克服各种困难为教师的教学、科研创造条件。在学校的领导下，广大教师经过辛勤的努力，写出了大量的有价值的科研论文。但由于本文集篇幅有限，收入的论文只能是其中一部分。今后随着我校教学与科研的发展，将陆续搜集编印。

论文按数学、物理学、化学、地理学、生物学和体育学次序编排。

由于编者的水平有限，《论文选编》中难免有不足之处，敬请读者指正。

天津师范大学科研处

一九八五年十月

目　　录

（载《天津市数学研究成果选编》，天津科学技术出版社、1983.3.）

关于环的n—伪理想

侯 国 荣

除环或域，只有平凡理想。所以，理想对于它们就没有多大的作用。M.K.Sen于1976年在〔2〕中推广了理想这个概念，定义了环的伪理想（Pseudo ideal），他还用伪理想这一概念刻画了除环、域以及比域更为一般的交换正则环。本文把伪理想的概念作进一步的推广，定义了n-伪理想（$n\geqslant 2$），并用n-伪理想来刻画除环，与正则环，并使得〔2〕中关于除环的所有结果作为本文中一些命题的直接推论；同时还改进了〔2〕中两条命题的条件。

定义 令R是一个环，$A\neq\varnothing\subseteq R$。称A是R的一个n-左（右）伪理想，如A满足下述条件：

（i）A是R的子环，

（ii）n是某个确定的正整数，$\forall r\in R$，$a\in A$，有$r^na\in A$（$ar^n\in A$）。

如A既是R的n-左伪理想，又是R的n-右伪理想时，称A是R的一个n-伪理想或n-双侧伪理想。

在此定义中，如取$n=2$，就是M.K.Sen给出的伪理想的定义；如取$n=1$，就是通常的理想定义。

在下面的讨论中，n总是指不小于2的正整数。

易见，环的每个左（右、双侧）理想必是n-左（右、双侧）伪理想。事实上，令A是环R的左理想，$\forall r\in R$，$a\in A$，显然有$ra\in A\Rightarrow r(ra)=r^2a\in A\Rightarrow\cdots\Rightarrow r(r^{n-1}a)=r^na\in A$。对于右、双侧的情形也同样可证。但反之不然。我们看$n=2$的情形：

令R是高斯整数环，$A=\{a+bi\mid a$取任意整数，b取任意偶数$\}$，则A关于数的加法与乘法作成R的伪理想。由于$(1+3i)(1+2i)=-5+5i$，$\notin A$，所以A不是R的理想。

现在，我们应用n-伪理想来研究除环。

命题1 令R是除环，$A\neq\varnothing\subseteq R$.A是R的n-左伪理想$\Leftrightarrow$A是R的n-右伪理想。

证 当$A=\{0\}$时，命题显然成立。今考察$A\neq\{0\}$的情形。如A是R的一个n-左伪理想，任取$a\neq 0\in A$，必有$a^{-1}\in R$，使得$(a^{-1})^na=a^{-(n-1)}\in A$。于是$a^{-(n-1)}a^{n-1}=e\in A$，e是R的单位元，因而对R中每个r，$r^n\in A$。$ar^n\in A$.这就证明了A是R的n-右伪理想。类似地可证．R的每个n-右伪理想也是R的n-左伪理想。

本命题说明，在除环里只有n-双侧伪理想。

推论1 令R是除环，$A\neq\varnothing\subseteq R$.A是R的左伪理想$\Leftrightarrow$A是R的右伪理想。

推论2 除环R的每个非零的n-伪理想必是R的子除环。

证 如A是R的非零n-伪理想，则$e\in A$. $Aa\neq 0\in A$，由于$a^{-1}\in R$，故有$a^{n-}\cdot a^{n-1}=a^{-1}\in A$.

命题2 令A是除环R的子环，而且A满足下列两个条件：

(i) $r^{n-1}Ar^{n-1}\subseteq A$,

(ii) $rAr^{-(n-1)}\subseteq A$,

则A是R的n-左伪理想。

证 $Ar\in R, a\in A$，由(ii)，$b=rar^{-(n-1)}\in A$，再由(i)，$r^na=r^{n-1}(ra)=r^{n-1}br^{n-1}\in A$。

这两个条件不是必要的。但却有下面的

命题3 令A是除环R的子环。A是R的n-伪理想$\Leftrightarrow (ra)^{n-1}r\in A$. $Aa\in A$。$r\in R$。

证 当$A=\{0\}$时，命题显然成立。今考察$A\neq\{0\}$的情形。若A是R的n-伪理想，$Ar\neq 0\in R, a\neq 0\in A$，由于$a^{-1}\in A, ra\in R$，$\therefore (ra)^na^{-1}=(ra)^{n-1}r\in A$. 反之，$a\neq 0\in A$，$(a^{-1}a)^{n-1}a^{-1}=a^{-1}\in A$，故$e\in A$. $\therefore (r\ e)^{n-1}r=r^n\in A$，因而$r^na\in A$，即A是R的一个u-伪理想。

