

土工原理与计算

下 册

华东水利学院土力学教研室主编

水利出版社

内 容 提 要

本书系统地总结和介绍了国内外在土力学重要领域内新的理论和计算方法。

全书分上、下两册。本书为下册，内容包括：土体极限平衡理论；水闸地基与基础计算中的几个问题；地基处理；砂土液化；土工抗振试验与计算；波动方程在桩的性状分析中的应用；概率论与统计学在土工问题中的应用等。

本书可供建筑、水利、铁道、交通等部门的工程技术人员阅读；也可供大专院校有关专业的师生参考。

土工原理与计算

下 册

华东水利学院土力学教研室主编

*

水利出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 18 $\frac{1}{2}$ 印张 421千字

1981年5月第一版 1981年5月北京第一次印刷

印数 0001—8640册 定价 1.90元

书号 15047·4118



前 言

自1925年太沙基发表第一本“土力学著作以来，土力学这门科学在近半个世纪内发展很快。但在发展过程中，显然在不同阶段有不同的重点，在不同时期发展速度也各有异。从本世纪三十年代到五十年代期间，由于实践的需要，理论领域内各类公式推陈出新，同时，伴随着公式中所需指标的测定，在仪器方面也不断改进。从六十年代到七十年代，电子计算机逐步普及，土力学计算方法从而得到了更迅速的发展。计算方法的改进必将推动土工理论的深入和提高，而土工理论的提高又必将提高计算方法的正确性。

我们编写本书的目的，就是希望力所能及地将土力学中某些重要领域的近代理论与新的计算方法，紧密结合起来，加以总结和介绍。确定本书内容的主要原则，是尽可能地介绍国际上通用的方法和国内的先进经验。如果本书对我国实现四个现代化有所助益的话，那正是编写本书的全体同志所期望的。

对阅读本书的读者要求掌握土力学的基本理论和具有初步的有限单元法知识。本书可供土建、水利、交通等部门的工程技术人员参考，并可作为研究生的教材。

本书由华东水利学院钱家欢、郭志平同志负责组织编写工作，并对全书进行了统校和定稿。参加本书编写者为：华东水利学院钱家欢（第四、第十二章）、郭志平（第五章）、向大润（第八章）、徐志英（第十一章）、姜朴（第二章）、俞仲泉（第九章）、周萍（第七章）、殷宗泽（第四、第六章）等同志；南京大学李生林同志（第一章）；同济大学胡中雄、魏道埭同志（第十四章）；南京工学院唐念慈同志（第十三章）；南京水利科学研究所毛昶熙、周保中同志（第三章）；江苏水利勘测设计院谢良诚同志（第十章）。此外，华东水利学院卢盛松、方涤华、费余绮等同志也参加了本书的部分校阅工作。

本书经清华大学、同济大学、水利水电科学研究院、南京水利科学研究所、国家地质总局等单位的有关同志审稿，并提出了不少宝贵意见，特别是黄文熙、俞调梅教授，戴广秀、潘家铮副总工程师、卞富宗、周汾、盛崇文、陈愈炯、沈珠江、朱思哲、张之一、张文正等工程师为审查本书作了许多工作，在此一并表示感谢。

由于我们水平不高，本书中难免有欠妥甚至错误之处，敬请读者批评指正。

华东水利学院土力学教研室

江苏南京 1979年7月

目 录

前 言

第八章 土体极限平衡理论	1
第一节 平面应变下土体极限平衡理论的基本原理	2
第二节 条形基础的地基极限承载力	10
第三节 土坡稳定	20
第四节 挡土墙土压力	26
第五节 极限平衡理论的轴对称问题	35
第九章 水闸地基与基础计算中的几个问题	38
第一节 水闸基底摩擦系数及其确定	38
第二节 弹性地基参数及其确定	52
第三节 软土上水闸反拱底板的计算	70
第十章 地基处理	89
第一节 换土垫层法	89
第二节 反压法	107
第三节 砂井预压法	114
第四节 振动水冲法	137
第五节 其他处理方法	141
第十一章 砂土液化	153
第一节 概述	153
第二节 液化的原因	154
第三节 影响液化的因素	156
第四节 判断液化可能性的方法	159
第五节 振动液化试验	176
第六节 地震时孔隙水压力的增长计算	192
第七节 地震时孔隙水压力的消散计算	195
附录 I 地基反应分析的集中质量法	202
附录 II 等效均匀应力周数的简化求法	203
第十二章 土工抗震试验与计算	208
第一节 概述	208
第二节 地震的起因与震波的传播	208
第三节 推算地震震级和烈度的方法	211
第四节 振动作用下土的性能指标测定	214
第五节 地震作用下地基与建筑物的协同作用	225

第十三章	波动方程在桩的性状分析中的应用	239
第一节	概述	239
第二节	波动方程的推导	241
第三节	波动方程的史密斯解答	242
第四节	土阻力的计算模型	243
第五节	垫层材料的特性	245
第六节	桩身的计算图式	246
第七节	桩的性状分析步骤	247
第八节	生产应用问题	248
第九节	波动方程分析的最近发展情况简介	251
第十四章	概率论与统计学在土工问题中的应用	255
第一节	关于安全度和优化设计的讨论	255
第二节	随机事件及其概率	257
第三节	随机变量的概率分布与数学特征	261
第四节	抽样估计	268
第五节	地基的推断设计	279
第六节	边坡安全度分析	283

