排队论及其程序设计

张福德 编著

吉 林 大 学 出 版 社

排队论及其程序设计

张福德　编著

吉 林 大 学 出 版 社

排队论及其程序设计

张福德　编著

吉林大学出版社出版　长春市第五印刷厂印刷

吉林省新华书店发行

787×1092　32开　5.937印张和近20个程序　128,000字

1985年9月第1版　　1985年9月第1次印刷

印数：1—21,000册

统一书号：13323·6　　定价：1.70元

编著者说明

排队论也称随机服务系统论，是运筹学的一个分支。在生产活动和日常生活中有各种各样的随机服务系统，经常会迂到有形或无形的排队现象。在某一期间内要求服务顾客的数量超过服务机构（窗口、服务台等）的容量时，就会出现排队现象。由于顾客到达和服务时间的随机性以及各服务窗口的有限性，排队现象几乎是不可避免的，通过研究各种排队系统的概率规律性，建立适当的排队模型，根据排队论进行分析，即可对随机服务系统进行最优设计和控制。因此，深入研究排队论具有重要现实意义。

本书分为排队论和随机模拟两章：第一章、排队论及其BASIC 程序，介绍了 M/M/1（∞）、M/M/C（∞）、M/M/1（N）、M/M/C(N)、M(N)/M/1、M(N)/M/K、M/G/1（∞）等排队系统。各排队系统均有数学模型、BASIC 程序、数值举例、试算数据和打印结果，并附有部分例题与题解。第二章、随机模拟及其 BASIC 程序，以一般排队系统为例编出各种排队系统模拟的 BASIC 程序，本章介绍了单一窗口、多窗口和串联多窗口排队系统模拟模型，各模拟模型均有 BASIC 程序清单、数值举例、试算数据和打印输出结果。

本书由浅入深，有系统性。其特点在于使用较简单易懂的 BASIC 语言，利用小巧灵活、便利可靠、普及较广的微型电子计算机，处理和解决各种排队系统及其模拟问题。

本书可供系统工程、运筹学、计算机应用、工业企业管理、技术经济、商业企业会计统计，军事系统工程等方面的专家、管理人员、技术人员和大专院校师生等参考。

编著者水平有限，错误难免，欢迎读者批评指正，如本书能对读者有所裨益，编著者将感到欣慰。

一九八四春节　于长春

目　　录

第一章　排队论及其 BASIC 程序

引　言

排队论（Queueing Theory）也称随机服务系统理论、在生产活动和日常生活中有各种各样的随机服务系统，经常会遇到许多有形或无形的排队现象。例如，到火车站售票口买票的旅客，到理发店理发的顾客，到医院就诊的患者，到商店购买商品的用户，早晚上下班时乘坐公共汽车电车的职工，常常都需要排队等候，才能得到或接受服务。医生到患者家往诊，修理工到各车间去修理机床，推销员访问用户，从前道工序流送来的待加工的在制品，电子计算机中心处理来自各终端的上机作业，也是一类排队问题。还有电话的传呼与交换台占线问题、水库水量的调节问题、车站、码头等交通枢纽的车船堵塞和疏导问题等等，都可以作为排队问题进行研究。

在出现排队的情况下，将希望得到某种服务的一方称为顾客，将开展服务工作的一方，例如服务机构、服务柜台、服务员和服务窗口等称为窗口（也可统称为服务台）。从顾客来说，都希望得到及时服务，尽量不排队等候或少排队等候；从窗口来说，拥挤状态要比空闲状态好一些，拥挤可以提高窗口的利用率。不管怎么说，由于顾客到达和服务时间具有随机性，以有限的窗口开展服务工作，排队现象几乎是

不可避免的，各种拥挤现象会经常发生。也就是说，在某时刻要求服务的顾客量超过服务窗口的容量时，在允许等候的情况下，必然出现排队现象。排队论是研究拥挤现象的一门学科。

为了更好地开展服务工作，一方面要增加窗口数量、缩短窗口服务时间，从而减少顾客的等待时间；另一方面要在保证适当收益的条件下，减少窗口的空闲时间、确定最适当的窗口数，以期提高服务质量、降低服务成本，确定最优随机服务系统。

第一节　排队论的基本知识

排队过程的一般模型如图 1 所示。图 1 表明，在某服务窗口，来自顾客源的每位顾客到达服务窗口前，按照排队规则排队等候服务，窗口按照服务规则开展服务工作，顾客接受服务之后就离开。图 1 中的排队结构指队列的数目和排列方式，排队规则和服务规则是说明顾客在排队系统中按什么规则，以什么次序接受和开展服务的。