推论 令A是除环R的子环。A是R的伪理想$\Leftrightarrow r^nar\in A$，$Ar\neq 0\in R$，$a\in A$。

这一推论，改进了由M.K.Sen得出的下述命题：R是除环，A是R的子环。A是R的伪理想$\leftrightarrows rar\in A$，$rar^{-1}\in A$. $\forall r\neq \sigma\in R$，$a\in A$ 。

命题4 令R是含单位元e的环，元数＞1。当R不含真n-伪理想时，R必是除环。

证 $Aa\neq 0$，$b\neq 0\in R$，由a，作R的n-左伪理想Ra，则$Ra\neq\{0\}$，故有$Ra=R$。因而方程$xa=b$在R里有解x_0，又令$yb=x_0$在R里的解是y_0，则$0\neq b=x_0a=(y_0b)a=y_0(ba)$. $\therefore$R不含零因子。令$xa=e$在R里的解是a，即$a'a=e$，又$(aa'-e)a=a(a'a)-a=ae-a=0$，$\therefore aa'=e$，即R是除环。

此命题的逆不真。令GF(2)是一个Galois域，R是GF(2)上的有理函数域。取R的非空子集$A=\{f(x)\in R, f(x)=g(x)^2, g(x)\in R\}$，则A是R的伪理想，但$x\notin A$，$\therefore$A是R的真伪理想。这个例子也说明了单环可以含有真伪理想。

命题5 令R是不含零因子的环。R是除环$\Leftrightarrow$对任意两个n-左伪理想A，B，若$A/B\neq\phi$。且对任意的$r\neq 0\in R$。有$[r(A/B)]^{n-1}r\subseteq A/B$。

证 先证必要性。$Aa\in A/B$，因$a\notin B$，所以$a\neq 0$。由于$a\in A$，由命题3，$Ar\neq 0\in R$，$(ra)^{n-1}\circ r\in A$. 如尚有$(ra)^{n-1}r\in B$，再由命题3可得$[r^{-1}(ra)^{n-1}r]^{n-1}r^{n-1}=(ar)^{n(n-2)}a=(ar)^{n^2}(ar)^{-2n}$。$a\in B$. 因$ar\neq 0$，所以$(ar)^{-1}\in R$. 又因B是n-左伪理想，所以$\underbrace{(ar)^{-n}(ar)^{-n}\cdots(ar)^{-n}}_{n个}(ar)^{n^2}$。$(ar)^{-2n}a=(ar)^{-2n}a\in B$. 且$(ar)^n(ar)^n(ar)^{-2n}a=a\in B$.

这个矛盾，说明$(ra)^{n-1}r\notin B$，也即$(a)n^{-1}r\in A/B$。

充分性 $Aa\neq 0\in R$，作R的n-左伪理想Ra，若$Ra\neq R$，则，$R/Ra\neq\phi$。对元素a，又有$[a(R/Ra)]^{n-1}a\subseteq R/Ra$. 故$Ab\in R/Ra$，

$(ab)^{n-1}a\in R/Ra$，但$(ab)^{n-1}a\in Ra$. 这个矛盾说明必有$Ra=R$. 即方程$xa=b(a\neq 0)$在R里有解。令$xa=a$在R里的解是e，即$ea=a$，且$e\neq 0$. 所以$(e^2-e)a=0$。因$a\neq 0$，所以$e^2=e$。这个元e就是R的单位元。因$ya=e$在R里有解a'，$\therefore a'$是a的左逆元，再由命题4的证明，知a'是a的右逆元，所以R是除环。

把本命题中的条件改为A、B均是n-右伪理想时命题也成立。

推论 令R是不含零因子的环。R是除环⇔对任意两个左伪理想A，B，若$A/B\neq\phi$，且A $r\in R$，有 $r(A/B)r\subseteq A/B$。

M.K.Sen给出此推论的充分性证明时，他假定了“对任意两个左伪理想A，B，在A/B $\neq\phi$时有$r(A/B)r\supseteq A/B$。同时对任意两个右伪理想A，B在$A/B\neq\phi$时，有$r(A/B)r\subseteq A/B$”。我们给出的推论中的条件，仅要求A，B是单侧伪理想就可以了

关于用n—伪理想刻画正则环，我们有以下的命题：

命题5 R是可换环，R是正则环⇔对R的每个n—伪理想B，有$B=B\overline{B}$，$\overline{B}=\{b^n \mid b\in B\}$。