第八章 土体极限平衡理论

土体极限平衡理论,作为塑性理论的一个重要组成部分,早在1773年为C.库仑所创立。他提出的土体破坏条件(其推广即后来的所谓摩尔——库仑破坏准则,对于理想塑性体,它与屈服准则相一致),至今仍被广泛采用。他论述了极限平衡的基本原理,并用以推求挡土墙土压力。其后W.朗肯(1857)研究了斜坡半无限体内的极限平衡状况,求得了极限平衡条件,并导出了水平填土表面下光滑垂直墙背上的土压力公式。F.科特(1903)把应力平衡微分方程式与极限平衡条件联立起来,导出了极限平衡方程组。L.普兰特(1920)研究了一系列有关塑性平衡的问题,证明了二维塑性问题是双曲线型的,并且推导了无重量介质的半无限体在平面变形情况下的极限承载力解答。H.汉盖(1923)进一步深入研究了塑性理论的平面变形问题,论述了特征线场(滑线场)的性质。T.卡尔曼(1927)和A.卡科(1934)也研究了理想松散介质的极限平衡方程,提出了近似求解的方法。B.B.索科洛夫斯基从1939年起就系统地研究了松散介质极限平衡理论的一般原理及有关的各种实际问题,取得了重要成果,几次出版了这方面的专著。C.C.戈罗什喀维奇(1948、1957)提出了极限平衡方程积分的图解法。B.Γ.别列赞策夫(1952)研究了极限平衡理论的轴对称问题,并应用于不同基础埋深的地基承载力计算。在极限平衡理论循着应力场的方向发展的时候,出现了一些同时考虑速度场的研究工作。H.盖林格(1930)从理论上阐述了理想塑性的非剪胀性材料的速度特征线概念。D.C.德鲁克和W.普拉格(1952)曾将所谓上限解及下限解的概念引伸到研究具有内摩擦角 φ 的材料,并从理论上论证了体积膨胀(正的或负的)在一定条件下必伴随着塑性流动而产生。R.T.希尔德(1953)研究了平面变形情况下相应流动律材料(即剪胀角 ν 等于内摩擦角 φ 的材料)的速度场,并同样论证了滑线必与零伸长线相重合。R.G.詹姆斯(1965)根据模型墙试验结果,也证明了滑线与零伸长线重合这一结论的正确性。近二十年来,不少土工方面的学者,例如B.汉森、E.H.戴维斯、K.H.罗斯科、I.K.李等,都先后研究了非相应流动律材料(即 $\nu \neq \varphi$ 的材料)的塑性破坏问题,并用于求解地基承载力和挡土墙土压力。但是,土体极限平衡理论仍须进一步研究和发展,才能更好地符合各种实际问题的真实情况,并达到具有实用价值的程度。

本章所述的极限平衡理论主要涉及平面变形问题,在此情况下,极限平衡微分方程组将属于双曲线型,且是静定的。在本章的有限篇幅内,将着重介绍B.B.索科洛夫斯基方法,包括土体极限平衡理论的基本原理及其应用于地基承载力、土坡稳定和挡土墙土压力等方面的成果,主要参考书为B.B.索科洛夫斯基的著作^[1, 2]。

在叙述了极限平衡理论的平面变形问题之后,在最后一节中,将扼要地介绍一下轴对称问题。主要参考书为B.Γ.别列赞策夫的著作^[4, 5]。

极限平衡理论的一个基本假设,就是把土视为理想刚塑性材料;认为在整个加荷过程

中，土体不发生任何变形，一旦达到极限平衡状态，则土体开始沿某破裂面产生剪切变形。

极限平衡理论的一个基本物理依据，对于土体来说，就是众所周知的摩尔——库仑破坏条件。G.E.格林和A.W.毕肖普（1969）曾根据他们的试验成果，证明摩尔——库仑条件能较为满意地反映实际情况，而广义的屈雷斯卡条件和广义的密悉斯条件则与实际情况相差甚远。

电子计算技术发展到了今天这样高的水平，完全有可能在土体极限平衡理论的应用中，考虑各种比较复杂的因素，诸如地震力、渗透力、孔隙水压力、非均质土层，较复杂的边界轮廓线、较复杂的边界应力条件……等。这些都是值得今后进一步探索的方向。

第一节 平面应变下土体极限平衡理论的基本原理

一、土体极限平衡条件

在外力作用下，土体中各点将产生应力和应变。在一般情形下，应力包括正应力和剪应力，而应变则相应地包括线应变和剪应变。若某点的应力按某种应力路线变化，使该点的剪应变逐渐增大，直至沿着一定的平面首先刚刚剪裂，则该点土单元的应力被认为处于极限平衡状态，并称这个平面上的极限剪应力为土的抗剪强度。土体极限平衡理论的任务就是研究土体处于极限平衡状态时，各应力分量之间的关系。前曾述及，针对极限平衡问题

