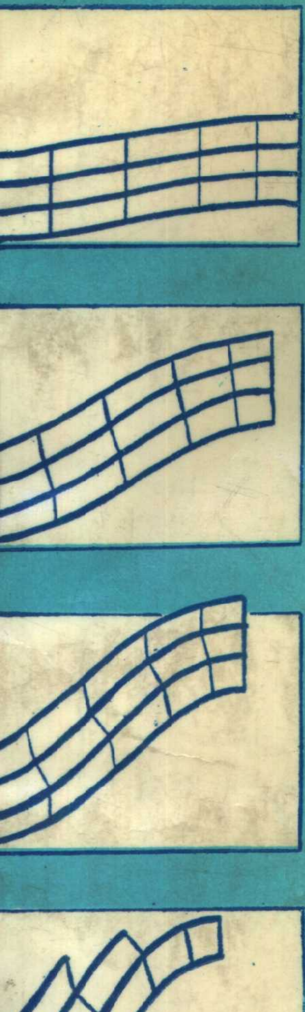
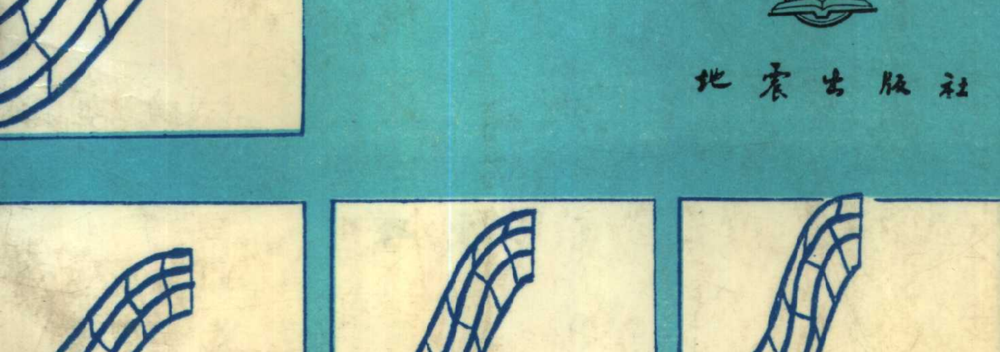
殷有泉 编著

有限单元方法及其在地学中的应用

固体地球物理进展丛书





地震出版社

固体地球物理进展丛书

有限单元方法及其在地学中的应用

殷有泉 编著

地震出版社

1987

内 容 提 要

本书介绍了有限单元方法的基本内容以及它们在地学各领域内的应用。全书包括预备知识和有限单元法的基本思想，线性问题的应力-变形分析，动力学问题，弹塑性问题的应力-变形分析，缓慢的粘性流动问题，以及稳态的渗流场，温度场和电磁场问题等六章。各章所举的应用例子具有典型性，从中可以看到有限单元方法在地学中应用的深度和广度。

本书可作为地球动力学，地震学，地质力学，岩石力学和工程地质等专业科研人员自学有限单元法的参考书，也可作为研究生学习有限单元方法课程的教材。

固体地球物理进展丛书

有限单元方法及其在地学中的应用

殷有泉 编著

责任编辑：吴 兵

地震出版社出版

北京复兴路63号

北京印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

850×1168 1/32 6.5印张 165千字

1987年8月第一版 1987年8月第一次印刷

印数 0001—3000

统一书号：13180·390 定价：1.90元

序

地球物理学是建立在物理学基础上的一门应用科学。它的发展和当代的物理学和技术科学的水平有密切的联系。直到本世纪50年代，这门科学的进展速度是比较缓慢的，但在50年代之后，由于物理学的发展和电子计算机的出现，现代地球物理学为了适应生产建设的需要，也正在经历着一个飞跃的变化，在内容和应用两方面，地球物理学的面貌都日新月异。一个地球物理学家若信息不通，在极短时期就会落伍。现代科学家若想成为一个通才简直是不可能的，即使成为一个通才的固体地球物理学家也几乎是不能的。于是若想不落后于时代，一个地球物理学家如何选择读物便成了一个问题。

