

岩土工程数值方法

[美]C.S.德赛 J.T.克里斯琴 主编

卢世深 潘善德 王鍾琦等译

罗 焕 炎 总 校

中国建筑工业出版社

183

岩土工程数值方法

[美] C. S. 德 赛 主编
J. T. 克里斯琴

卢 世 深 潘 善 德 王 鍾 琦 等译
罗 焕 炎 总 校

中国建筑工业出版社

全书前四章包括基本理论和各种数值法的公式化步骤、地质介质的本构定律和不连续介质的分析等,后十七章论述了一系列岩土工程专题中的应用。每章均由该领域的国际知名专家和学者执笔,分别包括各有关专题的理论和专论、在设计和分析方面的应用以及计算方法的数值特性。章末附有参考文献,书末附有英汉和汉英专题名词索引。

本书可供从事岩土工程的科研、教学、勘察、设计人员以及有关专业的研究生和大学生参考。

2160 65

Chandrakant S. Desai John T. Christian

NUMERICAL METHODS

IN GEOTECHNICAL

ENGINEERING

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1977.

* * *

岩土工程数值方法

卢世深 潘善德 王鍾琦 等译

罗焕炎 总校

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷(北京阜外南礼士路)

*

开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 36 $\frac{3}{4}$ 字数: 884 千字

1981年8月第一版 1981年8月第一次印刷

印数: 1—2,800册 定价: 5.65元

统一书号: 15040·3954

校 者 的 话

本书涉及岩土工程的各个领域，内容十分丰富，适合于有关专业的技术人员和高等院校师生阅读。全书由23位国际知名专家和学者分章撰写，体现了各人的专长。

书中对于数值法的理论和应用进行了比较全面的叙述，反映了七十年代的研究成果。对于岩土介质的应力-应变的本构关系作了比较详尽的论述，为数值模拟创造了有利条件。书中特别强调了数值模拟同室内实验和现场量测相结合的重要性，这样能使数值法在室内模拟和现场试验之间起到桥梁作用，是解决模型比例因子这个难题的可能途径。非连续介质问题是岩土工程设计中处理最困难和要求最迫切的课题，本书介绍了近十年来室内实验和数值分析在这方面的一些初步成就，并指出了今后的研究目标和方向。

在岩土介质的动态分析和波导性方面，书中作了系统的介绍，包括了岩土动力学方面的一些最新成果，对于抗震设计很有参考意义。

应该指出，本书的理论叙述比较多，这对于从事设计施工实际工作的专业技术人员和初学数值法的读者，在阅读上会有一定的困难。此外，对于在岩土工程中经常面临的三维空间问题，书中介绍得较少，这也是岩土工作者有待努力突破的问题。因此在数值计算上必须做到能利用小型计算机处理大型课题，否则数值方法在岩土工程中的应用会受到很大的限制与发展。

本书在组织翻译时，首先注意到译者们的专业特长与外文水平，他们对所分担的有关章的内容均较熟悉并有一定研究，译文力求通畅易懂不失原意，专题名词统一译出，尽量避免混淆，书末附的专题名词索引英汉对照部分的页码按原书页码排出，便于读者阅读原书，同时我们编出了汉英对照的专题名词索引、页码则按翻译的本书编排，一并附在书后供读者参考。书中的外国人名仍用原文，便于对照查找各章末所附的参考文献。在翻译中发现原书中有错误和疑问的地方，分别在文下用译注加以说明。对明显的印刷错误都在译文中作了改正。在校编过程中虽然想做到全书前后一致，但由于各章的作者的文笔不一，译者的专业惯用词汇的差异，所以只能在每章内加以统一。

本书各章译校分工如下：第一章和第十七章由国家地震局地质研究所数学模拟组助理研究员潘善德译，第二章和第三章由中国建筑科学院勘察技术研究所副总工程师王锺琦译，第四章和第十八章由中国科学院地质研究所副研究员孙广忠译，第五章、第七章、第十章和第十五章由交通部科学研究院高级工程师卢世深译，第六章由纺织工业部纺织设计院高级工程师陈麟书译，第七章由纺织工业部纺织设计院高级工程师夏祥圭译，第八章和