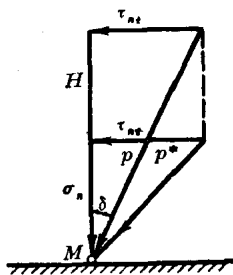


图 8-1

的研究，假设土体是一种理想刚塑性材料，所以对于达到极限平衡状态之前的变形（体积变形及剪切变形）过程将不予考虑，亦即认为变形过程对于极限平衡状态下的应力关系不产生影响。

如图 8-1 所示，在通过土中某点 M 的任意平面上，作用着实际应力 p^* ，其法向分量为 σ_n ，切向分量为 τ_{nt} 。

根据试验得知，如果该单元平面上的应力达到极限平衡而使土体沿该面开始破裂，则切向应力分量与法向

应力分量存在如下线性关系：

$$|\tau_{nt}| = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + c \quad (8-1)$$

式中 φ ——土的内摩擦角；

c ——土的凝聚力。

式 8-1 就是著名的库仑强度公式，亦即破裂面上土体的极限平衡条件。它可以写成另一种形式：

$$|\tau_{nt}| = (\sigma_n + H) \operatorname{tg} \varphi \quad (8-2)$$

式中 $H = c \operatorname{ctg} \varphi$ ——土的张拉强度。

把公式 8-2 反应到图 8-1，可以看出：当引用应力 p 的倾角 $\delta = \varphi$ 时，该处土体即处于极限平衡状态。引用应力 p 的二个分量为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n + H &= p \cos \delta \\ \tau_{nt} &= p \sin \delta \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

在主轴坐标平面内,单元土体 M 上作用着大主应力 σ_1 和小主应力 σ_3 , 如图8-2所示。若该单元土体处于极限平衡状态, 则从摩尔圆 (图8-3) 可以得出, 主应力之间存在如下关系:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2H} = \sin \varphi \quad (8-4)$$

通过 M 点的破裂面 (滑线) 有二个, 它们与 σ_1 方向线之夹角为 $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ 。

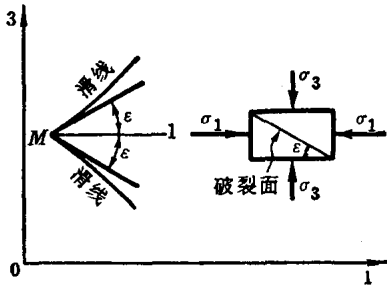


图 8-2

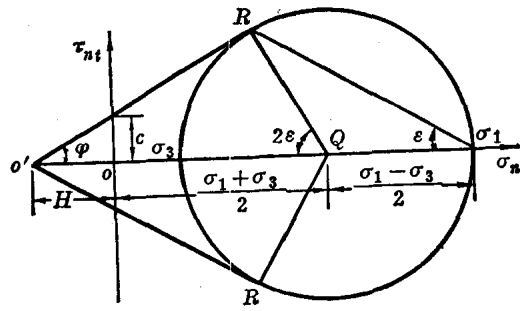


图 8-3

在 xz 坐标平面内, 单元土体 M 上作用着应力分量 σ_x 、 σ_z 和 τ_{xz} , 如图8-4所示。若该单元土体处于极限平衡状态, 则根据摩尔圆 (图8-5) 可以求得, 这些应力分量之间存在如下关系:

$$\frac{1}{4} (\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{xz}^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{4} (\sigma_x + \sigma_z + 2H)^2 \quad (8-5)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma (1 + \sin \varphi \cos 2\theta) - H \\ \sigma_z &= \sigma (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) - H \\ \tau_{xz} &= \sigma \sin \varphi \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (8-6)$$

式中应力参数被定义为:

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + H = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) + H \text{——平均法向引用应力;}$$

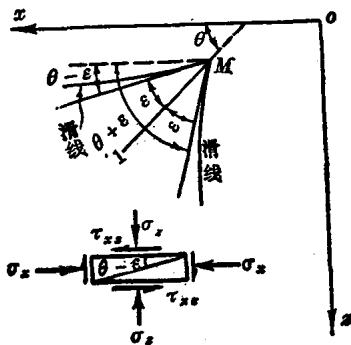


图 8-4

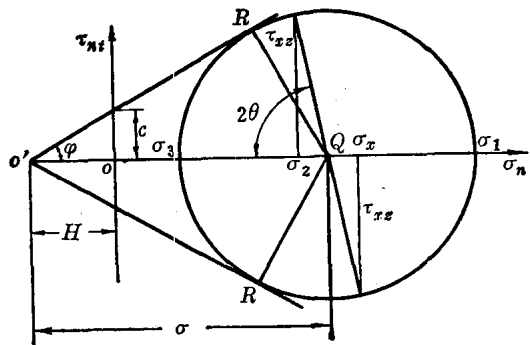


图 8-5

θ —— 大主应力 σ_1 方向线对正 x 轴的倾角，以逆时针转为正。

通过 M 点的破裂面（滑线）有二个，它们对正 x 轴的倾角分别为 $\theta \pm \varepsilon$ ； ε 是破裂面与 σ_1 方向线之间的夹角，其值已于前述。

