线性代数及其应用

张抱膝　孙惠澄　周树棠　编译

南京大学出版社

线性代数及其应用

张抱滕　孙慧澄　周树棠　编译

内 容 简 介

本书包括矩阵和方程组、行列式、向量空间、线性变换、正交性、特征值、数值线性代数等七章。

本书的特点是注重线性代数在物理学、生物学、经济学等方面的应用；全书例题较多，通过例题详细解释引进的新概念；特别是讲述了数值线性代数的基本内容，并介绍了较先进的、也是最重要的一些数值方法。

本书不仅可作为高等学校理工科非数学类专业的教材，而且也是有关科技人员和自学青年的一本较好的参考书。

线 性 代 数 及 其 应 用

张抱滕　孙慧澄　周树棠　编译

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行　　国营阜宁印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 12.1875 字数 27.4千

1986年3月第1版　　1986年5月第1次印刷

印数1—5,000

统一书号：13336·016　　定价：2.55元

责任编辑　秦涛

前　　言

本书是由Steven J.Leon所著“Linear Algebra with Applications”一书经编译而成的。原书于1980年由美国Macmillan出版社出版，作为美国大学二年级或三、四年级的线代数教材。

原书比较重视线代数的应用与数值方法，应用部分分散在有关的章节中而不是集中在某一章，这样更有利于学生理解理论部分的内容，激发学习兴趣。本书涉及到线代数在物理学、生物学、经济学等方面的应用，也十分重视线代数与数学本身的其他分支，如几何、微分方程、函数极值、曲线拟合等方面的联系。由于计算机的广泛使用，线代数理论的应用更紧密地依赖于它的数值方法。本书最后一章给出了当前最重要的一些线代数的数值方法。

为了使其更适合于我国大学生的实际情况，我们做了少量修改，但保留了原书系统与风格。

编译本书的目的是为了给我国理工科大学生（除数学专业外）提供一本内容比较新的适用的线代数教材，所需要的预备知识只有微积分。如果作为一学期50学时左右的教材，本书内容可能偏多。若干章节打了星号是供教师选择的。由于专业不同，学生的实际水平不同，建议使用本书的教师对材料作适当的选择。

此外，本书例题较多，对新概念的引进与解释比较详

细，很容易阅读和理解，所以也适用于科技人员和自学青年的参考书。

下面是原作者对讲授本书的指南，我们推荐给大家作参考。

第 1 章　前两节讨论线性方程组，第 3,4 节是有关矩阵和矩阵代数的。第 5 节的大部分是供选择的，但任课教师应该讲授这一节开头有关列向量记号的部分。在本书的核心章节中已经回避了分块矩阵的乘法运算，只在第 6,7 章的一些打星号的节中用到，因此，分块乘法是否省略可由任课教师决定。

第 2 章　是有关行列式的很短的一章，行列式在讨论线性无关特征值等论题时将用到，应该讲述。

第 3 章　本章给出了向量空间的基本理论，所有 5 节都应该讲。

第 4 章　这一章专门讨论线性变换。任课教师如侧重应用，可以删去这一章的部分或全部。

第 5 章　这是有关正交化和它的应用方面的内容较多的一章。第1,2,3,6,7节的大部分只要有可能都应该讲。第 4 节矩阵范数是供选择的，但它是第 6 章第 7 节和第 7 章最后五节的先行节。最后一节正交多项式也是供选择的，正交多项式在数学的许多方面都起很重要的作用，但在一般的课程中一直未被注意而是删掉的，是否讲述可由任课教师自行决定。

第 6 章　这一章讲述了线性代数中最重要的一个课题：特征值。第1,3节肯定应该讲，第 2 节给出特征值的一个主要的应用，如果任课教师不打算全讲，我们建议可讲到例题 1 为止。第 4 节涉及复矩阵是供选择的，但建议讲一下这一节的开头部分，可使学生注意到复数的情况。第5,6节给出了一些多种类型的应用，教师可选择的讲一些。第 7 节讨论了非负矩阵的Perron-Frobenius定理，这些都是很难的定理，证明因超出了本课程的范围而省略了。但是，这些定理对理解Leontief 输入-输出模式是必须的。这是线性代数最吸引人的应用之一。