证 如B是n—伪理想，显然有$B\overline{B}\subseteq B$，$Ab\in B$，必存在$y\in R$，使$b=byb$，由于对任意的$n\geqslant 2$，有$(yb)^n=yb$，$\therefore b=byb=b(yb)^{n^2}=b[(yb)^n]^n=b(y^nb^n)^n\in B\overline{B}$，于是有$B\subseteq B\overline{B}$ 故 $B=B\overline{B}$，反之，任取$a\in R$，作$(a)=\{ma+ar \mid m\in Z, r\in R\}$，则(a)是n—伪理想，因此$(a)=a\overline{(a)}$，$a=\Sigma c_i d_i$，$c_i\in(a)$，，$d_i\overline{(a)}$，今放察a表达式中的被加项$c_id_i$，$\because c_i=ma+ar$，$d_i=e_i^n$，$e_i=m_ia+ar_i$，$\therefore c_id_i=at_ia$，$t_i\in R$，于是有$a=ata$，$t\in R$，故R是正则环。

命题6 R是可换环，R是正则环⇔P(R)＝{一切R的n伪理想}是一个半格。

证 显然P(R)是一个乘法半群。任取$A\in P(R)$，$Aa\in A\because$存在$y\in R$，使$aya=a$，易知有$(ay)^na=a$，$n\geqslant 2$，$\because a=(ay)^na=a^ny^na\in A^2$，即$A\subseteq A$，显然有$A^2\subseteq A$，$\because A^2=A$，反之，$Aa\in R$，作(a)，则$(a)\in P(R)$，$\because(a)^2=(a)$，于是有$(a)^3=(a)$，故有$a=ata$，$t\in R$，即R是正则环。

参 考 文 献

〔1〕 N.H.McCoy: The,Theory of Rings,1964.

〔2〕 M.K.Sen: On Pseudo Ideals of Rings, Nanta Mathematica, vol X, No.2 (1976,12) P. 158-160.

关于圣维南原理的一点注释
载《力　学　学　报》1981年 第1期

关于圣维南原理的一点注释

黄　秉　规

§1本文的讨论对象　本文的讨论对象是传统的圣维南原理．在文献〔1〕中对之陈述如下：

"按照这个原理，在物体表面的一小部分上作用以合力和合力矩等价于零的一个力系，在物体内与这小部分表面的距离远远大于这小部分的直线大小的地方所产生的形变其大小可以忽略"。

在文献〔2〕中指出：

"圣维南原理说的是：若Σ是弹性体B的表面的一部分，它的典型大小是h，设两个静力等价的应力分布相继地作用在Σ上，那么在B内与Σ的距离跟h相比为很大的点上二者所产生的应力和应变将近似地相等"。

在文献〔3〕中关于圣维南原理的叙述为

"起源于圣维南的原理，最初是被他在某些情况下用实验确定的，它断言由一个静力平衡的局部的荷载分布在与作用区域的距离和该作用区域的大小相比较足够大的地方所产生的应力是可以忽略不计的"。

关于传统的圣维南原理的上面三种陈述，其实质都是相同的。下面将对它们做点具体解释，请看下面的图1，

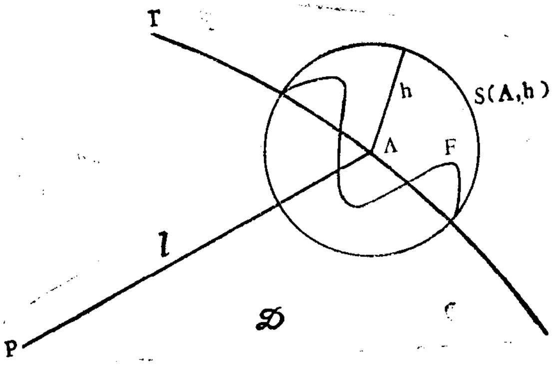

图　1

若A是弹性体&的边界Γ上的一点，令S（A，h）是以A为中心和以h为半径的球，在ΓUS（A，h）上作用以静力平衡的力系F，若p是&内的一点，又以l记Ap之长。这样若比值h/l→0，则在P点由F所引起的应力分布也将趋于零。

从以上三人关于传统的圣维南原理的陈述、都可推得这段具体解释。

§2.**一个例外** 我们从文献〔4〕的第（6）式出发，它是

$$\bar{\sigma}(x,y,z)=\frac{K-3}{6\pi}\cdot\frac{xX+yY+zZ}{r^3} \tag{1}$$

其中（X，Y，Z）是作用在半空间 $z>0$ 的表面上的原点上的集中力，$r^2=x^2+y^2+z^2$，$\bar{\sigma}$是平均法应力，$K=1-2\nu$，ν是Poisson 比.若在点（ξ，η，0）作用以外力（0,0,Z），则式（1）变为

$$\bar{\sigma}=-\frac{(1+\nu)}{3\pi}\cdot\frac{zZ}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2z^2]^{3/2}} \tag{2}$$

如果令 h 满足 $0<h\leq 1/10$。又在表面$z=0$上以原点为中心和以h为半径的球内作用以连续分布的外载（0，0，$f(\xi,\eta)$），则

$$\bar{\sigma}(x,y,z)=-\frac{(1+\nu)}{3\pi}\iint_{\rho<h}\frac{zf(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}} \tag{3}$$