以上式 8-1、8-2、8-4、8-5、8-6 都是平面应变情况下土体极限平衡条件的表达式，其中以式 8-6 在本章最为常用。

二、极限平衡微分方程及特征线方程

设 x 轴与水平线之夹角为 α ，如图 8-6 所示。在 xz 坐标平面内，单元土体上作用着三个面应力分量 σ_x 、 σ_z 、 τ_{xz} 和一个体积力——容重 γ ，它们的静力平衡微分方程为：

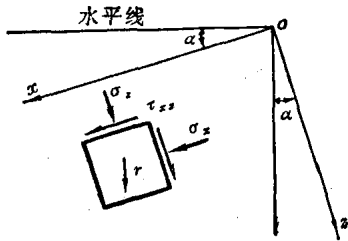


图 8-6

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \gamma \sin \alpha \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \gamma \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8-7)$$

如果这个单元土体处于极限平衡状态，则三个面应力分量必须满足式 8-5 或式 8-6 条件。将式 8-6 代入式 8-7，得基本微分方程组：

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sin \varphi \cos 2\theta) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sin \varphi \sin 2\theta \frac{\partial \sigma}{\partial z} - 2\sigma \sin \varphi (\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z}) &= \gamma \sin \alpha \\ \sin \varphi \sin 2\theta \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) \frac{\partial \sigma}{\partial z} + 2\sigma \sin \varphi (\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z}) &= \gamma \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8-8)$$

利用滑线之间夹角 $2\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varphi$ 的关系，可把方程组 8-8 改写成另一形式。为此，以 $\sin(\theta \pm \varepsilon)$ 乘第一个方程，以 $-\cos(\theta \pm \varepsilon)$ 乘第二个方程，然后相加即得：

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mp 2\sigma \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} - \gamma \frac{\sin(\alpha \mp \varphi)}{\cos \varphi} \right] \cos(\theta \mp \varepsilon) + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \mp 2\sigma \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial z} - \gamma \frac{\cos(\alpha \mp \varphi)}{\cos \varphi} \right] \sin(\theta \mp \varepsilon) = 0 \quad (8-9)$$

可以设想，在 xz 坐标内存在某种曲线 $z = z(x)$ ，其上 σ 及 θ 正好满足方程式 8-9。我们沿该曲线取 σ 和 θ 的全微分：

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz, \quad d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial z} dz$$

使与方程 8-9 联立运算，消去 $\frac{\partial \sigma}{\partial z}$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial z}$ 项或 $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ 项，得：

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mp 2\sigma \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial x} = \gamma \frac{\sin(\alpha \mp \varphi)}{\cos \varphi} + \frac{\Delta \sin(\theta \mp \varepsilon)}{\sin(\theta \mp \varepsilon) dx - \cos(\theta \mp \varepsilon) dz}$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z} \mp 2\sigma \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial z} = \gamma \frac{\cos(\alpha \mp \varphi)}{\cos \varphi} - \frac{\Delta \cos(\theta \mp \varepsilon)}{\sin(\theta \mp \varepsilon) dx - \cos(\theta \mp \varepsilon) dz}$$

$$\text{式中} \quad \Delta = d\sigma \mp 2\sigma \operatorname{tg} \varphi d\theta - \frac{\gamma}{\cos \varphi} [\sin(\alpha \mp \varphi) dx + \cos(\alpha \mp \varphi) dz]$$

分析以上两式左端偏导数部分的性质,可以看出:若等号右端部分的分子不为零,则导数值是唯一的;若分母分子同为零,则导数值不定,而 $z=z(x)$ 被称为特征线;若分母为零而分子不为零,则导数趋于无穷大, $z=z(x)$ 是一条间断线,它往往表现为极限平衡区与刚性区之间的界限线。

取分子分母同为零,得特征线方程组如下:

$$dz = \operatorname{tg}(\theta \mp \varepsilon) dx \quad (8-10)$$

$$d\sigma \mp 2\sigma \operatorname{tg}\varphi d\theta = \frac{\gamma}{\cos\varphi} [\sin(\alpha \mp \varphi) dx + \cos(\alpha \mp \varphi) dz] \quad (8-11)$$

从式8-10可知,特征线有二族,其与正 x 轴之倾角分别为 $\theta \mp \varepsilon$,这正与滑线对正 x 轴之倾角相吻合。由此得出结论:特征线就是滑线;通过任意一点都存在二条特征线(滑线);整个被考察的极限平衡区域内布满了特征线网(滑线网),其一与正 x 轴成 $\theta - \varepsilon$ 之倾角,叫做第一族特征线(第一族滑线),另一与正 x 轴成 $\theta + \varepsilon$ 之倾角,叫做第二族特征线(第二族滑线),见图8-7。今后为了简便起见,我们只用“滑线”这一名称。

若只取分母为零,则得间断线方程 $dz = \operatorname{tg}(\theta \mp \varepsilon) dx$ 。这说明间断线可能是滑线或滑线的包线。沿间断线应力状态发生跳跃。