第7章　整章都打上了星号，但它对於将要去企业单位工作的学生来讲可能是最重要的一章。对想要在这门课中结合数值运算的任课教师来讲，可以考虑在讲完第1章后立即教这一章的前三节。然后在第5章矩阵范数之后接着讲本章的第4节。奇异分解这一节是重点推荐的。只在最近，这个课题才得到应有的认识，由于它对数值线性代数的重要性我们把它放在第7章里了，但它也可以放在第6章讲。最后两节中提到的最重要的算法是比较先进的，对它们只作概述而没有进行详细的讨论。第9节的理论部分也可放到前一章去讲。

最后，我们要向冯增援老师表示衷心的感谢，他仔细审阅了我们的书稿并提出了许多十分宝贵的修改意见。此外，我们还得到我系许多老师的热情鼓励，南京大学出版社和教材科等同志们的很大支持，在此，我们一并表示衷心的感谢。

编译者

1985年10月

目　　录

1　矩阵和方程组

2　行 列 式

3　向量空间

4　线性变换

1

矩阵和方程组

也许，在数学中最重要的问题是解线性方程组．在科学技术或工业应用中所包含的大量的数学问题中，大约有75％以上会在某一阶段遇到解一个线性方程组的问题．使用近代数学方法，常可使一些复杂的问题简化成一个线性方程组．线性方程组的应用十分广泛，商业学、经济学、社会学、生态学、人口统治学、遗传学、电子学、工程学和物理学等都用到它．因而本书一开始就用一节讨论线性方程组问题．

§1.1 线性方程组

一个含 n 个未知量的线性方程是一个如下形式的方程：

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 都是实数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是未知量．于是 n 个未知量 m 个方程的线性方程组就是

$$
(1)\qquad \begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m
\end{cases}
$$

这里 $a_{ij},b_i(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 全是实数．我们称形如(1)的线性方程组为 $m\times n$ **线性方程组**．

例如

(a) $\begin{aligned} x_1+2x_2&=5\\ 2x_1+3x_2&=8\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1-x_2+x_3&=2\\ 2x_1+x_2-x_3&=4\end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1+x_2&=2\\ x_1-x_2&=1\\ x_1\quad&=4\end{aligned}$

(a)是 2×2 线性方程组，(b)是 2×3 线性方程组，(c)是 3×2 线性方程组．

如果有一个 n 元有序数组(简称 n-元组)$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足线性方程组的所有方程，我们便说 $m\times n$ 线性方程组有一个解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$．

例如，2-元组(1,2)是线性方程(a)的解，因为

$$1\cdot(1)+2\cdot(2)=5$$
$$2\cdot(1)+3\cdot(2)=8$$

3-元组(2,0,0)是线性方程组(b)的解，因为

$$1\cdot(2)-1\cdot(0)+1\cdot(0)=2$$
$$2\cdot(2)+1\cdot(0)-1\cdot(0)=4$$

实际上，线性方程组(b)有许多解．如果 α 是任意实数，易见3-元组$(2,\alpha,\alpha)$是它的解．然而，线性方程组(c)没

有解。从第三个方程得到解的第一个坐标是4。用 $x_1=4$ 代入前两个方程，我们看到 x_2 必须满足

$$4+x_2=2$$
$$4-x_2=1$$

因为没有实数满足这两个方程，所以这个线性方程组没有解。如果线性方程组没有解，我们便说线性方程组是**不相容**的或**矛盾**的。因此，线性方程组(c)是不相容的，而线性方程组(a)和线性方程组(b)是相容的。

一个线性方程组所有解的集合，称为线性方程组的**解集**，如果一个线性方程组是不相容的，则它的解集是空集。显然，一个相容线性方程组必有一个非空解集。为了解一个相容线性方程组，我们必须找它的解集。

2 × 2线性方程组

让我们从几何的角度研究如下形式的线性方程组：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$$

每一个方程可表示成平面上的一条直线。2-元组 (x_1, x_2) 是线性方程组的解的充分必要条件是点 (x_1, x_2) 同时位于两条直线上。例如，考虑三个线性方程组

(a) $\begin{aligned} x_1+x_2&=2 \\ x_1-x_2&=2 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1+x_2&=2 \\ x_1+x_2&=1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1+x_2&=2 \\ -x_1-x_2&=-2 \end{aligned}$

线性方程组(a)表示的两直线相交于点(2,0)，因此，{(2,0)}是(a)的解集。线性方程组(b)所表示的两直线相互平行，因而(b)是不相容的，解集是空集。(c)所表示的两直线实际上是

同一直线，因而直线上任何点都是(c)的解(见图1-1)。

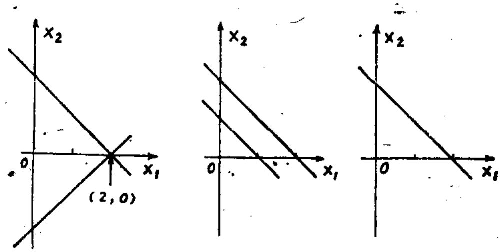

图 1-1

一般地，有三种可能性：两条直线相交于一点，它们相互平行或重合。相应地其解集含一个点，不含点或含无穷多个点。

对于$m \times n$线性方程组，情况是类似的。如果一个相容线性方程组有唯一解，称它是**无关**的；否则称它是**相关**的。在下一节，我们将看到，一个线性方程组的解若多于一个，则它必定有无穷多个解。

等价线性方程组

考虑两个线性方程组

$$
\begin{aligned}
\text{(a)}\quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2\\
x_2 \qquad &= 3\\
2x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(b)}\quad 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2\\
-3x_1 - x_2 + x_3 &= 5\\
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2
\end{aligned}
$$

线性方程组(a)是容易解的，因为从后两个方程得到$x_2 = 3$，$x_3 = 2$。将x_2，x_3的值代入第一个方程，得到$x_1 = -2$。因此，

线性方程组(a)的解是(-2,3,2)。解线性方程组(b)似乎比较困难。实际上，线性方程组(b)和线性方程(a)有相同的解。为了看清这一点，把线性方程组(b)的前两个方程相加

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \\
-3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \\
\hline
 & & x_2 & & & = & 3
\end{array}
$$

如果(x_1,x_2,x_3)是(b)的任意解，它必须满足该线性方程组的所有方程。因而，它必定满足由其中任意两个方程相加所形成的新方程。所以，x_2必须等于3。同样，(x_1,x_2,x_3)必定满足由第三个方程减第一个方程所形成的新方程：

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -2 \\
\hline
 & & & & 2x_3 & = & 4
\end{array}
$$

由此得出$x_1=-2$。因此，线性方程组(b)的任意解必定是线性方程组(a)的解。由同样的论证，可知(a)的任意解也是(b)的解。因而，(x_1,x_2,x_3)是线性方程组(b)的解的充分必要条件是它是线性方程组(a)的解。故两者有相同的解集$\{(-2,3,2)\}$。

定义1.1 含有相同未知量的两个线性方程组，如果它们有相同的解集，就说它们是**等价**的。

显然，如果我们交换线性方程组中两个方程的次序，对解集将没有影响。即仅交换方程次序的线性方程组等价于原来的线性方程组。例如，线性方程组

$$
\begin{array}{l}
x_1+2x_2=4 \\
3x_1-x_2=2 \\
4x_1+x_2=6
\end{array}
\qquad \text{和} \qquad
\begin{array}{l}
4x_1+x_2=6 \\
3x_1-x_2=2 \\
x_1+2x_2=4
\end{array}
$$

显然有相同的解集。

如果用一非零实数乘线性方程组中的一个方程，对解集也没有影响。即新的线性方程组等价于原来的线性方程组。例如，线性方程组

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=3 \\ -2x_1-x_2+4x_3&=1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_1+2x_2+2x_3&=6 \\ -2x_1-x_2+4x_3&=1 \end{aligned}$$

是等价的。

如果把一个方程的倍数加到另一个方程，新的线性方程组仍等价于原来的线性方程组。因为 n- 元组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足两个方程

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n&=b_i \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n&=b_j \end{aligned}$$

的充分必要条件是它满足

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$$

与

$$(a_{j1}+\alpha a_{i1})x_1+\cdots+(a_{jn}+\alpha a_{in})x_n=b_j+\alpha b_i$$

概括起来，对一线性方程组可施行下列三种运算得到一个易于求解的等价线性方程组：

Ⅰ　交换两个方程的次序；

Ⅱ　用一非零实数乘一方程的两边；

Ⅲ　把一个方程的倍数加到另一个方程上去。

$n\times n$ 线性方程组

这一节我们限于讨论$n\times n$线性方程组。

定义1.2　一个线性方程组，如果第 k 个方程的前 k-1 个未知量的系数全是零，而 x_k 的系数异于零($k=1,2,\cdots,n$)，则称为**三角形线性方程组**。

【例 1】 线性方程

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3&=1\\ x_2-x_3&=2\\ 2x_3&=4 \end{aligned}$$

是三角形的。

任何 $n\times n$ 三角形线性方程组都很容易求解。首先，从第 n 个方程解得 x_n 的值。用 x_n 的值代入第 $(n-1)$ 个方程解出 x_{n-1} 的值。再用 x_n 和 x_{n-1} 的值代入第 $(n-2)$ 个方程解出 x_{n-2} 的值。以此类推。我们称解三角形线性方程组的这个方法为**回代法**。

【例 2】 解线性方程组

$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+3x_3-2x_4&=1\\ x_2-2x_3+3x_4&=2\\ 4x_3+3x_4&=3\\ 4x_4&=4 \end{aligned}$$

〔**解**〕 用回代法，我们得到

$$\begin{aligned} 4x_4&=4 & x_4&=1\\ 4x_3+3\cdot1&=3 & x_3&=0\\ x_2-2\cdot0+3\cdot1&=2 & x_2&=-1\\ 2x_1-(-1)+3\cdot0-2\cdot1&=1 & x_1&=1 \end{aligned}$$

因此，得到的解是 $(1,-1,0,1)$。

如果一个线性方程组不是三角形的，我们将有可能用运算Ⅰ和Ⅱ得到一等价的三角形线性方程组。

【例 3】 解线性方程组

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=3\\ 3x_1-x_2-3x_3&=-1\\ 2x_1+3x_2+x_3&=4 \end{aligned}$$

〔**解**〕 第一个方程的-3倍加到第二个方程得到

$$-7x_2-6x_3=-10$$

第一个方程的-2倍加到第三个方程得到

$$-x_2-x_3=-2$$

如果线性方程组的第二个和第三个方程分别由这些新方程表示，便得到等价线性方程组

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &= 3 \\ -7x_2-6x_3 &= -10 \\ -x_2-x_3 &= -2 \end{aligned}$$

如果这线性方程组的第三个方程再用第三个方程及第二个方程的$-\frac{1}{7}$倍的和表示，我们最后便得到等价的三角形线性方程组

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &= 3 \\ -7x_2-6x_3 &= -10 \\ -\frac{1}{7}x_3 &= -\frac{4}{7} \end{aligned}$$

用回代法，得到

$$x_3=4,\quad x_2=-2,\quad x_1=3$$

让我们回过来看例3中的线性方程组。我们可以将未知量的系数按原来相对位置排成一个3×3的表

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

这样的表称为线性方程组的**系数矩阵**。所谓**矩阵**是指一个矩形的数的阵列。横排称行，纵排称列。如果我们在系数矩阵中附加一列，这一列是线性方程组右边的数，得到一个新的3×4矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

我们称这新矩阵为线性方程组的**增广矩阵**。一般地，一个 m 行，n 列的矩阵表示为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

或简记为 $A=(a_{ij})$ $i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$，a_{ij} 称为矩阵 A 的**元素**。

当一个 $m\times r$ 矩阵 B 附加于一个 $m\times n$ 矩阵 A 的右方之后，得到的新矩阵用 $(A\mid B)$ 表示。因此，如果

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{pmatrix}$$

则

$$(A\mid B)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ a_{21} & a_{11} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{array}\right)$$

对每一线性方程组有一增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$