其中 $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$。具体地说，$f(\xi,\eta)$可取为文献〔5〕中的函数

$$f(\xi,\eta)=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}F(\xi,\eta) \tag{4}$$

和

$$F(\xi,\eta)=\begin{cases}\frac{9}{\pi h^2}\left(1-\frac{\rho^2}{h^2}\right)^8, & \rho<h\\ 0, & \rho\geqslant h\end{cases} \tag{5}$$

于是由分布密度矢量$(0,0,f(\xi,\eta))$所形成的外力是静力平衡的。在半空间$z>0$的点$(0,0,1)$的平均法应力的值为

$$\bar{\sigma}(0,0,1)=-\frac{(1+\nu)}{3\pi}\iint_{\rho<h}\frac{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}F(\xi,\eta)d\xi d\eta}{[\xi^2+\eta^2+1]^{3/2}}$$

$$=-\frac{(1+\eta)}{3\pi}\int\int_{\rho<h}F(\xi,\eta)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\frac{1}{[\xi^2+\eta^2+1]^{3/2}}d\xi d\eta$$

$$=\frac{(1+\nu)}{3\pi}\left[\frac{3}{(\xi_1^2+\eta_1^2+1)^{5/2}}-\frac{15\xi_1^2}{(\xi_1^2+\eta_1^2+1)^{7/2}}\right] \tag{6}$$

其中 $\xi_1^2+\eta_1^2\leqslant h^2$。注意到$0<h\leqslant 1/10$，故

$$\bar{\sigma}(0,0,1)\geqslant\frac{(1+\nu)}{3\pi}\left[\frac{3}{(1+h^2)^{5/2}}-15h^2\right]>\frac{(1+\nu)}{5} \tag{7}$$

因此$\bar{\sigma}(0,0,1)$大于一个与h无关的正常数。

如果令$h\to 0$，$(0,0,f(\xi,\eta))$的极限为作用在原点的静力平衡的集中荷载，此时$\bar{\sigma}(0,0,1)$极限值为$\frac{(1+\nu)}{\pi}$，它是一个大于零的常数。

在文献〔6〕中，对于上述传统的圣维南原理，给出了直观的反例。如果允许集中荷载存在，本文所给出的反例似乎稍为严格一点．而且做了定量的说明。

§3.几点补充说明

在文献〔4〕中，作者得到以下论断

“若加在一个合适支撑着的物体上的一系列的荷载全部作用在其表面上一个半径为ε的球内的一些点上，荷载的向量和为零，则由它们在物体内点P所引起的应变或应力值σ的大小的阶数仍是ε。”

“如果上述荷载，除了满足矢量和为零之外，还满足另外三条件使之形成一个在半径为ε的球内的平衡力系，则在P点所产生的σ-值，一般地说，其大小阶数仍是ε。”

“在本文的全部论证中，荷载及支撑对它的反作用都假定是集中力，是作用在表面上不同的点上的有限个力。如果代之以连续分布在表面上的应力，只要这些应力在有限区域（而且当区域趋向于零时）上的积分仍然有限，可以毫无困难地得到上述结论。”

众所周知，V·Mises 的这些估计的很好的，至今对大多数的实际问题都是适用的。如果注意到本文的公式（7），对于连续分布的外载，§2 所讨论的情况似乎补充了一个罕见的例外。

对于V.Mises 的结果，E.Sternberg 做了合理的推广，得到了更加广泛的估计式。最后，在文献〔7〕中，作者得到以下结论：

“对集中力情况的推广。注意，上一节所证明的定理可以推广到集中力的情况。参照（13），令集中力，$T_n=\left[X_1^{(n)},\ X_2^{(n)},\ X_3^{(n)}\right](n=1,2,\cdots,N)$作用在$S^*$的点$A_n$上，作用点与$P_0$一起位于一个半径为$\varepsilon$的球内。令$r^{(n)}=\left[x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ x_3^{(n)}\right]=r(\alpha_n,\beta_n)$是$A_n$的位置向量。现在考虑由$S^*$的N个不相交的子区域$S^{(n)}$所组成的S，每个$S^{(n)}$都是单连通而的且包含$A_n$在其内部，在（13）中取极限，如果$S^{(n)}$收缩到$A_n$同时$\int_{S^{(n)}}T d\sigma\to T_n$，我们得到

$$C\Delta Q[S]=g^0\sum_{n=1}^{N}T_n+g_a^o\sum_{n=1}^{N}T_n a_n+g_\beta^o\sum_{n=1}^{N}T_n\beta_n+\cdots$$

于是前面所得到的结论，对于集中力的情况仍然成立，只要在（18）到（25）中的积分代之子相应的有限和，而且$O(\varepsilon^2)$，$O(\varepsilon^3)$，$O(\varepsilon^4)$分别代之以$O(1)$，$O(\varepsilon)$，$O(\varepsilon^2)$.”