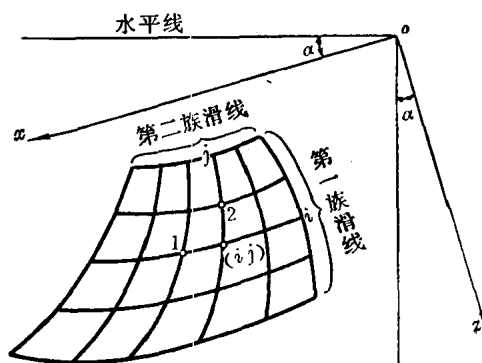


图 8-7

三、特征线方程的差分求解

在一般情况下,特征线微分方程组8-10及8-11的通解表达式很难求得。所以,在解决实际问题时,可借助于有限差分计算,以近似地确定土体中的滑线位置和相应的极限平衡状态。

设在图8-7中,节点 (i, j) 与节点1同在一条第一族滑线上,又与节点2同在一条第二族滑线上。现在已知节点1及2的 x 、 z 坐标值和应力参数 σ 、 θ 值;欲求节点 (i, j) 的 x 、 z 、 σ 、 θ 。

在方程组8-10和8-11中,以 $x_{ij}-x_1$ 、 $z_{ij}-z_1$ 、 $\sigma_{ij}-\sigma_1$ 、 $\theta_{ij}-\theta_1$ 代 dx 、 dz 、 $d\sigma$ 、 $d\theta$,并近似地取 $\sigma=\sigma_1$ 、 $\theta=\theta_1$,就得到第一族滑线的差分方程;为了书写简便起见,脚标 ij 予以取消。

$$\left. \begin{aligned} z-z_1 &= (x-x_1) \operatorname{tg}(\theta_1 - \varepsilon) \\ \sigma - \sigma_1 - 2\sigma_1(\theta - \theta_1) \operatorname{tg}\varphi &= \frac{\gamma}{\cos\varphi} [(x-x_1) \sin(\alpha - \varphi) + (z-z_1) \cos(\alpha - \varphi)] \end{aligned} \right\} \quad (8-12)$$

同样,在方程组8-10和8-11中,以 $x_{ij}-x_2$ 、 $z_{ij}-z_2$ 、 $\sigma_{ij}-\sigma_2$ 、 $\theta_{ij}-\theta_2$ 代 dx 、 dz 、 $d\sigma$ 、 $d\theta$,并近似地取 $\sigma=\sigma_2$ 、 $\theta=\theta_2$,可得第二族滑线的差分方程(脚标 ij 也予取消)。

$$\left. \begin{aligned} z - z_2 &= (x - x_2) \operatorname{tg}(\theta_2 + \varepsilon) \\ \sigma - \sigma_2 + 2\sigma_2(\theta - \theta_2) \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\gamma}{\cos \varphi} \left[(x - x_2) \sin(\alpha + \varphi) + (z - z_2) \cos(\alpha + \varphi) \right] \end{aligned} \right\} \quad (8-13)$$

对于 x 轴水平, 即 $\alpha = 0$ 的情况, 第一族滑线和第二族滑线的差分方程被简化为:

$$\left. \begin{aligned} z - z_1 &= (x - x_1) \operatorname{tg}(\theta_1 - \varepsilon) \\ \sigma - \sigma_1 - 2\sigma_1(\theta - \theta_1) \operatorname{tg} \varphi &= \gamma[(z - z_1) - (x - x_1) \operatorname{tg} \varphi] \end{aligned} \right\} \quad (8-12')$$

$$\left. \begin{aligned} z - z_2 &= (x - x_2) \operatorname{tg}(\theta_2 + \varepsilon) \\ \sigma - \sigma_2 + 2\sigma_2(\theta - \theta_2) \operatorname{tg} \varphi &= \gamma[(z - z_2) + (x - x_2) \operatorname{tg} \varphi] \end{aligned} \right\} \quad (8-13')$$

式8-12'和8-13'中正好有四个未知量 x 、 z 、 σ 和 θ , 与方程个数相符, 联立求解, 即得节点 (i, j) 的全部解答。

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x_1 \operatorname{tg}(\theta_1 - \varepsilon) - x_2 \operatorname{tg}(\theta_2 + \varepsilon) - (z_1 - z_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 - \varepsilon) - \operatorname{tg}(\theta_2 + \varepsilon)} \\ z &= \begin{cases} z_1 + (x - x_1) \operatorname{tg}(\theta_1 - \varepsilon) \\ \text{或 } z_2 + (x - x_2) \operatorname{tg}(\theta_2 + \varepsilon) \end{cases} \\ \theta &= \frac{-\sigma_1 + \sigma_2 + 2(\sigma_1 \theta_1 + \sigma_2 \theta_2) \operatorname{tg} \varphi + \gamma[z_1 - z_2 + (2x - x_1 - x_2) \operatorname{tg} \varphi]}{2(\sigma_1 + \sigma_2) \operatorname{tg} \varphi} \\ \sigma &= \begin{cases} \sigma_1 + 2\sigma_1(\theta - \theta_1) \operatorname{tg} \varphi + \gamma[(z - z_1) - (x - x_1) \operatorname{tg} \varphi] \\ \text{或 } \sigma_2 - 2\sigma_2(\theta - \theta_2) \operatorname{tg} \varphi + \gamma[(z - z_2) + (x - x_2) \operatorname{tg} \varphi] \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (8-14)$$

