

高等学校试用教材

河流动力学

(港口与航道工程专业用)

华东水利学院等四校合编

人民交通出版社

高等学校试用教材

河 流 动 力 学

(港口与航道工程专业用)

华东水利学院等四校合编

人 民 交 通 出 版 社

高等学校试用教材

河 流 动 力 学

(港口与航道工程专业用)

华东水利学院等四校合编

人民交通出版社出版

(北京市安定门外和平里)

北京市书刊出版业营业许可证出字第 006 号

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

人民交通出版社印刷厂印

开本: 787×1092 1/32 印张: 16.5 字数: 400 千

1981 年 6 月 第 1 版

1981 年 6 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数: 0001—4,800 册 定价: 1.75 元

内 容 提 要

本书共分十二章，分别阐述紊流、副流、泥沙特性、推移质运动、悬移质运动、异重流、河床演变基本原理、局部河段(河弯、汉道、浅滩)河床演变、河口动力条件及演变、河床演变分析、河床变形计算、河工模型试验等。对河流动力学的基本理论和分析计算方法做了概要的介绍。

本书在选材时充分考虑到专业的需要，顾及到与前后课程的衔接，并将各类公式加以分类归纳，便于学习，在一定程度上反映了国内外的研究成果。

本书为港口与航道工程专业的试用教材，亦可供有关专业的师生及工程技术人员参考。

本书由华东水利学院、大连工学院、天津大学、重庆交通学院等四院校合编，由华东水利学院陈国祥担任主编，各章编写人员为：第一、五章大连工学院虞和莹，第四、六章重庆交通学院邓伯强，第九章天津大学员瑛，第十二章华东水利学院王昌杰，绪言和第二、三、七、八、十、十一章华东水利学院陈国祥。本书由华东水利学院周耀庭审阅。

绪 言

河流动力学是研究河流在自然状态下以及受人工干扰时所发生的变化和发展规律的一门科学。天然河流总是处在不断变化和发展过程中。如平原地区的弯曲性河流，凹岸不断冲刷，凸岸不断淤积，曲率半径不断减小，河线不断扭曲，终至产生自然裁弯，以后又将重复上述演变过程。当在河流上兴建了各种工程建筑物或进行疏浚、整治以后，河床的变化和发展将更加剧烈和迅速。例如当河流上兴建大型水库以后，水库回水区将产生泥沙的淤积，水库下游将引起河床的冲刷，水库回水末端的河床也将产生一定的冲淤变化。河流的这些变化和发展对于沿河两岸的工农业生产以及国民经济各部门，特别是对于水利工程建设具有重大的影响。为了合理地利用和有效地整治河流，就必须充分地掌握它们的客观规律性，并对其在今后的发展趋势作出定性和定量的预测。

河流的变化和发展是水流与河床相互作用的结果。一条河流包括水流与河床这两个矛盾着的方面。水流作用于河床，使河床发生变化，河床又反过来作用于水流，使水流结构发生变化，二者相互依存，又相互斗争，从而推动着河流不断地变化和发展。水流与河床的相互作用是通过它们之间的泥沙交换来实现的。水流挟带泥沙，河床是由泥沙组成的，它们之间经常地产生泥沙的交换。一种情况下，通过泥沙的淤积使河床升高；另一种情况下，通过泥沙的冲刷使河床降低。泥沙运动是水流与河床相互作用的媒介。水流与河床间的泥沙交换又是受水流紊动结构所制约的。由于紊动交换作用，向上脉动水流从床面掀起泥沙颗粒并把它带到水流中去，而向下脉动水流则把一定数量的泥沙重新带向河底，水流紊动结构对泥沙运动有决定性的影响。因此，河流动力学研究的内容包括水流结构、泥沙运动、河床演变及河床变形预测等几个部分。它们是互相联系、互相渗透、不可分割的。

河流动力学是在人类与江河斗争实践的基础上诞生和成长起来的。河流两岸自古以来就是人类繁衍生息之所，河流对于人类的生产和生活具有重大的影响。但河流既有其有利的一面，也有其有害的一面。为了化害为利，人们不断地与河流进行不屈不挠的斗争。在长期斗争过程中，人们逐渐地加深了对河流的了解，积累了关于河流运动发展规律的知识，从而逐步地形成了一门新的学科——河流动力学。随着近代科学技术的进步和人们对河流认识的深化，这门学科日益发展和完善。我国古代在与江河作斗争方面有着辉煌的成就，特别在驯服黄河方面更是举世闻名。在长期的治河斗争中，我国人民积累了许多宝贵的经验，其中不少在今天仍不失其理论和实践意义。但在解放前这些经验得不到很好的总结。解放以来，随着社会主义建设事业的蓬勃发展，对江河的利用和治理日益广泛，河流动力学得到了迅速的发展。多年来，我们进行了大规模的河道观测工作，收集了大量极其宝贵的资料；开展了多方面的分析和计算工作，解决了生产实践中提出来的大量科学技术问题；建立了许多具有相当规模的实验室，取得了许多科学研究成果。