第十二章由湖南大学土木系讲师王贻荪译、副教授周光龙校，第十一章由纺织工业部纺织设计院工程师黄世铭译，第十三章由纺织工业部纺织设计院高级工程师崔福鑫译，第十四章由中国建筑科学院勘察技术研究所副总工程师陈雨孙译，第十六章和第二十一章由电力工业部西北电力设计院主任工程师周序源译、工程师施国宾校，第十九章和第二十章由国家地震局地质研究所数学模拟组助理研究员王启鸣译。专题名词英-汉对照部分由崔福鑫译，王锺琦、罗焕炎校，专题名词汉-英对照部分由崔福鑫编译，有些名词的译法征求和采用了卢肇钧、林在贯、张倬元、孔德坊的意见。

全书由国家地震局地质研究所研究员罗焕炎总校。

我们欢迎读者提出批评指正意见。

1980年3月1日

前 言

近二十年来,根据有限单元、有限差分、积分方程以及特征线法等建立起来的数值方法,在其能力和可用性方面都取得了巨大进展。为岩土工程学中广阔范围的问题的分析、设计开辟了一个新的纪元,并且已经能够处理包括复杂因素(非线性性状、动荷载、不连续性和非均质性)的分析和设计问题,如果用过去已有的严格解法和实验方法来处理这些因素是不容易的。数值法之所以取得惊人的进展,大型、高速计算机是起了不可缺少的重要作用的,因为它使数值法变得高效而经济。今天,数值计算方法已经被采纳并应用于实际,而且在大多数高等院校中已被列为科研和数学内容。然而目前对其理论和应用还缺少统一的论述。本书的基本目的就是要对岩土工程领域内的数值法提供这样一种统一的论述。本书综合了一些不同经历和不同国家的知名研究者的经验和学识。

前四章包括了基本理论和各种数值法的公式化步骤、地质材料的本构定律和不连续介质的分析等。其余十七章论述了在一系列岩土工程专题中的应用。每章均由各特定领域中一位或几位知名的研究者执笔,分别包括各有关专题的理论和专论、在设计和分析方面的应用以及计算方法的数值特性,作为对使用者的一种辅助。

要能够根据任何数值方法做出现实的解答,主要的是须对地质材料的性能有适当的了解。本书对过去使用过的本构定律的适用性和限制性进行了综合评述。也提出了对应力-应变法则的改进及其新发展的建议和意见,由数值计算所得的资料的使用和解释需要慎重和判断。往往有这种情况,即某一计算方案对某一组问题则可能是有缺陷的。象收敛性和稳定性这样一些计算特征就能很好地表明能提供可靠结果的某种方法的适用性。关于这类资料,只要能找到,会有详尽的内容,足以帮助使用者选择最适用的方法并采用最适当的空间和时间网格。

本书的主要目的之一是阐明并显示数值法在其应用方面的潜力。各章都包括了实际问题的典型示例以及数值解同现场或试验室观测之间的相关性。有时还附有设计指南和图表。

本书的编写意图是要使它能够做为了一本教科书、做为实际工作者的一项工具,并且做为研究工作者的一個提纲。利用前四章并从其余章节中选用一些需要的资料就可以作为一个或两个数程的课本。学生应该具有力学、材料力学、数学、矩阵代数和材料性能等方面的基础知识并对岩土力学有所了解。实际工作者在分析和设计很多实际问题以及在了解数值计算技术的应用范围及其限制性方面都可以借助本书。而研究工作者将能在本书中找到最新情报和参考资料的来源。

目前,工程界正处于单位体系的改变过程中。英语国家把从传统的英制单位向SI制(国际单位制——译注)单位的转换称之为“米(公)制化”,但在通用米(公)制单位同SI制规定的单位之间也还存在着重大差别。本书中尽可能采用了SI制单位,但由于很多实际资料来自以往多年的研究和实践,其成果往往是以不同于SI制的单位提出的。如果全

部都换算成SI制，既行不通也不现实，因而在很多情况下仍保留了其原用单位。这样做也并不致于带来混乱，因为所有单位都予以标明，而且也没有采用本书读者所不熟悉的那些单位体系。