如果滑线网比较密, 则差分计算的结果可以达到足够的精度。如果有必要进一步提高精度, 则须在第一次差分计算结果的基础上, 以 $\frac{1}{2}(\theta + \theta_1)$ 及 $\frac{1}{2}(\theta + \theta_2)$ 代替式8-14第一、二式中的 θ_1 及 θ_2 , 以 σ 值代替式8-14第三、四式中的 σ_1 及 σ_2 (注意: 它们相当于特征线方程8-11中的 σ), 重新计算 x 、 z 、 θ 、 σ 等值, 直到所要求的精度为止。

四、边值问题的处理

在进行特征线方程的差分计算时, 必须把已知边界上所给定的压力值及其方向角换算成相应的 σ 和 θ , 然后才能按差分公式逐点地计算下去。另外, 当差分计算进行到其它边界时, 又必须把算得的 σ 和 θ 值换算成相应的边界压力及其方向角。这样, 就需要研究一下边值问题。

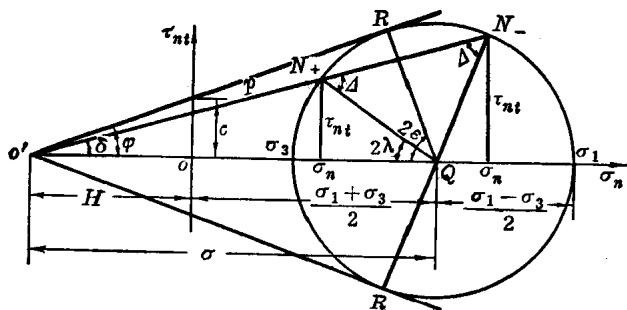


图 8-8

假定在边界上某点 M 处, 作用着引用压力 p , 其对法线的倾角 (即 p 的方向角) 为 δ , 如图8-1所示。该点的应力状态完全可以用摩尔应力圆表达出来, 见图8-8。 $O'N$ 表示引用压力 p , $\angle NO'Q$ 表示 p 的倾角 δ , $O'Q$ 表示平均法向引用应力 σ , $\angle O'QN$ 表示 M 点处大主应力 σ_1 对

边界面的倾角 λ 之二倍。

从图8-8可直接找出引用应力 p 的二个分量与 σ 、 λ 的关系：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n + H &= \sigma(1 - \sin\varphi \cos 2\lambda) \\ \tau_{nt} &= \sigma \sin\varphi \sin 2\lambda \end{aligned} \right\} \quad (8-15)$$

同时，这二个应力分量也可用式8-3求得。将式8-3代入式8-15，然后相除，经过整理即得：

$$\sin(2\lambda + \delta) = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$$

它的通解可以写成两个表达式：

$$2\lambda + \delta = 2m\pi + \Delta \quad \text{和} \quad 2\lambda + \delta = (2m+1)\pi - \Delta$$

$$\text{这里} \quad \Delta = \arcsin \frac{\sin\delta}{\sin\varphi} \quad (8-16)$$

这二个表达式还可进一步合成一个表达式：

$$2\lambda + \delta = 2m\pi + k\Delta + (1-k)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{或} \quad \lambda = m\pi + (1-k)\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(k\Delta - \delta), \quad k = \pm 1 \quad (8-17)$$

式中 m 为任意整数，通常取 $m=0$ 或 $m=\pm 1$ 。

在图8-8的 $\Delta O'QN$ 中，根据正弦定理得

$$\sigma = p \frac{\sin\Delta}{\sin(\Delta - k\delta)}, \quad k = \pm 1 \quad (8-17')$$

利用式8-17和式8-17'可将边界上的 p 、 δ 与相应的 σ 、 λ 进行相互的换算。若边界是水平的，则

$$\theta = \lambda \quad (8-18)$$

若边界对水平线的倾角为 α ，则

$$\theta = \lambda + \alpha \quad (8-18')$$

在上述换算公式中， k 取 $+1$ 或 -1 ，决定于所考察的边界在土体开始滑动时将朝什么方向运动。

分析式8-17'，不难看出，当作用于边界上的 p 和 δ 保持常数时，则 σ 只是 k 的函数： $k=-1$ ， σ 最小； $k=+1$ ， σ 最大。另一方面，我们也知道，在 p 和 δ 保持常数的情况下， σ 又是边界位移矢量的函数：当边界由顺着 p 的方向运动逐渐转变为逆着 p 的方向运动时，则反映单元土体应力水平的 σ 值必将从其最小值逐渐增大到最大值。把上述两种分析联系起来，就可得出如下结论：

(1) 如果边界基本上顺着 p 的方向压入土体，使之达到极限平衡状态，则应取 $k=-1$ ；其相应的应力状态称为最小应力状态，反映到图8-8的摩尔应力圆上必为点 N_- ，其所在的区域（紧靠边界）称为最小应力状态区。

(2) 如果边界基本上逆着 p 的方向外移（隆起），也使土体达到极限平衡状态，则应取 $k=+1$ ；其相应的应力状态称为最大应力状态，反映到图8-8的摩尔应力圆上必为