虽然如此，河流动力学还是一门新兴的学科，是正在发展中的学科。由于研究的问题比较复杂，现阶段科学技术水平还不可能完全从理论上求得解决，因此，在研究中就不得不问题作出某些假定，进行一定的简化，同时在实际工作中则广泛使用经验的或半经验的

方法。例如对于紊动结构问题，虽然已经作了许多理论研究，但往往只限于最简单的恒定、均匀、各向同性水流方面。又如在泥沙运动基本规律方面，近年来取得了较大的进展，但也只限于恒定的水流和均匀的泥沙方面。至于河床演变规律，则更是如此，一般只能进行定性的分析和粗略的估算。因此，学习这门学科时，必须依据辩证唯物主义的观点和方法，首先从实践出发，掌握第一性资料，对于各种矛盾的各个方面进行全面的了解，在这个基础上抓住主要矛盾进行理论分析和数学推导，求得实用的计算公式和结果，然后再回到实践中去，根据实际资料来检验所得结论的正确性，并逐步修正自己的结论，如此不断反复，不断提高。

河流动力学与港口及航道工程建设的关系是十分密切的。建设一个港口，首先要正确地确定港址。港址选择除了考虑国民经济建设的需要以及陆域条件外，还必需弄清河道的冲淤变化情况，尽可能选择冲淤变化不大的或冲淤变化正向着有利于港口建设方向发展的地方建港。如不能满足，应制定整治的措施。疏浚和整治航道首先要了解浅滩碍航情况和产生原因，为此必须充分掌握河床演变的规律，找出主要的影响因素，在此基础上拟定疏浚整治工程方案，使河床演变向着有利于通航要求的方向发展，只有这样才能收到事半功倍的效果。在河流渠化和运河工程建设中必须十分重视泥沙及河床演变问题，例如壅水区泥沙淤积问题、坝下游河床冲刷问题和船闸引航道冲淤问题等。否则，有可能产生严重的后果，从而影响到工程的效益甚至建筑物本身的安全。

本教材是根据港口与航道工程专业的教学计划及大纲编写的，内容取舍及章节编排力求符合专业的特点。全部内容共分四个单元十二章：第一单元为水流内部结构，包括紊流和副流二章；第二单元为泥沙运动基本规律，包括泥沙特性、推移质运动、悬移质运动和异重流四章；第三单元为河床演变特性，包括河床演变的基本原理、局部河段（河弯、汊道、浅滩）河床演变、河口动力条件及演变三章；第四单元为河床演变预测方法，包括河床演变分析、河床变形计算和河工模型试验三章。在教学过程中，可根据具体情况有所侧重。

目 录

绪 言

第一章 紊流	1
第一节 紊流的概念	1
第二节 紊流的基本方程	6
第三节 紊流的半经验理论	9
第四节 紊流流速分布	13
第五节 紊流阻力	19
第二章 副流	24
第一节 副流的概念	24
第二节 离心力副流	28
第三节 摩擦力副流	34
第四节 水流平面图	38
第三章 泥沙特性	43
第一节 泥沙的粒径和组成	43
第二节 泥沙的重率和干容重	45
第三节 泥沙的沉降速度	46
第四章 推移质运动	54
第一节 泥沙的起动	54
第二节 沙波运动	64
第三节 推移质输沙率	69
第四节 动床阻力	77
第五章 悬移质运动	82
第一节 床沙质和冲泻质	82
第二节 含沙量沿水深的分布	84
第三节 悬移质输沙率	94
第四节 含沙量沿程变化	103
第五节 总输沙率	105
第六章 异重流	109
第一节 异重流的一般概念	109
第二节 异重流的基本方程	112
第三节 河渠异重流	114
第七章 河床演变的基本原理	117
第一节 河床演变的基本概念	117
第二节 河床演变类型	119