我们在1978年招收第一批地球物理研究生时，曾尝试过一个方案：对于这个专业的研究生，只开两门专业课：一门是“地球物理学基础”，一门是“当代地球物理学进展”。这是因为地球物理学的基础格局变化并不快，编一本基础教材可以适用好几年；但是地球物理学的应用和计算技巧却五花八门，日新月异。

要培养一个能独立工作的地球物理人才，两方面都不可偏废，但后一方面是有选择的。我们只选一些我国正有人在做的或迫切需要做的课题，请从事这方面工作的有关专家进行短期的讲授，要求说清楚问题的来龙去脉和展望，使学生听过后很快就可以了解问题的情况以便进一步投入工作。这种课题一般是有时间性的。随着工作的进展和需要，不同学年的专题是不固定的。这个办法看来还有一定的成效，因此也引起出版社同志的注意。他们建议将这些专题的讲义印刷出版以供更多的读者参考。这就是《固体地球物理进展》这部丛书的由来。其实国外出版界早已有了这种做法，不过我们选题要有我们自己的特色，要适合当前我国

研究工作的需要。因为要出书，内容比讲义要编排得完整些，要讲清内容的实质，但又不要学院式的长篇大论。文章要精干。针对性要强。对象是有关的专业人员，而不是一般的读者。书的长短和出版时期应当是灵活的。最重要的是针对需要和不失时机。书中还应附有参考文献目录，这对研究人员是极其宝贵的资料。

傅承义

引　言

在地学中由于地质构造形态的复杂，区域划分的困难，岩石力学性质的特殊，使得对地质体的静、动态应力和变形分析，过去只能处于定性的阶段。然而在六十年代后期将有限单元方法引入地学以后，这方面的工作就进入了一个新的阶段。现在有限单元方法已成为地学工作者有力的工具，研究的成果和发表的论文日益增多。然而却还缺乏一本专门为地学工作者介绍有限单元方法的书，人们需要从众多适用于工程方面的很厚的、内容很庞杂的书本中、或分散的大量文献中去寻找。这本书简明扼要地从基本概念讲起，密切结合地质构造、地震波分析等课题的特点进行了介绍和讨论，使得地学工作者能够很快就抓住有限单元方法在地学中应用的实质，取得解决问题的线索。

将有限单元方法用于处理地质体应力和变形分析主要有两个方面的特殊性，一是关于区域边界的划分和断层的处理，本书分别为此介绍了无限区域元和节理元的方法，使得它们得到很好的解决。另一个特殊性就是岩石介质的性质，本书做了重点的介绍和讨论，不但介绍了适用于岩石的弹塑性本构关系，特别是它的软化特性，它对于地震、滑坡等不稳定现象的分析是很关键的，还介绍了粘性，渗流场，地温场等等问题的处理。

殷有泉副教授近十余年来长期从事将有限单元方法用于地学问题的研究和教学。他已多次对北京大学地球动力学的研究生和中国科技大学研究生院的学生讲授这些内容，这本书就是在这些基础上编写的。本书着重于打好基础，作者善于应用简单的例子突出方法的物理实质，使得读者容易理解和掌握。同时作者也注意介绍有限单元方法在地学中应用的全貌，书中包含了许多新的内容和作者的工作成果可供实际工作者进修和参考。读者在掌

握了本书内容以后就应能自学有关的更深入的书和文献。我衷心祝贺本书的出版，相信它能帮助更多的地学工作者掌握这个有力工具，对我国的地学工作做出更多贡献。

王 仁

1985 年冬于北京

前 言

有限单元法是近二十余年在力学和工程科学中发展起来的一种有效的数值方法，它已成为计算力学的一个重要分支。有限单元法在地学科学中也得到了广泛的应用，它成为地学科学定量研究的一个重要手段。本书向地球动力学，构造物理学，地质力学或工程地质等专业的研究生和科学研究人员系统地介绍有限单元法的原理以及它在地学方面的应用情况。读者如果掌握了本书的内容，在阅读有关的专门文献资料和正确使用有限单元方法研究地学问题时将不会再遇到特殊的困难。

本书在内容编排上是以力学体系为线索的，这主要是考虑到理论叙述上的完整性和系统性。此外，所选择的内容大都是在地学科学中已有过应用的方面。在各章所例举的应用实例是具有典型性的，并在文中指出了引用资料的出处，以便读者查阅。各章所选的例子足以启发读者如何将有限单元方法为自己的专业服务。本书所介绍的内容，在国内都可找到相应的有限元程序。

想更深入地学习有限元方法的读者，可阅读专著[19]，[7]和即将出版的《非线性固体力学有限元引论》。

北京大学力学系与地质系王仁教授指正了原稿中的一些错误，并提出不少改进意见，著者在此表示深切的感谢。

殷有来

1986年3月于北京大学

主要符号表

$\mathbf{u}$	位移矢量
$\langle \mathbf{u} \rangle$	位移间断量矢量
$\mathbf{v}$	速度矢量
$\boldsymbol{\sigma}$	六维应力矢量
$\boldsymbol{\varepsilon}$	六维应变矢量
$\mathbf{p}$	体积力载荷矢量
$\mathbf{q}$	表面力载荷矢量
$\mathbf{D}$	弹性矩阵
$\mathbf{D}_{ep}$	弹塑性矩阵
$\mathbf{N}$	插值函数矩阵
$\mathbf{a}_e$	单元节点位移矢量
$\mathbf{F}_e$	单元节点力矢量
$\mathbf{K}_e$	单元刚度矩阵
$\mathbf{M}_e$	单元质量矩阵
$\mathbf{V}_e$	单元阻尼矩阵
$\mathbf{c}_2$	单元选择矩阵
$\mathbf{a}$	系统的节点位移矢量
$\mathbf{K}$	系统的刚度矩阵
$\mathbf{K}_T$	系统的切向刚度矩阵
$\mathbf{M}$	系统的质量矩阵
$\mathbf{V}$	系统的阻尼矩阵
p	流体静压力
w^p	塑性功
θ^p	塑性体应变
$\bar{\varepsilon}^p$	等效塑性应变

U	应变能
W	外力功
Π	总势能
E	杨氏弹性模量
ν	泊松比
G	剪切弹性模量
K	体积弹性模量
μ	内摩擦系数
c	内聚力
ρ	密度
η	剪切粘性系数
$f(\sigma,\kappa)$	屈服函数

目　　录

第一章　预备知识和有限单元方法的基本思想

1.1　矩阵运算的基本知识

一、矩阵的概念

在实际问题的计算中，经常会遇到线性代数方程组，例如

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

这是由 n 个未知数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的 m 个线性代数方程构成的方程组。显然，这个方程组可用其系数构成的数表

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{1.1.2}$$

及右端常数 b_i 构成的数列

$$\mathbf{b}=\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix} \tag{1.1.3}$$

所唯一确定。

如式(1.1.2)，由 $m\times n$ 个数 a_{ij}($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$)所构成的 m 个横行，n 个竖列的矩形数表，记为 $\mathbf{A}_{m\times n}$

或 **A**，称为 $m\times n$ 阶的矩阵。a_{ij} 称为该矩阵的元素。矩阵的元素不仅可以是数字，也可以是其它数学记号或表达式等。$m\times 1$ 阶矩阵(它仅有一个竖列)通常称为列阵或列矢量。式 (1.1.3)的 **b** 就是一个列阵。

方阵 如果一个矩阵的行数和列数相等，即 $m=n$，则此矩阵可称为 n 阶方阵，记做

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{1.1.4}$$

由元素 a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn} 所联成的直线称为主对角线。

单位矩阵 当方阵中主对角线上的元素都为1，而其它元素都为零时，则此方阵称为单位矩阵，记做

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.1.5}$$

零矩阵 如果一个 $m\times n$ 阶矩阵中的所有元素都为零，则此矩阵称为 $m\times n$ 阶零矩阵，记做

$$\mathbf{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.1.6}$$

对称方阵 在方阵(1.1.4)中对称于主对角线的元素都两两相等，即 $a_{ij}=a_{ji}(i,\ j=1,2,\cdots,n)$，则此方阵称为对称矩阵或对称方阵。

方阵的行列式 所谓方阵 **A** 的行列式是指由该方阵的元素所组成的行列式，记做

$$|\mathbf{A}|=\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1.7}$$

行列式是一个数。仅对于方阵，才能谈它的行列式。如果$|\mathbf{A}|=0$，则方阵 $\mathbf{A}$ 称为奇异的；如果$|\mathbf{A}|\neq0$，则称为非奇异的。关于行列式的知识，这里不多介绍了。

二、矩阵的加减和数乘

矩阵的相等　除了由式(1.1.2)定义的矩阵 $\mathbf{A}$ 之外，还有另一个矩阵 $\mathbf{B}$：

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1.1.8}$$

所谓矩阵 $\mathbf{A}$ 和矩阵 $\mathbf{B}$ 相等，是指 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 具有相同的阶，而且它们的对应元素都彼此相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n). \tag{1.1.9}$$

这时，可记为

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}. \tag{1.1.10}$$

矩阵的加减　只有同阶的矩阵才能相加或相减。$m\times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 的元素分别为 a_{ij}、b_{ij} 和 c_{ij}，而且

$$a_{ij}\pm b_{ij}=c_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,\ n), \tag{1.1.11}$$

则矩阵 $\mathbf{C}$ 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 和矩阵 $\mathbf{B}$ 的和或差，记为

$$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}=\mathbf{C}. \tag{1.1.12}$$

由于矩阵的加减法归结为它们相应元素的加减法，所以矩阵的加减法满足结合律和交换律：

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}, \\ &\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}. \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

矩阵的数乘 所谓矩阵的数乘，就是用一个数 λ 去乘矩阵 $\mathbf{A}$ 中的所有元素。数 λ 与阵矩 $\mathbf{A}$ 的乘积记为 $\lambda\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}\lambda$。如果矩阵 $\mathbf{A}$ 由式(1.1.2)表示，则

$$\lambda\mathbf{A}=\mathbf{A}\lambda=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{bmatrix}. \tag{1.1.14}$$

不难验证，对任意数 λ 和 μ，矩阵数乘满足：

$$\begin{aligned}&\lambda(\mu\mathbf{A})=\mu(\lambda\mathbf{A})=\lambda\mu\mathbf{A},\\ &(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A},\\ &\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}.\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

三、矩阵的乘法

只有在前一矩阵的列数等于后一矩阵的行数时，两矩阵才能相乘。现有矩阵 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别是 $m\times n$，$n\times p$ 和 $m\times p$ 阶的，而且 $\mathbf{C}$ 中的第 i 行第 j 列的元素 c_{ij} 等于 $\mathbf{A}$ 中第 i 行与 $\mathbf{B}$ 中第 j 列的对应元素的乘积之和，即

$$\begin{aligned}c_{ij}&=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\\ &=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rj} \qquad (i=1,\ 2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,p),\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

则矩阵 $\mathbf{C}$ 就称为矩阵 $\mathbf{A}$ 乘矩阵 $\mathbf{B}$ 的积，并按先 $\mathbf{A}$ 后 $\mathbf{B}$ 的次序记为

$$\mathbf{AB}=\mathbf{C}. \tag{1.1.17}$$

例 1

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1+0+0 & 1+0+0\\ 2+0-1 & 2+0-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

例 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1+1+0 \\ 1+1+1 \\ 0+1+1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

例 3

$$[1 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = [0+0+1+0] = [1].$$

根据矩阵乘法和矩阵相等的定义，方程组(1.1.1)的矩阵形式为

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b}, \tag{1.1.18}$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}.$$

在有限单元方法的理论公式推导中，频繁地使用矩阵的乘法运算，下面较详细地介绍矩阵乘法所具有的性质。

(1) 矩阵乘法满足结合律和分配律：

$$\begin{aligned} &\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B}), \\ &(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC}, \\ &(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}. \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

(2) 矩阵乘法的交换律，一般来说是不成立的，即一般情况下 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$。因为，首先在 **AB** 有意义时，**BA** 不一定有意义。例如，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

则

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

而 **BA** 却没有意义。其次，即使 **AB** 和 **BA** 都有意义，**AB** 和 **BA** 的阶也不一定相同。例如，