编者感谢撰稿人给予的合作和支持。感谢 麦克·格劳—希尔图书公司（Mc Graw-Hill）由于他们的协助和努力使本书得以出版。还要感谢 G.C.Appel 和 H.G.Poulos 为本书审阅了几章原稿。

C. S. 德 赛

J. T. 克里斯琴

目 录

校者的话

撰稿人一览表

前言

第一章 引言、数值方法和专题 1

- 1-1 引言 1
- 1-2 有限差分法 3
- 1-3 精度、收敛性和稳定性 5
- 1-4 另一些方案 6
- 1-5 边界条件 8
- 1-6 有限差分法的例子 9
- 1-7 不连续性 12
- 1-8 有限单元法 13
- 1-9 形成有限单元公式的另一些例子 23
- 1-10 非线性分析方法 26
- 1-11 瞬时或传播问题的处理 28
- 1-12 方程的求解 29
- 1-13 特征线法 30
- 1-14 边界-积分-方程法 33
- 1-15 快速富氏变换 35
- 1-16 有限单元法的数值特征 36
- 1-17 专题 37
- 1-18 有关应用的情况 40

附录1A 42

1A-1 收敛性和稳定性 42

1A-2 有限元方案的稳定性准则 43

参考文献 44

第二章 地质介质的本构定律 48

- 2-1 论述 48
- 2-2 应力-应变性状 53
- 2-3 非线性特征 58
- 2-4 粘滞性状 77
- 2-5 荷载反向 80

参考文献 82

第三章 粘塑性——描述土的性状的

广义模型 85

3-1 引言 85

3-2 两相的孔隙介质分析的基本假设 85

3-3 土骨架的弹粘塑性特征 87

3-4 土力学中理想的和取决于应变的粘
塑性势的特定型式 89

3-5 土的粘塑性问题的有限单元公式化 96

3-6 粘塑性公式化的一些应用实例 100

附录3A 106

附录3B 106

参考文献 107

第四章 不连续岩体的有限单元分析 109

4-1 不连续岩体 109

4-2 节理的力学性质 110

4-3 节理有限单元 113

4-4 模拟真正节理性质迭代解 117

4-5 在岩石计算中可考虑节理的替换
方法 125

参考文献 128

第五章 梁、板和铺面 130

5-1 引言 130

5-2 岩土工程的若干方面 132

5-3 弹性连续介质上的梁 135

5-4 数值计算例 147

5-5 铺面的有限单元分析 151

参考文献 153

第六章 浅基础 155

6-1 模型的建立 155

6-2 若干数值分析的结果 156

6-3 土参数的选择 163

6-4 设计和分析 167

参考文献 168

第七章 深基础 170

7-1 引言 170

7-2 岩土工程方面的考虑 172

7-3 数值方法 173

7-4 应用与设计分析 177

参考文献 195

第八章 打桩性状的波动方程分析.....197	12-2 有限单元公式化: 泛函最小化.....291
8-1 引言.....197	12-3 编程序的考虑.....299
8-2 数值分析法.....197	12-4 应用.....301
8-3 问题在岩土工程方面的情况.....202	12-5 推广及未来的发展.....305
8-4 应用及设计分析.....204	参考文献.....306
8-5 计算机代码.....212	第十三章 膨胀性土中的基础.....307
附录8A 一维波动方程的推导.....212	13-1 引言.....307
附录8B 临界时间间隔.....213	13-2 岩土工程的若干方面.....307
参考文献.....213	13-3 设计中的考虑.....313
另选的附加参考文献.....214	13-4 数值方法.....315
第九章 横向承载桩.....215	13-5 应用.....320
9-1 引言.....215	参考文献.....328
9-2 岩土工程的若干方面.....217	第十四章 孔隙介质中的渗流.....330
9-3 数值方法.....222	14-1 引言.....330
9-4 应用.....227	14-2 岩土工程的若干方面.....330
附录9A.....231	14-3 数值方法.....331
9A-1 严格解和级数解的推导.....231	14-4 应用及设计分析.....342
9A-2 级数解法.....233	14-5 节理介质中的水流.....360
参考文献.....233	附录14A 述评.....361
第十章 桩基础的沉降.....235	参考文献.....362