E.Sternberg 的上述估计同样有着更为广泛的应用范围。本文§2 所讨论的情况似乎又补充了一个罕见的例外。因为当$h\to 0$，我们所讨论的是静力平衡的集中外力，按E.Sternberg 的估计，应该是$\bar{\sigma}(0,0,1=\lim_{h\to 0}O(h)=0$．但现在却出现了异常情况，即

$$\bar{\sigma}(0,0,1)=\frac{1+\nu}{\pi}$$

如上述，本文§2所论讨的情况，当 $h\to 0$ 时成为作用于原点的静力平衡的集中外力，但 $\bar{\sigma}(0,0,1)$ 的极限值为常数 $\frac{1+\nu}{\pi}$。由此可见，为了描述一个集中的外力分布，仅仅注意到其合力和合力矩是很不够的。至少还应该注意到二次矩（包括双力矩）和二次以上的矩。其实，§2所讨论的外力其二次矩就是不可忽略的。但这还不够，还会有一些更加特殊的例外，这里就没法深入讨论了。如果采用非标准分析的方法，可以更全面和更深入地描写集中的外力分布，但这已超出了本文的论述范围。

最后让我们回忆一下 Truesdell[8] 的著名提问："这种思想，推广为'等价荷载的圣维南原理'，在线性弹性力学中引起一个重大问题，对于这样的结论，如果它是正确的，应该是一般方程式的数学推论。"本文§2所讨论的情况，似乎在一种特殊条件下涉及了这个问题的回答。从本文§2的论述可以得到以下看法：在允许集中力的特殊情况下，对于像§1所陈述的传统的圣维南原理，它并不是线性弹性力学一般方程式的数学推论。Toupin[6] 给出了一些直观的反例，本文所讨论的情况，从逻辑上看，似乎更严密一点。

对于传统的圣维南原理，在特殊情况下本文虽然给出了例外，原因是出现了例外，原因是出现了集中的外力分布。但在一些常见的问题中，这个原理仍然是适用的。

参 考 文 献

〔1〕 Jove,A、E,H,A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Fourth Edition,Cambridge, The University Press (1927)

〔2〕 Roseman,J,J.,The Principle of Seint-Venant's on linear and nonlinear plane elasticity.Arch.for Rational Mech.Anal.,26,2(1967),142—162.

〔3〕 Robinson,A.,Non-standard Analysis.New York(1974).

〔4〕 Mises,V.,On Saint Venant's Principle, Bull.Amer.Math.Soc.51,(1945).,555—562.

〔5〕 黄乘规，论圣维南原理相对于线性弹性力学的不协调性，华中工学院学报，2,1,(1979),33—40.

〔6〕 Toupin,R.A.,Saint Venant's Principle.Arch.for Rational Mech.Anal.,18,2(1965),83—96.

〔7〕 Sternberg,E.,On Saint Venant's Principle,Quart.of Appl.Math.,11,(1954),393—402.

〔8〕 Truesdell,C.,The Rational Mechanics of Materialspast,Present,Future. Applied Mechanics Reviews,12,2(1959).

Huang Cheng-gui (Tianjin Teacher's College)

An exception to Saint-Venant,s principle is pointed out in this note. Some supplementary remarks are given in regard to von Mises and Sternberg's work on Saintvenant's Principle.

分布函数族对参数的单调性定理
载《数学的实践与认识》1981年　第2期

分布函数族对参数的单调性定理

张文斌　　陈俊雅※

设$F(x,\theta)$，$\theta\in\Theta$为依赖于实参数θ的一族分布函数。如果对于任意固定的x，$F(x,\theta)$都是θ的递增函数，则称这个分布函数族关于θ是单调增大的；反之，则称单调减小的[1]。

研究分布函数族关于参数的单调性，在概率论的实际应用中有着重要的意义。一般说来，要验证一个分布函数族关于参数的单调性是比较困难的。鉴于此种情况，本文提供研究分布函数族关于参数的单调性的一个较为一般的方法，并且用这种方法证明几个常用分布函数族关于参数是单调的。

一、分布函数族对参数的单调性定理

我们考虑实一维空间R^1。设(R^1,Σ,μ)是一个测度空间。先证下述

引理. 设$f(t,\theta)$是(R^1,Σ,μ)上一族实值可积函数，依赖于一个实参数θ，$\theta\in\Theta$.若$1(t,\theta)$满足下列条件：

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,\theta)d\mu=S(\theta)$为$\theta$的递减（增）函数；