第三节	河床稳定性和河相关系	130
第八章	局部河段的河床演变	136
第一节	河弯	136
第二节	汊道	148
第三节	浅滩	156
第九章	河口的动力条件及其演变	167
第一节	潮汐河口及其分类	167
第二节	河口区的水流特征	169
第三节	河口区的泥沙运动	180
第四节	河口区的河床演变	187
第十章	河床演变分析	194
第一节	河床演变分析的基本原则	194
第二节	河床冲淤变化分析	195
第三节	来水来沙和边界条件分析	200
第四节	水流泥沙运动特征分析	202
第五节	综合分析	204
第十一章	河床变形计算	211
第一节	纵向变形计算	211
第二节	细部变形计算	216
第三节	变形极限状态估算	219
第四节	潮汐河口变形计算	224
第十二章	河工模型试验	229
第一节	模型试验的基本原理	229
第二节	定床河工模型设计	233
第三节	动床河工模型设计	240
第四节	模型操作和资料整理	254

第一章 紊 流

河渠水流一般都是紊流。水流是泥沙运动的动力，水流流速场和水流紊动有密切联系，水流挟带的泥沙更是靠着水流中紊动漩涡的支持才能维持其悬浮状态。因此，分析泥沙运动与河床演变规律之前，必须首先了解紊流的物理本质和它的计算方法。

水流紊动现象是一个十分复杂的课题，虽然已进行过许多研究，提出了不少理论，但从工程实用观点看，还只有古典理论——普朗特 (Prandtl, L.) 理论得到广泛的应用，其他的理论尚难以用来解决实际问题。同时，由于紊流问题的复杂性，在明渠水流方面，也只有二元均匀流才有半经验的理论解。

本章主要介绍紊流的概念，紊流的基本方程、古典的紊流理论，以及据此建立起来的明渠均匀流的流速分布和阻力的计算公式。

第一节 紊流的概念

一、层流与紊流

从水力学课程中已经知道，紊流和层流是两种不同的流动状态。为了说明紊流的特征，还是引用雷诺 (Reynolds, O.) 试验。雷诺试验装置如图1-1。

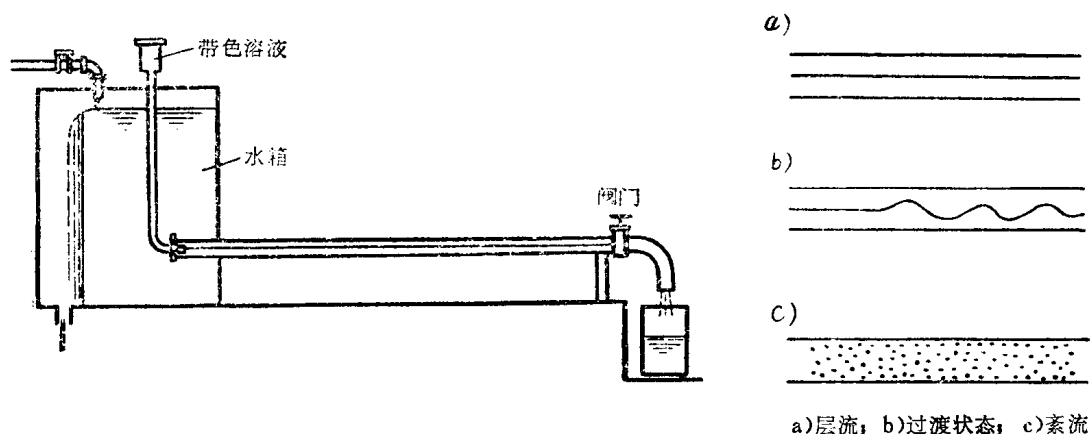


图1-1 雷诺试验装置

将阀门慢慢打开，在流速较低时，带色溶液呈直线流过水管，不和周围液体相混，清晰可辨，如图1-1中a)，这是层流。阀门再开大一些，流速渐渐增加，大到一定程度以后，带色的直线开始失去稳定，发生扭曲，如图1-1中b)。阀门进一步开大，流速继续增大，管中出现许多大大小小的漩涡，随之，带色溶液扩散遍布全管，不能再分辨，水流就整体来说尽管稳定地流向出口，但其中任一点的运动轨迹却显得十分杂乱无序，随时随地都在变化，如图1-1中c)，这就是紊流。图1-1中的b)是由层流向紊流过渡的过渡状态。