10-1 引言.....235	第十五章 挡土结构的静力分析.....367
10-2 问题在岩土工程方面的情况.....236	15-1 引言.....367
10-3 数值分析.....237	15-2 用于挡土结构的数值方法的回顾.....367
10-4 应用和设计分析.....253	15-3 数值分析的作用.....370
参考文献.....261	15-4 有限单元法的应用.....371
第十一章 单向固结.....263	15-5 拉杆墙的分析——特殊情况的研究.....377
11-1 引言.....263	参考文献.....380
11-2 理论.....264	第十六章 填方与挖方.....383
11-3 分析方法.....268	16-1 引言.....383
11-4 适用于多层体系的有限差分法.....269	16-2 物理模型.....383
11-5 用有限差分法计算固结过程的计算机程序.....271	16-3 材料特性的模拟.....389
11-6 有限单元公式化.....272	16-4 设计应用.....390
11-7 整体的有限单元关系.....277	16-5 工作量、费用和分析的价值.....397
11-8 整体有限单元方程解.....278	参考文献.....398
11-9 用有限单元法计算固结过程的计算机程序.....278	第十七章 数值模拟和物理模拟.....402
11-10 一个实例.....280	17-1 引言.....402
11-11 方法对比.....284	17-2 问题在岩土工程方面的情况.....406
参考文献.....285	17-3 数值方法.....410
第十二章 二维和三维固结.....287	17-4 应用与设计分析.....412
12-1 岩土工程的背景及数学推导.....287	参考文献.....425

第十八章 裂隙岩体中的地下洞室的

稳定性分析428

18-1 引言428

18-2 实用岩体力学模型431

18-3 程序433

18-4 维尔(Wehr)地下电站岩石力学的
研究436

18-5 阿尔特米尔隧洞448

18-6 布来姆试验洞455

参考文献459

第十九章 土对地震波的放大作用461

19-1 线性材料的三维波动方程461

19-2 平面波464

19-3 SH波的放大作用465

19-4 地震运动的放大作用471

19-5 有限差分模型479

19-6 有限单元模型485

19-7 非线性的土放大作用488

19-8 结束语490

参考文献490

第二十章 二维和三维动态分析492

20-1 基本设想, 弹性材料492

20-2 阻尼498

20-3 逐步解法504

20-4 非线性材料506

20-5 边界条件507

20-6 实际应用的考虑511

20-7 其他考虑512

20-8 例子513

参考文献516

第二十一章 塑性理论的稳定性分析517

21-1 引言517

21-2 破坏准则517

21-3 流动法则518

21-4 应力方程520

21-5 应力方程的数值积分521

21-6 特殊情况525

21-7 速度方程528

21-8 实例问题530

附录21A531

例题21A-1 柯西问题的

数值解532

例题21A-2 Coursat问题的

数值解533

例题21A-3 混合问题的

数值解534

参考文献535

专题名词索引536

英一汉对照部分536

汉一英对照部分555

第一章 引言、数值方法和专题

作者: Chandrakant S. Desai 和 John T. Christian

译者: 潘 善 德

1-1 引 言

解决工程科学问题的数值方法近十年来已有了很大的发展。由于大型高速电子计算机的使用就使得这些方法的普及性和灵活性都有了很大的加强。

在过去,土力学和岩石力学主要是被看作经验的学科。地质体的天然状态所存在的许多复杂性使得很难进行解析解。Terzaghi¹所做的开创性工作对这些题目的许多方面都给出了科学的和数学的基础。在这些工作中,常常假设解是从控制物理系统的微分方程得出来的。毋需多说,为了得到解析解许多简化的假设是必须的。虽然,对于许多实际情况来说,这种方法提供了有用的解。但是,对于象非均匀介质、非线性材料性状、现场应力条件、材料性质的空间和时间变化、几何形状的任意性、不连续性以及由地质学特征所引起的一些其他因素等那样的复杂性问题来说,这种方法是不能产生真实解的。

很幸运的是,岩土工程师也是一个首先认识到这种新发展的数值方法是能用来考虑若干这类因素的。因之,近十年来土力学和岩石力学问题数值法的应用已有了快速的增长。

最广泛使用的方法

有限单元法和有限差分法看来在岩土工程中最普通的方法。另一些数值计算方案,例如控制方程的数值积分、特征线法、边界积分方程法以及把严格法和数值计算相结合来

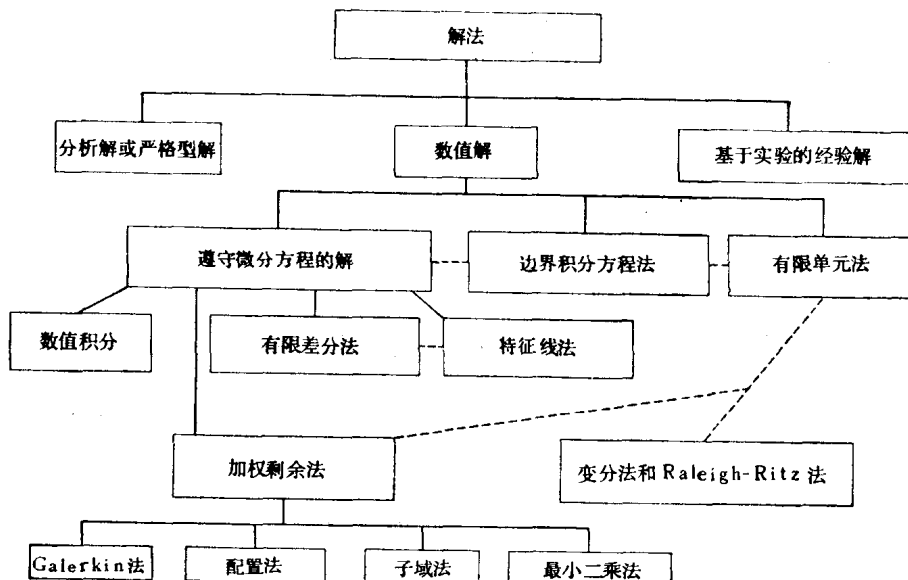


图 1-1 数值法²

解控制方程的方法，也已被使用。一些通用的方法已经在图1-1中表示出来了。

基本原则

绝大多数的数值法是以离散化原则为基础的。用简单的术语来说，离散化原则可被定义为把大范围上的复杂问题分解为或离散化为许多较小的等价单体或组分的一个方法。今后，我们将见到离散化是具有不同形式的。例如，在有限差分法中我们所考虑的是离散基本的控制方程，而在有限单元法中离散的则是构成这系统的物体或连续体。

问题的分类

岩土工程问题可分为稳定的（或平衡的），瞬时的（或传播的）和特征值^{3,4}。表 1-1 给出了这些类型的某些专题。例如，在下面我们叙述了某些初等问题及其对应的微分方程。

问 题	类 型	方 程
在多孔刚性介质中的稳定流或渗流	稳定的或平衡的	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (1-1)
一维固结作用	瞬 时 的	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ (1-2)
一维波的传播	瞬 时 的	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (1-3)
基础的自然频率	特 征 值	$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ku = 0$ (1-4)

此处（未知的）应变量 u 可具有不同形式，例如可取为流体势，孔隙水压力和位移； m 为质量以及 k 为常数。

岩 土 工 程 问 题 的 类 型

表 1-1

稳 定 的 或 平 衡 的	瞬 时 的 或 传 播 的	特 征 值
地基，边坡，河岸，隧道和其他结构的静态应力变形分析 稳定态的流体流动	地基，边坡，河岸，隧道和其他结构在与时间有关的力的作用下应力变形性状 粘弹性分析 固结 瞬时流体流动和弥散 波的传播	地基和结构的自然频率

在数学文献中，方程（1-1），（1-2）及（1-3）分别被分类为椭圆型，抛物型和双曲型。这些方程是普遍方程。

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (1-5)$$

的特殊情形⁵⁶，此处系数 A 至 F 为 x 和 y 的函数，而 G 则为 x ， y ， $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 的函数。假如

$$B^2 - 4AC \begin{cases} < 0 & \text{椭圆型} \\ = 0 & \text{抛物型} \\ > 0 & \text{双曲型} \end{cases} \quad (1-6)$$