（2）存在μ一零测度集N和函数$\theta(t)$，$\theta(t)$在补集$\overline{N}$上是递增（减）的，并且$f(t,\theta)$当$\theta\leqslant\theta(t)$时关于θ是递增的，当$\theta\geqslant\theta(t)$时关于θ是递减的。则对任意x，

$$F(x,\theta)=\int_{-\infty}^{x}f(t,\theta)d\mu$$

是θ的递减（增）函数。

证. 先在$\theta\leqslant\theta(x)$($\theta\geqslant\theta(x)$)上考虑$F(x,\theta)$。在补集$\overline{N}$上，当$t>x$时，因为$\theta(t)\geqslant\theta(x)$（$\theta(t)\leqslant\theta(x)$）．而$f(t,\theta)$当$\theta\leqslant\theta(t)$（$\theta\geqslant\theta(t)$）时关于$\theta$是递增（减）的，所以$f(t,\theta)$当$\theta\leqslant\theta(x)$($\theta\geqslant\theta(x)$)时关于$\theta$是递增（减）的。因为$\mu(N)=0$，故$\int_{x}^{+\infty}f(t,\theta)d\mu$当$\theta\leqslant\theta(x)$（$\theta\geqslant\theta(x)$）时关于$\theta$是递增（减）的，因而

---

1)当然，我们还可以将这个概念加以推广，以适合于概括更多的分布函数族关于参数的单调性状：对此我们将在另文中讨论。

$$F(x,\theta)=\int_{-\infty}^{x} f(t,\theta)d\mu=S(\theta)-\int_{x}^{+\infty} f(t,\theta)d\mu$$

当$\theta\leqslant\theta(x)$($\theta\geqslant\theta(x)$)时关于θ是递减（增）的。

再在$\theta\geqslant\theta(x)$($\theta\leqslant\theta(x)$)上考虑$F(x,\theta)$。同样地，在N上，当$t\leqslant x$时，因为$\theta(t)\leqslant\theta(x)$($\theta(t)\geqslant\theta(x)$)，而$f(t,\theta)$当$\theta\geqslant\theta(t)$)($\theta\leqslant\theta(t)$)时关于$\theta$是递减（增）的，所以$f(t,\theta)$当$\theta\geqslant\theta(x)$($\theta\leqslant\theta(x)$)时关于$\theta$是递减（增）的．故$F(x,\theta)$当$\theta\geqslant\theta(x)$($\theta\leqslant\theta(x)$)时关于$\theta$是递减（增）的。

总上所述，$F(x,\theta)$是θ的递减（增）函数。

现在，我们引进受控的广义测度族的概念。设（R^1，Σ）是一个可测空间 μ是（R^1，Σ）上的一个广义测度，{ν}是（R^1，Σ）上的一族广义测度[2]。若{ν}中每个$\nu\ll\mu$，即族中的ν关于μ都是绝对连续的，则称族{ν}受控于μ的[3]，简称受控的[2]。

当μ是(R^1,Σ)上全σ－有限测度时，由前面的引理直接得到关于受控于μ的全σ有限广义测度族的一个定理。

定理．设（R^1，Σ，μ）是全σ－有限测度空间，{ν_θ}是（R^1，Σ）上受控于μ的一族全σ有限广义测度，依赖于一个实参数θ，$\theta\in\Theta$。若ν_θ满足下列条件：

（1）$\nu_\theta(R^1)=S(\theta)$为$\theta$的递减（增）函数；

（2）Radom-Nikodym导数[2)]

$$\frac{d\nu_\theta}{d\mu}=f(t,\theta)$$

满足引理的条件（2），则对任意x

$$F(x,\theta)=\nu_\theta((-\infty,x])=\int_{-\infty}^{x} g(t,\theta)d\mu$$

是的递减（增）函数。

这个定理可以应用到分布函数族关于参数的单调性问题上。

推论1，设$\xi(\theta)$，$\theta\in\Theta$为依赖于实参数θ的一族离散型随机变量，$\xi(\theta)$的分布律为

$$P(\xi(\theta)=x_k)=P_k(\theta)^3\theta,k=1,2,\cdots,$$

其中 $$x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}<\cdots,$$

如果存在递增（减）数列{θ_k}，使$P_k(\theta)$当$\theta\leqslant\theta_k$时递增，当$\theta\geqslant\theta_k$时递减，则相应的分布函数族

$$F(x,\theta)=\sum_{x_k\leqslant x} P_k(\theta),\ \theta\in\Theta$$

关于参数θ是单调减小（增大）的。

证．对任一$A\in B^1$，令

$$\mu(A)=A\text{中所含}x_i(i=1,2,\cdots)\text{的个数},$$

1）这是[3]中关于受控测度集集概念在广义测度集上的引伸。

2）因为$\nu_\theta\ll\mu$．μ是σ-有限测度》依*Radom—Nikodydd*3定理．有$d\nu_\theta/d\mu$

3）$\xi(\theta)$可以取有限个值。

则μ是可测空间（R^1，B^1）上的一个σ－有限测度。设$\xi(\theta)$的分布为F_θ，则分布族$\{F_\theta, \theta\in\Theta\}$受控于$\mu$把定理应用于分布族$\{F\theta, \theta\in\Theta\}$便知推论1正确。此时，定理中的$S(\theta)=1$，$\mu$－零测度集$N=R^1/\{x_1, x_2, \cdots\}$。

推论2． 设$\xi(\theta)'$，$\theta\in\Theta$为依赖于实参数θ的一族连续型随机变量，$\xi(\theta)$的分布密度为$f(t,\theta)$。如果存在递增（减）函数$\theta(t)$，使$f(t, \theta)$当$\theta\leqslant\theta(t)$时关于θ是递增的，当$\theta\geqslant\theta(t)$时关于θ是递减的，则相应的分布函数族

$$F(x,\theta)=\int_{-\infty}^{x} f(t,\theta)d\mu, \theta\in\Theta$$

关于参数θ是单调减小（增大）的。

证． 设$\xi(\theta)$的分布为F_∞，则分布族$\{F_\theta, \theta\in\Theta\}$受控于$(R^1,B^1)$上的Lebesque测度$\mu$。把定理应用于分布族$\{F_\theta, \theta\in\Theta\}$，便知推论2正确。此时$S(\theta)=1$，$\mu$－零测度集$N=\varnothing$。

二、常用分布函数族对参数的单调性1）

现在，分们将定理的两个推论应用于常用的分布函数族。

（一）二项分布的分布函数族

$$F(x,p)=\sum_{k\leqslant x} C_n^k p^k q^{n-k},\ p\in(0,1)$$

关于参数p是单调减小的。

证． 这里$p_k(p)=C_n^k p^k q^{n-k-1}, k=0,1,2,\cdots,n$，对p求导有

$$P_k'(p)=nC_n^k p^{k-1} q^{n-k-1}\left(\frac{k}{n}-p\right). \qquad (1)$$

令$p_k=\frac{k}{n}$，显然$\{p_k\}$是递增数列。由（1）可知，$p_k(p)$当$p\leqslant p_K$时递增，当$p\geqslant p_k$时递减。根据推论1，二项分布的分布函数族$F(x, p)$，$p\in(0, 1)$关于参数p是单调减小的。证毕。

（二）Poisson 分布的分布函数族

$$F(x,\lambda)=\sum_{k\leq x}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \lambda\in(0,+\infty)$$

关于参数λ是单调减小的。

证 这里$P_k(\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0, 1, 2, \cdots$，对$\lambda$求导有

$$P_k'(\lambda)=\frac{\lambda^{k-1}}{k!}e^{-\lambda}(k-\lambda). \qquad (2)$$

3） 下面关于态用分布函数族对参数的单调性结，论个别的在一些文献中以定理形武出现。

令$\lambda_k=k$，显然$\{\lambda_k\}$是递增数列。由（2）可知，$P_k(\lambda)$当$\lambda\leq\lambda_k$时递增，当$\lambda\geqslant\lambda_k$时递减。根据推论1，Poisson 分布的分布函数族 $F(x,\lambda)$，$\lambda\in(0,+\infty)$关于参数λ是单调减小的。证毕。

（三）超几何分布的分布函数族

$$F(x,M)=\sum_{k\leq x}C_M^k C_{n-M}^{n-k}/C_n^n,\quad M\in\{0,1,\cdots,N\}^{1)}$$

关于参数M是单调减小的[2]。

证． 这里$P_k(M)=C_M^k C_{n-M}^{n-k}/C_N^n$，因为有

$$C_M^k C_{n-M}^{n-k}-C_{M+1}^k C_{n-(M+1)}^{n-k}=\frac{n(M+1)-k(N+1)}{k(N-M)}C_M^{k-1}\ C_{n-M}^{n-k},$$

而$C_M^{k-1}\ C_{n-M}^{n-k}\geqq 0$.故当$M\leq\frac{k(N+1)-n}{n}$时

$$C_M^K\ C_{N-M}^{n-k}\leq C_{M+1}^k\ C_{N-(M+1)}^{n-k},\tag{3}$$

当$M\geqq\frac{k(N+1)-n}{n}$时

$$C_M^k C_{N-M}^{n-k}\geqq C_{M+1}^k C_{N-(M+1)}^{n-k}.\tag{4}$$

令$M_k=\frac{k(N+1)}{n}$，显然$\{M_k\}$是递增数列。由（3），（4）知，$P_k(M)$当$M\leqslant M_k$时递增，当$M\geqslant M_k$时递减。故根据推论1，超几何分布的分布函数族$F(x,M)$关于参数M是单调减小的。

（四）Γ—分布的分布函数族

$$F(x;b,p)=\int_{-\infty}^{x}p(t;b,p)dt,\quad b,p>0,$$

其中

$$P(t;b,p)=\begin{cases}\dfrac{b^p}{L(p)}t^{p-1}\ e^{-bt}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0\end{cases}$$

关于参数p是单调减小的[3]。

证． 当$t>0$时

1）$n<m$时，$C_n^m=D$

2）［4］中关于此结论，证明不能成立。

3）关于参数b是单调增加的这一事实，十分明显。

$$\frac{dP}{dp}=\frac{b^p}{\Gamma(p)}t^p e^{-bt}\left[\ln(bt)-\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}\right], \qquad (5)$$

因为$\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}$是递增的连续函数[5]，且

$$\lim_{p\to+0}\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}=-\infty, \quad \lim_{p\to+\infty}\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}=+\infty,$$

故当$t>0$时，方程

$$\ln(bt)-\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}=0$$

确定唯一的函数$p=p(t)$。显然$p(t)$是t的递增函数。由（5）可知

$$\frac{b^p}{\Gamma(p)}t^{p-1}e^{-bt}$$

当$0\leqslant p\leqslant p(t)$时递增，当$p\geqslant p(t)$时递减。于是由推论2，$\Gamma$-分布的分布函数族$\Gamma(x;b,p)$关于参数P是单调减小的。证毕。

（五）B-分布的分布函数族

$$F(x;p,q)=\int_{-\infty}^{x}p(t;p,q)dt, \quad p,q>0,$$

其中

$$p(t;p,q)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}t^{p-1}(1-t)^p, & 0<t<1,\\ 0; & 其它,\end{cases}$$

（1）关于参数 p 是单调减小的；

（2）关于参数 q 是单调增大的。

证 当$0<t<1$时，

$$\frac{dP}{dp}=\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}t^{p-1}(1-t)^{q-1}\left[\frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+q)}-\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}-\ln\frac{1}{t}\right]. \qquad (6)$$

因为

$$\frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+q)}-\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q}{(k+p)(k+p+q)}$$

是 p 的递减连续函数，又

$$\lim_{p\to+0}\left[\frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+p)}-\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}\right]=+\infty,$$

$$\lim_{p\to+\infty}\left[\frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+q)}-\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}\right]=0,$$

故对$0<t<1$，方程

$$\frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+q)}-\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)}-\ln\frac{1}{t}=0$$

确定唯一的函数$p=p(t)$。显然$p(t)$是t的递增函数。由（6）可知，函数

$$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}t^{p-1}(1-t)^{q-1}$$

当$0<t<p(t)$时关于p递增，当$p\geqslant p(t)$时关于p递减。于是由推论2，B-分布的分布函数族$F(x;p,q)$关于参数p是单调减小的。

类似地可证$F(x;p,q)$关于参数q是单调增大的。证毕。

我们研究了五种分布函数族对参数的单调性，目的在于说明定理的应用。其实还有很多其它分布函数族，如负二项分布函数族，正态分布函数族和χ^2-分布函数族等，它们关于参数的单调性也可用定理的两个推论来证明。对此，不再赘述了。

参考资料

〔1〕复旦大学数学系主编，《概率论与数理统计》，上海科技出版社，1961。

〔2〕P.R.哈莫斯著，王建华译，《测度论》，科学出版社，北京，1958。

〔3〕Halmos P.R.& Savage L.j.,Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics, Ann.Math.stat.,20 (1949),225—241.

〔4〕武汉大学数学系数学专业编，《高等数学（三）概率论与数理统计》。人民教育出版社，1974。

〔5〕菲赫金哥尔茨著，徐献瑜等译，《微积分学教程（二卷三分册）》，高等教育出版社，1954。

〔6〕Lehmann E.L.,Testing Statistical Hypotheses,John Wiley & Sons, Inc.,1959。

《九章算术》开立方术的代数意义
（《〈九章算术〉与刘徽》北京师大出版社　一九八二年

《九章算术》开立方术的代数意义

李　兆　华

《九章算术》[1]开立方术文简意赅。由于其中明确指出“复除，折而下”、“复除，折下如前”，可见，这是一个有一般性的法则。也就是说，不论立方根是多少位数，反复运用这一法则都可求出来。所以，有必要在一般情形下对这一法则加以论述。

今将开立方术的术文以及用近代符号表示筹算板上的算草对比胪列如下，然后对它的代数意义和历史价值加以说明。

“置积为实，借一算。”

实	N
借算	1

图　1

如图1，表示方程$X^3=N$，（N是正整数）。

“步之超二等，议所得”。

商	α_1
实	N
借算	$(10^3)^{n-1}$

图　2

设共步过（n－1）次（$n\geqslant 2$），表示方根有（n－1）＋1＝n位。每步一次，借算需每乘以10^3，因此步(n－1)次后，借算表示$(10^3)^{n-1}$。如图2表示方程

亦即$(10^{n-1}x_1)^3=N$

$$(10^3)^{n-1}\cdot x_1^3=N$$

议得$x_1=\alpha$为方根的第一位数，即初商。　(1)

“以再乘所借一算为法而除之”

商	α_1
实	$N-(10^3)^{n-1}\alpha_1^3$
法	$(10^3)^{n-1}\alpha_1^2$
中行	$(10^3)^{n-2}\alpha_1$
借算	$(10^3)^{n-1}$

图　3

“除已，三之为定法，复除折而下，以三乘所得数置中行，复借一算置下行，步之，中超一下超二等，复置议。”