点 N_+ ，其所在的区域（紧靠边界）称为最大应力状态区。

所以，在具体解题时，必须首先判断边界运动的方向，才能正确选定 k 的符号；然后按式8-17、8-17'和8-18'进行换算，得到差分计算所需之 σ 、 θ 值。

差分计算的过程总是从已知边界开始，逐步算到未知边界为止。在此过程中，一般可能遇到四种边值问题，现分述如下：

第一种边值问题。如图8-9所示， A_0O 是一条已知的光滑边界，但不是滑线，其上各节点的 x 、 z 、 σ 、 θ 均已知，那么可用差分公式8-14挨次地把 A_0OA_1 区内所有节点的解答求得（图中箭头表示解题的顺序）。

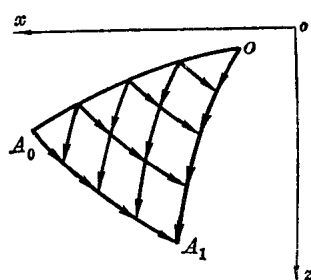


图 8-9

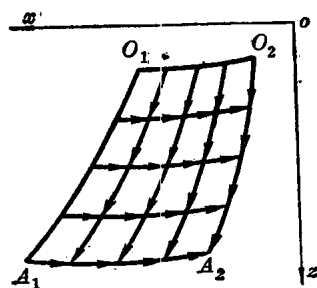


图 8-10

第二种边值问题。如图8-10所示， O_1A_1 和 O_1O_2 是二条相交的滑线，其上各节点的 x 、 z 、 σ 、 θ 均已知，则根据差分公式8-14同样可把 $O_1A_1A_2O_2$ 区内所有节点的解答依次求得。

第三种边值问题。如图8-11所示，边界由一条滑线 OA_2 和另一条光滑边界 OA_3 组成。滑线 OA_2 上的 x 、 z 、 σ 、 θ 已知，光滑边界 OA_3 上只给定二个条件，例如给定了边界的坡度 $m = \frac{dz}{dx} = m(x, z)$ 和大主应力方向线对正 x 轴的倾角 $\theta = \theta(x, z)$ ，或给定了 $m = \text{常数}$ 和 $\theta = \text{常数}$ 。如果 OA_2 属于第二族滑线，那么首先根据式8-12'的第一式和 $z - z_0 = m(x - x_0)$ 联立求解，得出 a 点的 x 、 z 值，然后利用式8-12'的第二式与沿边界所给定的 θ 值，求得 a 点的 σ 值。 a 点的全部解答既已确定，即可按第二种边值问题的方法求得 $1'$ 点的全部解答。重复上述步骤，求出 a' 点的全部解答。如此类推，直至 A_3 点为止。如果 OA_2 属于第一族滑线，那么应该采用式8-13'进行计算，方法和步骤同上。

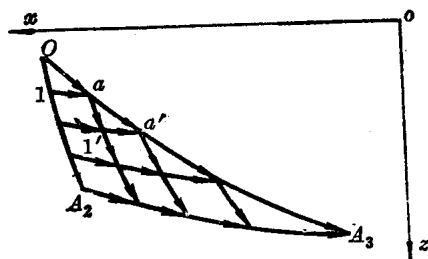


图 8-11

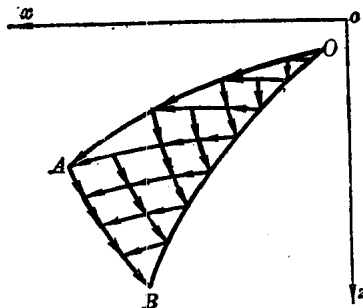


图 8-12

第四种边值问题。如图8-12所示，边界由二条光滑线OA和OB组成，但它们都不是滑线。沿着这二条边界，在 x 、 z 、 σ 、 θ 之间各自给定了二个条件。根据某一族滑线的差分方程，配合OA边界上已知的二个条件，便可逐步求解该边界上所有节点的 x 、 z 、 σ 、 θ 值。同样，根据另一族滑线的差分方程，配合OB边界上已知的二个条件，也可逐步求解沿该边界所有节点的 x 、 z 、 σ 、 θ 值。至于AOB区内部节点的求解则按第二种边值问题的方法进行。

五、相似律在土体极限平衡计算中的应用

在前面所述的公式中，许多数量都是有因次数量。为了计算方便，并把算得的成果制成图表以供查用，就有必要把这些数量化成无因次数量，从而也就必须考察一下力学相似律问题。

在具体课题的计算中，如果引进适当的特征长度 l 和特征引用应力 p ，则各种有因次变量可转换为如下的无因次变量：

$$\text{几何量: } x' = \frac{x}{l}, \quad z' = \frac{z}{l};$$

$$\text{面力量: } \sigma'_x = \frac{\sigma_x + H}{p}, \quad \sigma'_z = \frac{\sigma_z + H}{p}, \quad \tau'_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{p};$$

$$\text{体力量: } \gamma' = \gamma \times \frac{l}{p}$$

将这些新的无因次变量代入静力平衡微分方程式8-7和极限平衡条件式8-5，得：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x'} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z'} &= \gamma' \sin \alpha \\ \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z'} &= \gamma' \cos \alpha \\ \frac{1}{4}(\sigma'_x - \sigma'_z)^2 + \tau'^2_{xz} &= \frac{\sin^2 \varphi}{4}(\sigma'_x + \sigma'_z)^2 \end{aligned} \right\} \quad (8-19)$$