则从方程（1-5）可得上述三种类型。

1-2 有限差分法

在有限单元法时代以前，有限差分法也许是用于岩土工程的主要数值法。虽然有限单元法比有限差分法有某种方便，但有限差分法对某些问题来说则更为合适些。在许多书中已广泛而详细地叙述了这种方法^{3,5~8}。我们在这里只作简要叙述。

基本概念

离散化方法是建立在这样的基础上的，即在物理问题所遵守的方程中用变量的变化与小而有限的增量之比来代替连续导数。例如，在图1-2中点A的一阶导数被表示为

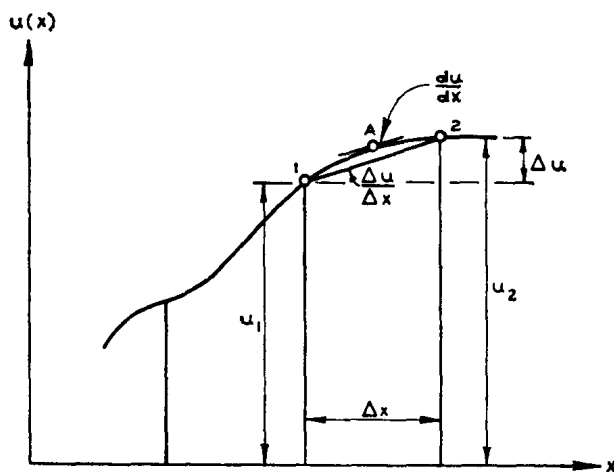


图 1-2 一阶导数的有限差分近似

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (1-7)$$

这样代换的结果，就使得微分方程变成了差分方程。我们所要考虑的微分方程一般将包含着一阶，二阶，三阶和四阶导数。所以，我们现在要对这四种导数提出典型的差分近似。

差分近似

许多方法，例如 Taylor 级数和插值多项式都能用来推导出各阶导数的近似^{3,5}。我们主要将用 Taylor 级数展开的概念。

一阶导数 展开 $u_{i+1,j}$ 和 $u_{i-1,j}$ (图1-3) 成为 Taylor 级数，我们就得到

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \quad (1-8a)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \dots \quad (1-8b)$$

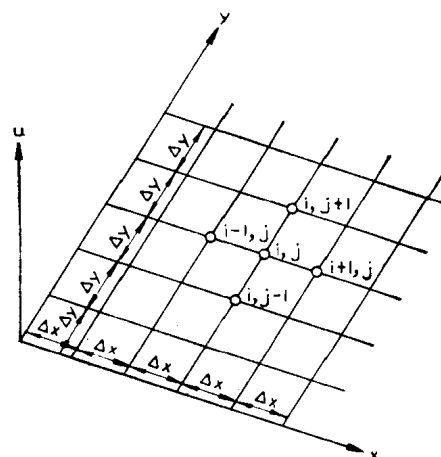
对方程 (1-8a) 和 (1-8b) 作简单的运算即得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1-9a)$$

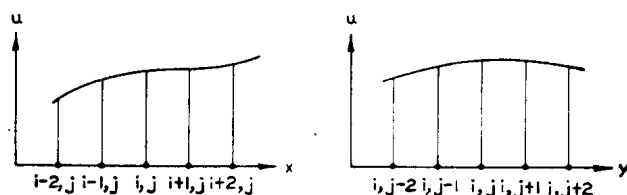
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1-9b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (1-9c)$$

它们分别称为一阶导数的前向差分近似, 后向差分近似和中心差分近似。表达式 $O(\Delta x)$ 表示 Δx 阶误差, 在级数中它是忽略项之和。它代表的是近似导数所引起的误差。 $O[(\Delta x)^n]$ 可称为 n 阶误差。



(a) 有限差分网格



(b) 沿 y 轴和 x 轴的剖面

图 1-3 一维和二维中的有限差分近似

高阶导数 把方程(1-8a)和(1-8b)加起来, 我们就得到二阶导数的有限差分近似式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2] \quad (1-10)$$

类似地, 三阶和四阶导数的表示式为

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{-u_{i-2,j} + 2u_{i-1,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2(\Delta x)^3} + O[(\Delta x)^2] \quad (1-11)$$