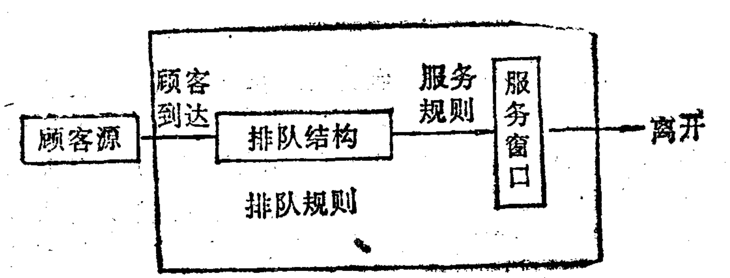

图 1　排队过程的一般模型

一、排队系统三要素

一般排队系统具有三要素，即顾客、排队规则和窗口。

1．顾客

顾客的来源和到达排队系统的情况是多种多样的。顾客源（也称为顾客总体）可能是有限的，也可能是无限的。顾客到达的方式可能是连续的，也可能是离散的，可能是一个一个的，也可能是成批的或大量的。顾客相继到达的间隔时间可以是确定型的，也可以是随机型的。顾客的到达可以是相互独立的，也可以是相互关联的等等。

顾客到达排队系统的过程也称为输入过程。如果描述顾客相继到达的间隔时间分布和所含参数（如期望值、方差等）都与时间无关，则称为平稳（Stationry）输入过程，否则称为非平稳输入过程。一般来说，平稳输入过程可利用数学模型求解，而非平稳输入过程难以进行数学处理，需要利用模拟模型求解。

2．排队规则

（1）即时制和等待制

顾客到达时，如所有窗口都在工作，顾客可以当即离去，也可以排队等候。当即离去的称为即时制或称损失制（Lossing System），如普通市内电话的呼叫属于即时制；排队等候的称为等待制（Waiting System），如登记市外长途电话的呼叫属于等待制。很明显，损失制将失掉许多顾客。

（2）等待制的服务规则种类

等待制根据为顾客进行服务的次序分为如下几种服务规则：

①先到先服务。这是一般的、常见的服务规则，即按到达的先后次序接受服务，先到达的顾客先接受服务。

②后到先服务。即后到的顾客先接受服务。例如在有的流水装配线上，后到的零部件先装配；在情报系统中，最新得到的信息往往最受重视或最先得到使用等。

③有优先权的服务。如旅客列车，带小孩者或老弱病残者先乘车、医院对重患者或急诊患者予以优先治疗、重要电话优先接通等。

④随机服务。这是指窗口（如工作人员）随机选取某一顾客进行服务，不管顾客到达的先后顺序，如电话交换台接通呼叫电话的服务就是随机服务。

（3）排队空间

排队空间可以是具体的，也可以是抽象的。有的排队空间有容量限制，即允许排队的顾客数是有限制范围的有的排队空间没有容量限制或可以看成是无限的，即认为容量无限大。

（4）队列数目

排队队列有单列和多列之分。顾客排队后由于等候时间过长而中途离队，但也有不允许中途离队的情况，这种情况就必须坚持到服务完为止。在多队列排队情况下，各队列之间的顾客有的可以互相转移，有的不允许转移。

3．窗口

窗口有单一窗口和多窗口。多窗口有串联式和并联式。服务方式可以对单独顾客进行，也可以对成批顾客进行，服务时间有确定型和随机型，服务时间的分布有平稳分布和非平稳分布等等。

二、排队系统模型的分类

排队系统模型根据 D. G. Kendall 提出的分类方法进行分类。此方法的分类格式如下：

X/Y/Z

其中：

X　表示顾客相继到达间隔时间的分布

Y　表示服务时间的分布

Z　表示并列窗口的数目

也就是说，D. G. Kendall 分类方法是以排队系统中的主要特征，即顾客相继到达间隔时间的分布、服务时间的分布和系统内并列窗口数对排队模型进行分类的。

表示相继到达间隔时间分布（X）和服务时间分布（Y）的各种分布分别采用下列符号：

M　表示负指数分布或普阿松分布，随机排队模型称为马尔科夫型，即Markov type，取其字头为M。

G　表示一般（General）随机分布。

D　表示确定型（Deterministic）分布。

Ek　表示 k 阶爱尔朗（Erlang）分布。

比较常见的有下列排队模型：

1. M/M/1(∞)
2. M/M/C(∞)
3. M/M/1(N)
4. M/M/C(N)
5. M(N)/M/1
6. M(N)/M/K
7. M/G/1(∞)

8. $M/D/1(\infty)$

9. $M/E_k/1(\infty)$

三、系统特性量

系统特性量是排队系统的各项基本数量指标。求解排队问题就是计算该排队系统的特性量，研究该系统的状态，以便分析系统运行效率，估计系统服务状况，确定系统特性量的最优值，对系统实行最优设计、最优运营或最优控制。

对于不同类型的排队系统，其系统特性量也将有些不同，究竟各排队系统中需要计算哪些系统特性量，本书将在有关内容中详细介绍。这里将排队系统中基本的、主要的系统特性量列举如下：