分析上面推导出来的新方程组，就可得出力学相似律，其含义为：对于具体课题，尽管 c 、 γ 不相同，但是只要无因次数量 φ 和 $\gamma' (= \gamma \times \frac{l}{p})$ 是相同的，那么在几何相似区域中，若边界上引用应力相似，则对应点的引用应力也是相似的。如果再加上一条，即 c/p 也相同，那么这些对应点的应力也是相似的。

下边谈谈力学相似律在土体极限平衡计算中的应用。

如果土体具有粘性，即 $c > 0$ ，则宜取 $\frac{c}{p} = 1$ ， $\gamma \times \frac{l}{p} = 1$ ，亦即：

$$\left. \begin{aligned} p &= c \\ l &= \frac{c}{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad (8-20)$$

按式8-19求得各个 (x', z') 坐标点上的无因次应力分量 σ'_x 、 σ'_z 、 τ'_{xz} ，则对应点的实际坐标是：

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{c}{\gamma} x' \\ z &= \frac{c}{\gamma} z' \end{aligned} \right\} \quad (8-21)$$

这些点上的实际应力分量是:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= c\sigma'_x - H \\ \sigma_z &= c\sigma'_z - H \\ \tau_{xz} &= c\tau'_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (8-22)$$

如果土体没有粘性, 即 $c = 0$, 则宜取 $\gamma \times \frac{l}{p} = 1$, 亦即:

$$l = \frac{p}{\gamma} \text{ 或 } p = \gamma l \quad (8-23)$$

于是几何相似区对应点的实际坐标应为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{p}{\gamma} x' \\ z &= \frac{p}{\gamma} z' \end{aligned} \right\} \quad (8-24)$$

这些点上的实际应力分量为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \gamma l \sigma'_x - H \\ \sigma_z &= \gamma l \sigma'_z - H \\ \tau_{xz} &= \gamma l \tau'_{xz} \end{aligned} \right\} \quad (8-25)$$

由此可见, 模型中边界上的引用应力较之原型缩小 N 倍, 则几何相似区内的对应点上的引用应力分量 $\sigma_x + H$ 、 $\sigma_z + H$ 和 τ_{xz} 也缩小 N 倍; 相反亦然。

第二节 条形基础的地基极限承载力

一、倾斜荷载下的浅基极限承载力

根据 Б.Г. 别列赞策夫^[4, 5]的研究结果表明, 当基础埋置深度不超过基础宽度的一半时, 边荷载下的地基中, 滑线基本上呈直线状, 且以 $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ 的角度与水平线相交; 这说明, 由埋置深度内土层重量所形成的边荷载必垂直作用于水平面上。设基础宽度为 B , 埋置深度为 D_f , 若 $\frac{D_f}{B} \leq 0.5$, 则从地基稳定分析的角度来说, 称这样的基础为浅埋基础, 简称浅基。

本节将应用前面所述的极限平衡理论来解决浅基的极限承载力问题, 用以与设计荷载相比较, 判断地基的稳定程度。

如图8-13所示, 已知浅基中土的物理力学性质指标 γ 、 c 、 φ 和引用边荷载 $q = \gamma D_f + H$ (这里 $H = c \cot \varphi$), 以及基底引用荷载之倾角 δ , 欲求极限荷载沿基底面的分布。现将计算步骤叙述如下。

	$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
x z σ θ	0									1	3	3	3	3	3	3								
x z σ θ	1								1	2	4	4	4	4	4	4	5							
x z σ θ	2							1	2	2	4	4	4	4	4	4	6	7						
x z σ θ	3						1	2	2	2	4	4	4	4	4	4	6	8	9					
	⋮																							
x z σ θ	8	1	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	6	8	10	12	14	16	18	19

图 8-14

(5) 若 q 沿正 x 半轴的分布是不均匀的 (即 $q = q(x) \neq \text{常数}$), 但是连续的, 则可按第一种边值问题求解 AOC 区内各节点的 x 、 z 、 σ 、 θ 值, 直至 OC 线为止。把这些结果填入图 8-14 的方格 2 中。

若 q 沿正 x 半轴的分布是均匀的 (即 $q = \text{常数}$), 则不须进行差分计算, 可用下列公式直接求得 OC 线上各节点的解答:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} i \Delta x, \quad i \text{ —— 第一族滑线的标号} \\ z &= x \operatorname{tg} \varepsilon \\ \sigma &= \frac{q + \gamma z}{1 - \sin \varphi} \\ \theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8-28)$$

不难证明, 对于 $q = \text{常数}$ 的情况, AOC 区内的滑线网由二族平行的直线组成, 其与水平线之夹角均为 $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ 。

(6) 在 O 点处, 过渡区 COD 的扇形顶角为 $\angle COD' = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\Delta + \delta)$ 。将 $\angle COD'$ 适当地分成 n 等分, 例如在图 8-13 中, 分成 6 个等分 ($n = 6$), 每个等分的角度为 $\Delta\theta = \frac{1}{n}(\angle COD')$ 。这就意味着将有 7 根第二族滑线铰交于 O 点, 亦即 (0, 8)、(0, 9)、……(0, 14) 诸节点在 xz 平面内紧缩于此, 其坐标 x 、 z 及应力参数 σ 、 θ 为: