面向21世纪课程教材

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

微积分简明教程

下 册

曹之江 刘元骏 编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

微积分简明教程

下册

曹之江　刘元骏　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材．本书包含七章，内容包括：无穷和，函数的无穷和构造，矢量代数和空间解析几何，多元微分学，含参数积分所定义的函数，重积分，曲线积分和曲面积分．其中无穷和、函数的无穷和构造、含参数积分所定义的函数三章由曹之江撰写，其余四章由刘元骏撰写．本书取材适中，说理透彻，主干脉络清晰，叙述简明流畅，并结合物理背景和数学思想的历史发展，对传统的微积分内容，采用了若干新观点和新讲法，有很好的可读性．

本书可作为大学理工科数学教材，也可供其他各类专业人员学习参考．

图书在版编目(CIP)数据

微积分简明教程．下册/曹之江，刘元骏编著．—北京：高等教育出版社，2000(2001重印)

面向21世纪课程教材

ISBN 7-04-007881-3

Ⅰ．微… Ⅱ．①曹… ②刘… Ⅲ．微积分-高等学校-教材 Ⅳ．0172

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第55396号

微积分简明教程　下册

曹之江　刘元骏　编著

出版发行　高等教育出版社

社　　址　北京市东城区沙滩后街55号　　邮政编码　100009

电　　话　010-64054588　　传　　真　010-64014048

网　　址　http://www.hep.edu.cn

经　　销　新华书店北京发行所

排　　版　高等教育出版社照排中心

印　　刷　北京外文印刷厂

开　　本　787×960　1/16　　版　　次　2000年7月第1版

印　　张　21.5　　印　　次　2001年4月第2次印刷

字　　数　390 000　　定　　价　18.30元

前　言

一、现代数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索物质世界运动机理的主要手段. 对于现代的工业技术和现代化工程而言，数学则更是表述技术原理、进行复杂的工程设计与计算的必不可少的工具. 特别地，在计算机技术快速发展的今天，现代化产业和经济的组织与管理，也已完全不能离开数学所提供的方法和技术. 这一切都使得现代数学课程不仅在大学理工科中占有了举足轻重的基础地位，而且在整个高等教育中，其作用也日重一日.

对大学的理工专业而言，现代数学的教育，其意义则远不仅仅是一种工具或技术教育而已. 中外大量教学实践的事实充分显示，优秀的数学教学，乃是一种人的理性思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在能动性和创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

二、然而另一方面，大学里的数学教学，却历来效果低下. 据知大学的数学课程，其授业情况一直是不佳的，相当数量的大学生，视数学为畏途，茫然不知其所云. 数学的真正及格率，虽无统计，但实际上一直跌落在相当低下的水平. 大学数学教学的实际成效，与现代数学在当今科技与文化中的非凡地位，适成反照. 这种低效状况，更因为数学在大学教育中的基础地位，而尤显得影响深远，其负面后效是绝不容忽视的.

上述情况究其成因，是多方面的. 若仅从数学教学内部来看，则主要关联到数学的特殊个性.

人们一向习惯于把数学视为科学，殊不知现代数学，乃是一种倚托在形式符号系统上的思辨技术，它与寻常的、对客观物质现象进行实验、观察并据此作出归纳分析的自然科学，有着本质上的不同. 这就使得对数学的认知，也必然与众不同，特别是数学的抽象形式系统与符号语言，由于与常人的直接经验相距千里，这就更加先天地造成了数学认知上的障碍与难度.

三、微积分学是大学数学的主体成分，随着 21 世纪的到来和知识经济的发展，微积分几乎成为大学里一切专业都需要学习了解的课程，这就更加加重了这门古老课程改革的压力. 与其他数学课程相比，微积分由于老而大，使得它的改造显得更加复杂和繁难.

在当今微积分教学中，最具有现实迫切性的问题是如何改变教学的形式化倾向与低效，也就是如何有效地克服教学中的认知难度，做到较大幅度地提高合格率，使得有较高比例的学生达到真正合格或优秀的成绩.

本书就是在这一动机下编写的.

本书的编写要旨：

(1) 抽象数学的物质化(返朴归真)，克服学生在数学认知上的心理障碍.这里包括注重微积分的物理背景，各类应用模型，以及抽象概念的演化发展等.

(2) 使学生切实地掌握专业工作所需要的数学工具和语言手段，作为教学的第一目的.做到教师的教学行为与学生的学习动机的统一.

(3) 坚持有思想内蕴和结构原理的数学教学(有灵魂的数学教学)，使学生不仅求得数学的真才实学，而且受到创造精神的启发.只有原理透彻的数学教学，才能真正达到教学的生动活泼、启人智慧、培育理性思维素质.在教学上，固然要克服数学的抽象化和形式化带来认知上的负面影响，同时更要坚持基本而必要的抽象化和形式化的科学工作方法的学习和训练.

(4) 本教材主要重在微观教学的改革，宏观上基本不变动传统微积分教材的体例和内容，以求与当前教学实际的适应与衔接.在局部章节采用一些新观点、新讲法，使主体内容与思想清晰明了，并设法消解教学上的难点.

微积分学是人类文明发展史上理性智慧的精华，历来为大学数学课程体系中的主干，它传授给人们的不仅仅是一种高级的数学技术，从现代教育的观点来看，现代数学教育更是一种高雅的、渊源于西方文明的理性主义文化的传输.而这种文化素养，业已成为当今时代中的社会成员所必需，特别是在科技、教育、管理岗位上，以至在一切社会的上层建筑任职的人员所必需，因此成功的、优秀的数学教学，必不是那种囿于狭窄的功利主义观念下的没有生气、没有灵魂、死记硬背式的唯工具教育.

由于作者水平及条件所限，本书中不当与差错之处在所难免，恳希得到广大读者及国内同仁们的批评指正.

郝敦元、陈国庆、朱瑞英、于素芬、杨联贵、朝鲁等同仁分别在数理基地班、数学专业、物理专业、计算机专业及工业大学试验班等5个不同学科专业班级试用了本教材，并取得了成功的经验.他们的试点经验成为本书定稿的重要借鉴.邓东皋(中山大学)、秦曾复(复旦大学)、邓宗琦(华中师大)三位教授作为本书主审，认真而细致地审读了全稿，并提出了十分中肯的评价与修改意见.参加本书审稿的还有北京大学、吉林大学、四川大学、东北师大、武汉大学、湘潭大学、山东大学、郑州大学、浙江大学等校代表，他们都提出了很好的意见.萧树铁(清华大学)、姜伯驹(北京大学)两位教授分别代表教育部的“面向21世纪非数学专业高等数学课程体系和教学内容改革研究”课题组和高校理科数学力学教学指导委员会，签署意见推荐本书为“面向21世纪课程教材”.为此作者在本书付梓之际，谨向他们一并表示深切而衷心的感谢!

作 者

1999年5月

目　　录

注. 凡注 * 号的章节段落,其数学推证部分不一概要求读者熟练掌握,但对其内容均须有较好了解并能加以运用.

第六章 无 穷 和

§1 数项级数

1. 基本概念

假如把数学当作为一种运算的科学的话，则微积分学本质上乃是一种涉及超越加、减、乘、除及乘方、开方等代数运算的运算科学. 例如在第一章里，我们所提到的基元函数——三角与反三角函数、指数与对数函数以及无理指数的幂函数等，都代表了一种超越运算，而且我们已经把这几类特殊的超越函数规范化了，使它们成为构造其它各种衍生的超越函数(即所谓初等函数)的基元. 除此以外，我们在数学物理以及各种应用科学领域里，还将遇到各种代表着万千种不同的超越运算的非初等函数. 于是为了使得微积分学成为一种合理而有效的运算科学，我们必须做到：(1)对所有这些规范的或未规范的"超越运算"，作出严格的既合乎逻辑又合乎经验的论理；(2)指出如何去实现这些"超越运算"的确实途径. 由于我们经验所及的运算仅仅是代数运算，因此超越运算的诠释，事实上就是超越函数的代数化，即如何用代数运算逼近和表现超越运算. 本章与下章，我们将从严格的意义上讨论并解答上述问题.

令$\{u_n\}(n=1,2,\cdots)$为实数列. 则它的无穷项形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为**无穷级数**，简称级数. u_n 称为**级数的通项**(或一般项).

对应于一个无穷级数，可有一个相应的**部分和序列**$\{S_n\}(n=1,2,\cdots)$，其中

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

反过来，对于一个任给的序列$\{S_n\}$，可以对应有一个无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中 $u_1 = S_1, u_n = S_n - S_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，它以$\{S_n\}$为部分和序列. 由此可见，无穷级数的理论，与序列变量的理论息息相关.

定义 6.1 令 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为无穷级数，$\{S_n\}$ 为其部分和序列. 若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在，则称 S **为无穷级数** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **的和**，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 此时无穷级数称为是**收敛的**，否则称为是**发散的**.

例 1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots$，注意到 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$，于是得部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

从而有 $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$，按定义知级数收敛，而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

例 1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi = -1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^n + \cdots$

此时可有 $S_n = \begin{cases} -1, & n \text{ 奇数} \\ 0, & n \text{ 偶数}. \end{cases}$

于是 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$ 发散.

例 1.3 $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$

此时 $S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-r^n}{1-r}, & r \neq 1 \\ n, & r = 1. \end{cases}$

于是知当 $|r| < 1$，$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$，级数收敛. 当 $|r| \geqslant 1$，$\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，级数发散.

由上面论述可知，一个无穷级数，只有当它是收敛时，才有“和”. 因此“无穷和”与我们寻常所了解的有限项相加，是本质上不同的. 这意味着对于无穷和的任何运算性质，必须从数学上重新经过严密审定，而不能凭经验去随意运作. 这里，我们先来考虑一下无穷和有哪些与有穷和相似的运算性质？

定理 6.1

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，a 为任一常数，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a u_n$ 也收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a u_n =$

$a\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 均收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 也收敛,且 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ $=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}v_n$.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 更改或增、减有限项的值,不改变级数原来的收敛、发散性.

证明仅需运用序列极限的简单运算性质,读者可自行作出.

对于一个有限项组成的和,若我们在和式中对被加项预先作任意的组合,然后再求和,则总的和值不变.例如

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$$
$$=(a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5)+a_6,$$

这称为代数和的结合律.对于无穷和而言,我们指出,上述的“结合律”仍然成立.设给定无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$,我们对无穷的被加项在不更动项的前后顺序的情况下,预先作任意的组合再求和,例如对 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 作组合求和

$$\begin{aligned}&(u_1+u_2+\cdots+u_{n_1})\\&+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots\\=\;&v_1+v_2+\cdots+v_k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}v_k\end{aligned}\tag{1.1}$$

级数重组后得到一个新的级数 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$,其中 v_k 是原级数中按顺序第 k 个组合项.现在提出问题,若原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是收敛或发散的,则组合后的级数 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ 是否保持原来的收敛性或发散性?

定理 6.2 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为收敛级数,$\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ 为(1.1)所示的被加项经组合后所得级数,则 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ 收敛,且 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

证明 令 S_n 表示 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和,Ω_k 表示 $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ 的部分和.则由(1.1)知 $\Omega_k=S_{n_k}$,于是知 $\{\Omega_k\}$ 是 $\{S_n\}$ 的子序列.据第二章 §1,知收敛序列的任何子

序列收敛至同一极限. 这就推知

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \lim_{k\to\infty} \Omega_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad \square$$

定理的逆命题不真. 即组合后的级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛, 不能推断原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 例如例 2 中所示级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$, 若依次进行两两组合, 即得

$$(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)+\cdots=0+0+\cdots+0+\cdots=0$$

组合后的级数收敛, 但原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi$ 发散. 因此我们不能以组合后的级数的收敛, 来推断原级数的收敛. 但我们可以按照组合后的级数的发散性, 推断原级数的发散性(定理 6.2 的逆否命题).

例 1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ 对级数的项进行如下的组合:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)+\cdots$$

其中 $v_1=\frac{3}{2}>\frac{1}{2}, v_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}, v_3=\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2},\cdots,$ $v_k=\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}>2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2},\cdots$ 这说明 $\Omega_k=v_1+v_2+\cdots+v_k>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}=\frac{k}{2}\to\infty\,(k\to\infty)$. 据定理 6.2 的逆否命题, 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

一个有限项的和, 若任意更改被加项的前后顺序, 其和不变. 这称为代数和的交换律. 对于无穷和(无穷级数)而言, 是否也有"交换律"? 我们在本章后面章节将证明, 对于某类收敛的无穷级数, 若无穷次更改被加项的前后顺序, 可以改变级数的和, 甚至还可以将收敛级数改变为发散级数. 因此对无穷和一般不满足"交换律".

无穷级数理论的首要而基本的问题, 是收敛与发散性的判别. 本章将主要致力于讨论这一问题.

定理 6.3 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim u_n = 0$.

证明 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$, 则按假定可有 $\lim S_n=\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 由于 $u_n = S_n - S_{n-1}$, 于是得

$$\lim u_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0. \quad \square$$

定理的逆命题不成立.如$\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

*2. Cauchy 收敛准则

一个无穷级数(或它的部分和序列)的收敛性,是由极限$\lim S_n=S$存在来定义的.按极限的定义,所谓极限$\lim S_n=S$存在,须预知或即时估出极限值S,进而证明当$n\to\infty$时,差值$|S_n-S|$可以达到小于任给的正数.但是我们在更多的场合,对于一个无穷级数或部分和序列,并不能预知它是否有极限值或极限值是什么.因此怎样从一个无穷级数或部分和序列自身,去判别它是否收敛?在第二章§1,我们曾经指出过若干这类判别准则(如单调有界列有极限或夹逼收敛定理),但它们都是对满足特殊条件的序列而言才有效.下面我们将指出对一般的序列(或级数)的收敛判别准则——**Cauchy 准则**.

定义 6.2 设$\{x_n\}$为实数列.若$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,只须$n,m>N$,便有$|x_n-x_m|<\varepsilon$.则称$\{x_n\}$为一**基本列**或 **Cauchy 列**.

由定义可见,所谓基本列,就是当$n\to\infty$时,序列中足码充分大的任两个值的差,都可以小于任何给定的值.这说明基本列就是尾值有无限“凝聚”趋势的序列.

在定义 6.2 中,若令$m=n+p$,其中p为正整数,则定义条件可改述为:$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,当$n>N$且对于任何正整数p,均有$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

显然,任一收敛的序列$\{x_n\}$必为基本列.令$\lim x_n=l$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,当$n,m>N$,便有$|x_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}$,$|x_m-l|<\frac{\varepsilon}{2}$,于是$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-l|+|x_m-l|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.因此收敛列,必是无限“凝聚”的,而极限值正是“凝聚核”.

反过来,基本列是否必是收敛列呢?即具有“无限凝聚”趋势的序列是否必有极限?这就要取决于数域本身的“严实”性.为此,我们举出有理数域上序列

$$x_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

的例子.由于$|x_{n+p}-x_n|=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+p)!}<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^p}\right]<\frac{2}{(n+1)!}$,因此很容易说明$\{x_n\}$是一个基本列.但是若在有理数域上考虑,$\{x_n\}$不是一个收敛列,它在有理数域内无极限.事实上,$\{x_n\}$虽然是“无限凝聚”的,但它的“凝聚核”是无理数 e,不在有

理数域内.因此只有在"严实无隙"(即连续的)实数域内考虑,$\{x_n\}$才有极限,且 $\lim x_n = e$($\lim x_n = e$ 的事实将在下章证明.e 是无理数的证明本书从略).

定义 6.3　一个数域,若其上的任何基本列必是收敛列,则称为是**完备**的.

因此,所谓完备的数域,就是收敛列与基本列等价的数域.那么,什么样的数域是完备的呢?我们自然就会想到,具有连续性的实数域,是一个具有足够"严实性"的完备数域.事实上,我们可有更为深入的结论.

定理 6.4　实数域具有下述性质并且它们互相等价.

(A)　连续性.

(B)　有上(下)界的集必有上(下)确界.

(C)　单调有界序列必有极限.

(D)　完备性.

证明从略.有兴趣的读者可尝试自行证明性质(A)、(B)、(C)、(D)间的等价性.(参阅[1]*)

根据实数的完备性,即可得

定理 6.5　**(序列收敛的 Cauchy 准则)**

实数列$\{x_n\}$($n = 1,2,\cdots$)收敛　$\Leftrightarrow$　$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$,只须 $n > N$,便有 $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$,其中 p 为任一正整数.

对于无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$,令 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$,则 $S_{n+p} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k$,于是可得相应的 Cauchy 准则.

定理 6.5′　**(无穷级数收敛的 Cauchy 准则)**

设$\{u_n\}$为实数列.则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件为 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$,当 $n > N$ 便有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_n\right| < \varepsilon$.其中 p 为任一正整数.

附注　基于连续变量极限与离散变量极限的关系(见第二章§2),由定理 6.5,我们可以得到关于**连续变量极限存在的 Cauchy 准则如下**

定理 6A　**(函数极限的 Cauchy 准则 1)**.

设 $f(x)$在$[a, \infty)$上定义.则极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在　$\Leftrightarrow$　$\forall \varepsilon > 0$, $\exists A \in [a, \infty)$,使对于任何点 $x', x'' > A$,都有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

证明从略.

---

* 《实数的构造理论》,王建午,曹之江,刘景麟编著,高等教育出版社,1979.

对于在有限点上的连续变量极限,同样可有

定理 6B **(函数极限的 Cauchy 准则** 2)

设 $f(x)$ 在 $0<|x-a|<r$ 上定义. 则极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使对于任何点 x', x'' 满足 $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$, 便有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

证明从略.

§2 正项级数

1. 第一比较判别法

一个无穷级数,除有限项外,各项值均为非负,则称为**正项级数**,若仅从收敛发散的角度来考虑问题,则各项值均为负的级数,也可视为正项级数(带负号的正项级数)处理.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数, $u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$, 令 S_n 表示级数的 n 项部分和. 则 $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}\geqslant S_n$, 因此正项级数的部分和序列 $\{S_n\}$ 是单调递增的. 从而根据单调有界列必有极限,即可得

定理 6.6 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和序列 $\{S_n\}$ 有界.

由于正项级数部分和序列是正的单调列,因此它的收敛、发散性可以分别用记号 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n<\infty$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\infty$ 来表示(注意非正项级数不能用上述记号表示收敛、发散性.)

正项级数收敛发散的判别论证,是无穷级数理论的基础,其主要原理基于比较判别法(读者可回顾无穷积分的收敛、发散性判别论证).

定理 6.7 **(第一比较判别法)**

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 均为正项级数, $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\cdots)$, 则有

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n<\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n<\infty$

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\infty$.

证明 (A)令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$, $\Omega_n=\sum\limits_{k=1}^{n}v_k$, 则由假设可得 $S_n\leqslant\Omega_n\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k$,