1. 系统内的顾客总数，这个特性量也简称队长。其平均值（期望值）用 L表示。

2. 系统内排队等待的顾客数，也称排队队长，其平均值用 L_q 表示。

在任何排队系统中，系统内的顾客总数都等于排队等待的顾客数与正在接受服务顾客数的总和。

3. 顾客在系统内的时间，这是顾客在系统内停留的总时间，简称停留时间，其平均值用W表示。

4. 顾客在系统内的等待时间，这是顾客进入系统后排队等待时间，简称等待时间，其平均值用 W_q表示。

一般来说，系统中窗口服务时间是给定的。在任何排队系统中，顾客在系统内的等待时间都等于顾客排队等待时间与接受服务时间的总和。

5. 顾客到达时不必等待就接受服务的概率，用 P_0 表示。

6. 系统内有n位顾客的状态概率，用 P_n 表示。

还有其它系统特性量，如顾客不能进入系统、系统已超员的概率，有效到达率（λ_{eff}）等等。

在研究实际排队问题时，首先要确定该问题属于哪一类排队系统的问题，然后即可根据相应排队系统提供的数学模型及其 BASIC 程序，利用微型机，计算其各项系统特性量。

本书对所研究的各排队系统，首先说明其所属类型，然后建立数学模型，提供计算系统特性量的公式，给出数值举例，编制出求解计算系统特性量的 BASIC 程序，列举试算数据，列出输入数据与输出数据打印结果清单。

本书提供的程序，均在微型机上调试通过。

第二节 排队统 M/M/1(∞)

排队系统M/M/1(∞)表示顾客的到达服从参数λ为的普阿松分布（Poisson distribution），即输入过程为普阿松流，接受完服务的顾客和到达的顾客相互独立，服务时间分布是参数为 1/μ 的指数分布（Exponential distribut-

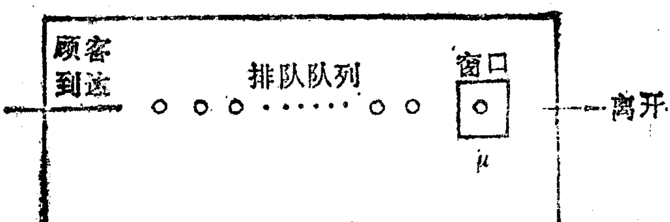

图2 排队系统M/M/1（∞）

ion)。这说明顾客的到达和服务都是随机的，窗口为一个，排队空间是无限的，符号（∞）表示在窗口前可以无限地排队，此排队系统如图 2 所示。

一、M/M/1（∞）系统状态方程

以 E_n 表示在M/M/1（∞）系统内有 n 位顾客时的状态。取很短的时间Δt，在这段很短的时间内对于有两名或两名以上顾客接受服务以及有两名或两名以上顾客到达的情况均不加考虑。这样，从时刻 t 到 Δt 时间后的时刻即在$(t+\Delta t)$的瞬时，E_n 所处状态为下列状态之一：

（1）在时刻 t 内为E_{n-1}状态，在Δt时间内有一位顾客到达。

（2）在时刻 t 内为 E_n 状态，在 Δt 时间内，顾客未到达，服务也未完。

（3）在时刻 t 内为E_{n+1} 状态，在 Δt 时间内，顾客未到达，服务已结束，减少了一位顾客。

在时间$(t,\ t+\Delta t)$内，有一位顾客到达系统的概率为$\lambda\Delta t$，有一位顾客接受完服务后离开的概率为 $\mu\Delta t$，则未有顾客到达、服务也未完的概率为：

$$(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t)=1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t+\lambda\mu\Delta t^2\approx 1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t\quad(\text{设}\Delta t^2\approx 0)$$

因此，在时刻$(t+\Delta t)$内，E_n 状态发生的概率 $p_n(t+\Delta t)$是（1）、（2）、（3）状态中任一状态发生的概率之和，即

$$P_n(t+\Delta t)=\lambda\Delta tP_{n-1}(t)+(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t)P_n(t)+\mu\Delta tP_{n+1}(t)\qquad(1)$$

先把（1）式右边的 $\lambda\Delta tP_{n-1}(t)$项移项到左边，再用

Δt 去除两边，如设$\Delta t \to 0$，则根据微分定义得：

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

从而推导出如下微分差分方程式：

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=\lambda P_{n-1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t)+\mu P_{n+1}(t) \tag{3}$$

当$n \geqslant 1$时，则有（3）式成立；当$n=0$时，由于与E_{n-1}状态对应的事件不存在，因此有：

$$P_0(t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t)P_0(t)+\mu\Delta t P_1(t)$$

与前面同样处理，则得：

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t) \tag{4}$$

如给定初始条件，根据（3）式和（4）式即可求解$P_n(t)$，这里的P_n是与t无关的平稳状态下的P_n，即

$$P_n=\lim_{t \to \infty}P_n(t)$$

将（3）式和（4）式中的$P_n(t)$、$P_0(t)$、$P_1(t)$分别改写为P_n、P_0、P_1，会其导数为0，则得如下平稳状态的差分方程式：

$$-\lambda P_0+\mu P_1=0 \tag{5}$$

$$\lambda P_{n-1}-(\lambda+\mu)P_n+\mu P_{n+1}=0 \tag{6}$$

$$(n \geqslant 1)$$

令$\rho=\lambda/\mu$，$\rho<1$。将ρ代入（5）式和（6）式，求解P_n，则得：

$$P_n=\rho^n P_0 \quad (n \geqslant 1) \tag{7}$$

为了确定P_0的值，可利用所有概率之和为1的条件，即