紊流最基本的特征是：即使在流量不变的情况下，流场中任一点的流速和压力也随着时间呈十分不规则的脉动。图 1-2 是实测的某点纵向流速随时间的变化。

从图上可以看出，任一时间 t 的流速可表示为

$$u = \bar{u} + u'$$

式中： u ——瞬时流速；
 $\bar{u}$ ——时均流速；
 u' ——脉动流速。

在恒定流中， $\bar{u}$ 是一个不随时间而变化的量。 u' 的时均值为零，即

$$\bar{u'} = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0$$

式中： T ——时段。

其次，紊流具有扩散性质，能把带色溶液扩散到全管，使它和管中不带色的水体充分混和在一起。由于紊流的这种扩散作用，就能够在水层之间传递动量、热量和质量。

虽然在明渠水流中，脉动流速不超过时均流速的百分之几，但它对整个流动却有决定性的影响。紊流的流速分布远比层流的流速分布均匀，紊流的阻力常为层流阻力的好几百倍。

二、脉动强度

脉动流速有大有小，有正有负。为了比较不同点的水流脉动的强弱，常用脉动流速的均方根来表示其脉动强度。

设一空间流场中，任一点的瞬时流速的三个分量分别为 u 、 v 、 w ，则

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$w = \bar{w} + w'$$

把瞬时脉动流速 u' 、 v' 、 w' 分别平方、求和、平均、再开方，就得出它们各自的脉动强度 $\sigma_{u'}$ 、 $\sigma_{v'}$ 、 $\sigma_{w'}$ ，即

$$\sigma_{u'} = \sqrt{\overline{u'^2}}$$

$$\sigma_{v'} = \sqrt{\overline{v'^2}}$$

$$\sigma_{w'} = \sqrt{\overline{w'^2}}$$

脉动强度具有速度的因次。

也可以用相对脉动强度 $\frac{\sigma_{u'}}{u_*}$ 、 $\frac{\sigma_{v'}}{u_*}$ 、 $\frac{\sigma_{w'}}{u_*}$ 来表示脉动的强弱。式中 u_* 叫做摩阻流速或切力流速，具有速度的因次。所以相对脉动强度是一个无因次的量。

图 1-3 中 a)，b) 是在宽深比很大的明渠均匀流中心线处测到的脉动强度沿水深的分布。图 1-4 是在扁矩形管中间部分测到的空气流脉动强度从管中心到管壁的分布。图上的

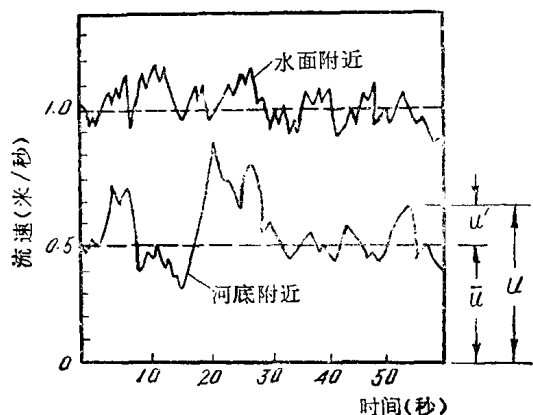


图 1-2 实测的瞬时流速图

$\overline{u'v'}$ 是在某一点同时测到的 u' 和 v' 的乘积的时均值。以后将要证明，它相当于该点的紊动切应力 τ ($\tau = -\rho \overline{u'v'}$)。图上 η 为距边壁的相对高度。

从图1-3和图1-4可见，在矩形管气流中测到的结果和在明渠水流中测到的结果有共同的规律性。它们的特性可归纳如下：

1) $\frac{\sigma_{v'}}{u_*}$ 值从水面到河底逐渐增大，在河底附近达最大值。从最大值处向河底又逐渐减小。

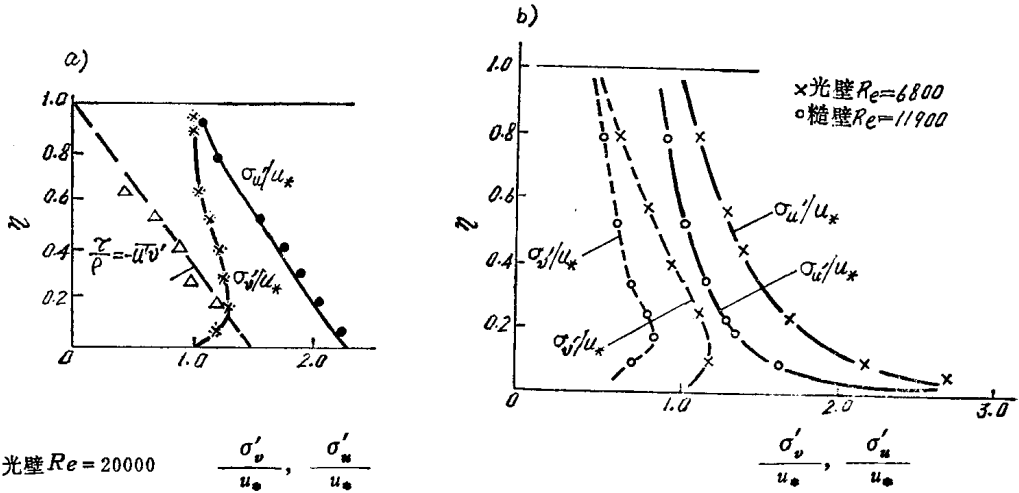


图1-3 明渠脉动强度沿水深分布
a)1952年实测资料；b)1969年实测资料

2) $\frac{\sigma_{v'}}{u_*}$ 值的分布和 $\frac{\sigma_{u'}}{u_*}$ 值的分布趋势一样，但是前者从水面向河底增大的速度较慢，其分布比较均匀，可近似地取其垂线平均值作代表。

3) $\frac{\sigma_{u'}}{u_*}$ ， $\frac{\sigma_{v'}}{u_*}$ 及 $\overline{u'v'}$ 各值的分布是随着雷诺数及河底粗糙度而变化的。光滑底的相对脉动强度较粗糙底的大一些。

4) $\overline{u'v'}$ 值从水面到河底附近呈直线变化。在水面处， $\overline{u'v'}$ 值为零。
脉动流速不仅有大有小，而且它们出现的频率也有高有低。脉动流速大的，出现的频率

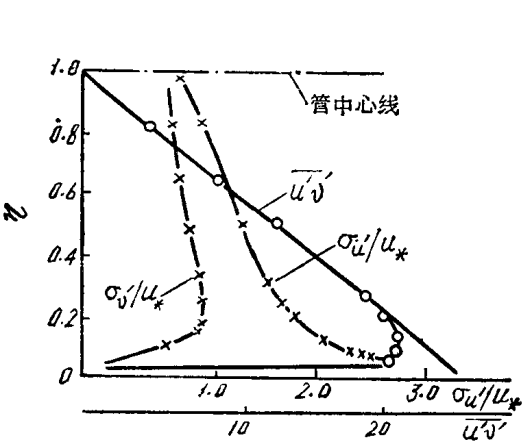


图1-4 矩形管、光壁，气流脉动强度分布(1938)
 $R_e = 6000$

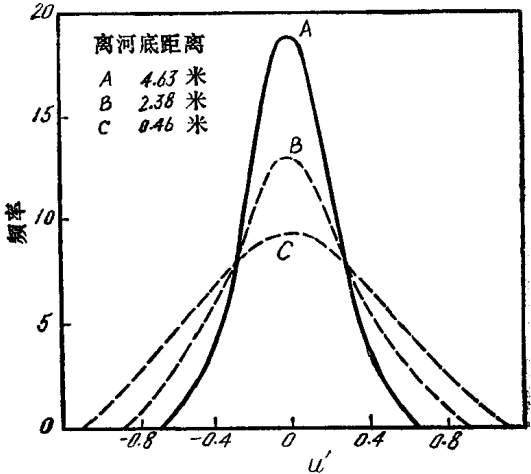


图1-5 距河底不同距离处脉动流速及其出现频率的关系曲线

低；脉动流速小的，出现的频率高。如果以脉动流速为横坐标，出现频率为纵坐标，就可以根据实测的流速资料绘制脉动流速与其出现频率的关系曲线，如图1-5。

脉动流速的频率（概率）符合高斯（Gauss）正态分布规律，并可用下式表示

$$f(u') = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{u'}} e^{-\frac{u'^2}{2\sigma_{u'}^2}}$$

式中： $f(u')$ ——脉动流速 u' 出现的概率。

三、紊动漩涡

紊流中作脉动的不是单个水质点，而是互相有关的水质点聚合成的水团。水团有大有小，并且在运动过程中不断地分裂、聚合。随着这些变化，水团的大小也不断地发生变化。这样的水团一般称为紊动漩涡。在用特殊方法拍摄的照片上，可以把紊动漩涡清楚地显示出来。图1-6是摄影机在不同移动速度下拍摄的照片。

紊流中充满着这种大小不同的紊动漩涡，既有上下、左右、前后的运动，又有旋转运动。紊动漩涡的尺度可以根据脉动值的测量数据，用紊流统计理论的方法来确定，具体方法这里不予介绍。下面介绍有关紊动漩涡的一些基本概念。

紊动漩涡和脉动流速是密切联系着的。脉动流速值有大有小，频率有高有低，可以推断紊动漩涡的尺度也必然有大有小。脉动流速大的，漩涡尺度也大，脉动流速小的，漩涡尺度也小，并且大尺度紊动漩涡的脉动频率低，小尺度紊动漩涡的脉动频率高。

图1-7是管流中的紊动漩涡示意图，是摄影机以与平均流速相同的速度和方向，从左向右移动拍摄成的。可以看出图上有不同尺度的漩涡。靠近管壁处有许多小漩涡，其中有些漩涡向管中心运动，离开管壁稍远处有大漩涡，大漩涡中夹杂了许多小漩涡，在大的和小的漩涡间还有中级漩涡。这些大尺度漩涡本身又是不稳定的，它将分解为次一级的漩涡，这样的作用继续下去，一直分解到不能再分的小漩涡为止。

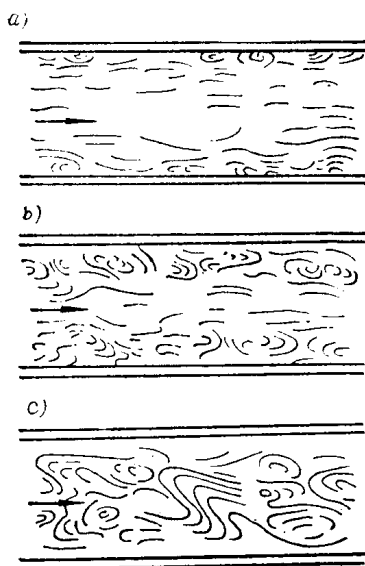


图1-6 摄影机在不同移动速度下拍摄的紊动漩涡照片
摄影机移动速度（厘米/秒）：a)12.15；b)20.0；c)25.0

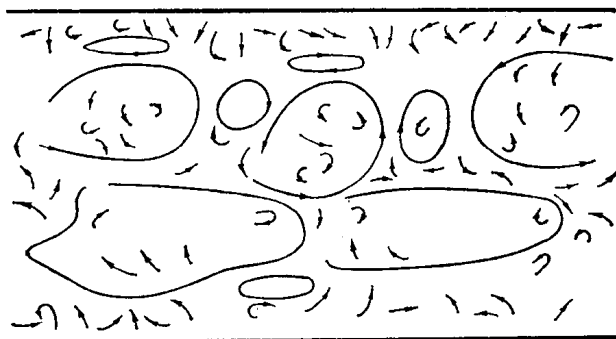


图1-7 管流中的紊动漩涡示意图

根据柯尔摩戈洛夫（А.Н.Колмогоров）的设想，把紊流中不同尺度的漩涡看成由三个主要部分组成。其中大尺度漩涡占全部能量的20%，像储藏能量的仓库。大尺度漩涡从时均

水流中取得了紊动动能，然后向次一级漩涡发送能量。最低级的小漩涡自上一级漩涡取得了能量，通过粘性作用又把这些能量消耗为热能。可以看出，介于大小漩涡间的中级漩涡，起了传递能量的作用。中级漩涡的尺度与混和长度相近。（关于混和长度的概念将在第三节中介绍）

四、紊流的发生

水流中的紊动是怎样发生的呢？大概可以分为三种情况。

第一种情况是水流很快流过固体边界，边界是静止的，水流是运动的。当固体表面相对比较光滑时，如图 1-8 所示，由于靠近边界处的流速梯度较大，受到任何扰动，层流就会失去稳定而产生漩涡，正如波高达到一定高度就会破碎而产生浪花一样。

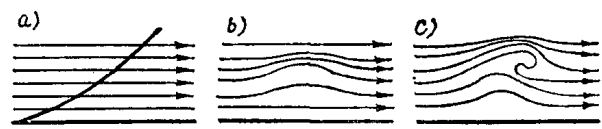


图1-8 光壁紊流的发生

a)层流；b)受到扰动，流线略有波动；c)流线扭曲而产生漩涡

扰动使流线发生弯曲，如图1-8中 b)。这样，在流线密集的地方，流速大压力小，在流线稀疏的地方，流速小压力大。形成的压力差，进一步使流线发生扭曲，如图1-8 中 c)。最后终于产生一连串的漩涡，使层流转变为紊流，如图1-9中之 a)。以上是光壁的情况。

在天然河流中，河床表面高低不平，在突出床面的泥沙颗粒后面，水流会发生程度不同的分离，在分离面上卷起漩涡，如图1-9中 b)，这是糙壁的情况。因此，河床周界都是产生紊动漩涡的场所。

在河床周界附近一旦产生漩涡后，它和周围水流的相互关系如图 1-10 所示。在漩涡顶部，其旋转分速 u_r 与当地水流流速方向一致；而漩涡底部则相反。由此形成的流速水头差产生了向上的压差，使漩涡离开河底上升。与此同时，漩涡还被水流带向下游。就这样，来自河底的漩涡逐渐扩散遍布全部水流，使整个水流都具有紊动的特征。漩涡在河床周界刚产生时，其尺度受到空间的限制，在上升过程中，直径逐渐增大。如前所述，大尺度、高转速的漩涡本身是不稳定的，它们会崩溃分解为次一级的漩涡，直到最小一级漩涡通过粘性作用转化为热能而消失。大尺度漩涡是挟带泥沙离开河底进入主流区，使泥沙悬浮的主要动力。

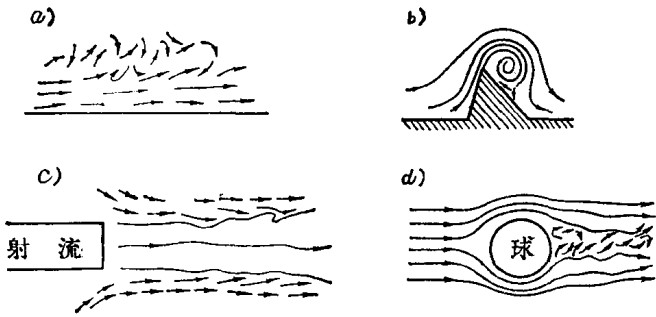


图1-9 紊流发生的三种情况

a)、b)第一种情况；c)第二种情况；d)第三种情况

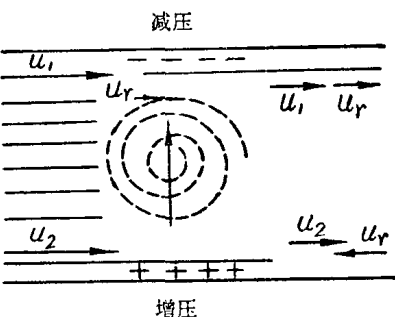


图1-10 漩涡脱离河床表面进入主流区的机理

第二种情况是两种不同速度的液体相接触，在接触面上的流速梯度也可产生漩涡。图 1-9 中 c)是管中射出的高速水流，流经缓慢流动或静止液体时，产生漩涡的情况。

第三种情况是水流绕过物体或物体在静水中运动时，在物体背面，水流发生分离而产生漩涡，如图1-9中 d)。

第二节 紊流的基本方程

流体由层流转为紊流后，其物理性质没有发生任何变化，连续介质的假设仍然适用。所以，不可压缩粘性流体运动方程——耐维埃-司托克斯 (Navier-Stokes) 方程和连续方程仍然可以用来描述紊流运动，只是方程式中的流速分量要代之以紊流的瞬时流速分量，并取其时间平均值。

在推导紊流的连续方程和运动方程以前，先介绍时间平均值的计算公式。

若设 f, g 是两个瞬时变量， s 表示独立变量，（符号顶上加短横“—”表示取时间平均值）则有下列计算公式：

$$\begin{aligned}\overline{f+g} &= \overline{f} + \overline{g} \\ \overline{f \cdot g'} &= 0 \\ \overline{f \cdot g} &= \overline{f} \cdot \overline{g} \\ \frac{\partial \overline{f}}{\partial s} &= \overline{\frac{\partial f}{\partial s}} \\ \int \overline{f} ds &= \overline{\int f ds}\end{aligned}$$

一、连续方程

不可压缩粘性流体连续方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1-1)$$

将瞬时流速 $u = \overline{u} + u'$, $v = \overline{v} + v'$, $w = \overline{w} + w'$ 代入上式，再取时间平均得

$$\frac{\partial (\overline{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{v} + v')}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{w} + w')}{\partial z} = 0$$

展开得

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} = 0$$

因为

$$\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = 0$$

所以

$$\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} = 0$$

故得

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \quad (1-1')$$

式(1-1')就是紊流的连续方程，它与粘性流体的连续方程是完全相同的。

二、运动方程

不可压缩粘性流体运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} \right) \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial z} \right) \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

式中: X ——单位质量力在 x 轴上的投影;

Y ——单位质量力在 y 轴上的投影;

Z ——单位质量力在 z 轴上的投影;

ρ ——流体密度;

p ——理想流体动压力;

$\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \sigma'_{zz}$ ——粘性流体轴向变形引起的附加法向应力。第一个脚标表示力作用面的法线方向, 第二个脚标表示力的作用方向;

$\tau'_{yx}, \tau'_{yz}, \tau'_{xy}, \tau'_{xz}, \tau'_{zx}, \tau'_{zy}$ ——粘性流体剪切变形引起的附加切应力。第一个脚标表示力作用面的法线方向, 第二个脚标表示力的作用方向。

附加法向应力和附加切应力统称粘滞应力。

方程式(1-2)可改写成下列形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (uw)}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial (vu)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial (vw)}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial (wu)}{\partial x} + \frac{\partial (wv)}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

式中: μ ——动力粘滞系数。

式(1-3)称为耐维埃-司托克斯方程式。

现以式(1-3)中第一个方程为例, 介绍取时均值的运算。将压力和流速分量的瞬时值代入方程式各项, 并取时间平均, 则可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} &= \frac{\partial (\overline{(u+u')^2})}{\partial x} = \frac{\partial (\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + \overline{u'^2})}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{u'^2})}{\partial x} \\ \frac{\partial \overline{(uv)}}{\partial y} &= \frac{\partial (\overline{(u+u')(v+v')})}{\partial y} = \frac{\partial (\overline{uv + uv' + vu' + u'v'})}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \overline{(uv)}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{(u'v')}}{\partial y} \\ \frac{\partial \overline{(uw)}}{\partial z} &= \frac{\partial (\overline{(u+u')(w+w')})}{\partial z} = \frac{\partial (\overline{uw + u'w + uw' + u'w'})}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \overline{(uw)}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{(u'w')}}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}$$

经整理可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u} \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u} \bar{w})}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial (\bar{u}')^2}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}' \bar{v}')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}' \bar{w}')}{\partial z} \right) \\ = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

根据乘积求导的规则, 并考虑到连续方程式(1-1), 有

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u} \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u} \bar{w})}{\partial z} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

于是可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \\ - \left(\frac{\partial (\bar{u}')^2}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}' \bar{v}')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}' \bar{w}')}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

同样可求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) \\ - \left(\frac{\partial (\bar{u}' \bar{v}')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}')^2}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v}' \bar{w}')}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \\ - \left(\frac{\partial (\bar{u}' \bar{w}')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}' \bar{w}')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{w}')^2}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

对于恒定流, 有

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = 0$$

则上列三个方程式简化为

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial (\bar{u}')^2}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}' \bar{v}')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}' \bar{w}')}{\partial z} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial (\bar{u}' \bar{v}')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}')^2}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{v}' \bar{w}')}{\partial z} \right) \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial (\bar{u}' \bar{w}')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}' \bar{w}')}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{w}')^2}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式(1-4)就是紊流的时均运动方程式。

现将式(1-4)改写成由应力项表示的形式。考虑到连续方程式，将式(1-4)中分别加上一项

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right] \\ & -\frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right] \\ & -\frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

就可得下式

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \rho(\bar{u}')^2}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial y} - \frac{\partial \rho(\bar{u}'\bar{v}')}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \rho(\bar{u}'\bar{w}')}{\partial z} \right) \right] \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \rho(\bar{u}'\bar{v}')}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \rho(\bar{v}')^2}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial z} - \frac{\partial \rho(\bar{v}'\bar{w}')}{\partial z} \right) \right] \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \rho(\bar{u}'\bar{w}')}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \rho(\bar{v}'\bar{w}')}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial \rho(\bar{w}')^2}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \right\} (1-4')$$

这就是雷诺方程式。 $\rho(\bar{u}')^2$, $\rho(\bar{v}')^2$, $\rho(\bar{w}')^2$, $\rho\bar{u}'\bar{v}'$, $\rho\bar{u}'\bar{w}'$, $\rho\bar{v}'\bar{w}'$ 均具有应力的因次，其中前三项是由于紊动作用产生的附加法向应力，后三项是由于紊动作用产生的附加切应力，统称为紊动应力，又称为雷诺应力。

从以上分析可得如下结论：紊流的时均流速分量是满足粘性流体运动基本微分方程式的，只要在分析流体微块上的作用力时，分别增加一项雷诺法向应力和雷诺切应力，就可像分析层流一样分析紊流的时均流动。这就是说，在流量一定时，虽然紊流在性质上仍是不恒定的，但考虑了紊动应力后，紊流就可以作为恒定的时均运动来处理。

一般紊动应力比粘滞应力大得多。在许多实际问题中，常可忽略粘滞应力而得到满意的结果。

雷诺方程虽然能够正确地描述紊流运动，但由于在四个方程式中共有十个未知量（三个时均流速分量，一个时均压强和六个雷诺应力分量）因此是一个不封闭的方程组。为了求解，还必须采用一些补充假定，求得一些补充的关系式。这些关系式都是针对雷诺应力给出的。

第三节 紊流的半经验理论

为了确定雷诺应力，许多学者进行了大量的工作。其中比较著名的有普朗特的动量交换理论，泰勒 (Taylor, G.I.) 的漩涡传递理论，卡门 (von Karman, T.) 的相似理论等，尤以普朗特的动量交换理论应用最广。下面就简要介绍这一理论的主要概念和结论。

只讨论恒定、沿程均匀的二元平行紊流，此时雷诺方程将大大简化。令 x 轴与时均流平