和

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{u_{i-2,j} - 4u_{i-1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{(\Delta x)^4} + O[(\Delta x)^2] \quad (1-12)$$

我们这里只列举了四阶导数的典型差分形式。许多别的差分形式也是可以得到的^{3,5~8}。更高阶导数的差分形式则需要使用更多的相邻点来定义。

不同方案和次方案

在显式方案中, 我们寻找的是用 u_i 在前一时刻 t 的已知值来表示 u_i 在 $t+1$ 时刻的近似解。显式方案常常可用公式来表示, 其中 u 在 $t+1$ 时刻的某些值也是已知的。显式法

相对地说是直接的, 它可以一步一步地直接计算 u_i , 而不需要解联立方程。隐式方案则要解一组 $t+1$ 时刻的联立方程。 $t+1$ 时刻的 u_i 当作未知数, 代数方程的右端则由 u_i 在时刻 t 的已知值构成。

现在我们来阐明某些普通的显式和隐式方案。为方便起见, 我们将利用一维固结所遵守的抛物型方程作为说明的基础¹:

$$C_v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1-13)$$

式中 C_v 为固结系数, 而 u 为过量孔隙水压力。方程(1-13)的有限差分类似式的普遍形式可表示为^{5~7}:

$$C_v \frac{\theta(\delta^2 u)_{i,t+1} + (1-\theta)\delta^2 u_{i,t}}{(\Delta x)^2} = \frac{u_{i,t+1} - u_{i,t}}{\Delta t} \quad (1-14)$$

式中 $\delta^2 u$ 表示

$$(\delta^2 u)_{i,t} = u_{i-1,t} - 2u_{i,t} + u_{i+1,t} \quad (1-15)$$

且 θ 可取各种不同值。令 $\theta=0$ 所得的最简单显式方案为

$$u_{i,t+1} = u_{i,t} + \Delta T(u_{i-1,t} - 2u_{i,t} + u_{i+1,t}) \quad (1-16)$$

式中 $\Delta T = (C_v \Delta t) / (\Delta x)^2$,

假如 θ 取为1, 则得隐形式。于是

$$\Delta T(u_{i-1,t+1} - 2u_{i,t+1} + u_{i+1,t+1}) - u_{i,t+1} = -u_{i,t} \quad (1-17)$$

一个常用的隐形式为Crank-Nicolson 方案, 它是由于令 $\theta = \frac{1}{2}$ 而得到的:

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta T}{2}(u_{i-1,t+1} - 2u_{i,t+1} + u_{i+1,t+1}) + u_{i,t+1} \\ & = \frac{\Delta T}{2}(u_{i-1,t} - 2u_{i,t} + u_{i+1,t}) + u_{i,t} \end{aligned} \quad (1-18)$$

上述简单显式方案和隐式方案的离散误差具有 $O[\Delta t + (\Delta x)^2]$ 的数量级, 而对于Crank-Nicolson 方案则具有 $O[(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2]$ 的数量级。在讨论其他方案前的这一阶段中, 我们将进行数值方案的精度、收敛性和隐定性题目的讨论。

1-3 精度、收敛性和稳定性

为了使数值方案产生出真实结果, 我们一定要弄清楚它的可靠性。考察象误差、收敛性、稳定性和一致性^{5~8}这样的数学性质就能对一般的使用情况得出方案的可靠性观念。数值方法的使用者常常用解若干例题的办法来断定其性能。虽则这种着重实效的方法有时是有用的, 且也是必须的。然而我们不能简单地根据这种定量分析来建立方法的通则。考察数值法的数学基础则是基本的。

有限差分法的数学文献包含着许多分析收敛性、稳定性和一致性的方法^{5~12}。本书除了指出这些性质的重要性, 给出简评和介绍推导稳定性及收敛性的初等例子以外, 不再作详细的叙述。

数值法的精度能用收敛性和稳定性来加以研究。假如差分方程是一致性的, 则稳定性就暗示收敛性⁸。对很大一类差分方程, 收敛性和稳定性这两种性质是等价的。

稳定性和收敛性

与稳定性和收敛性概念有关的是关于会进入数值计算的各类误差观念。为理解这些思想,我们设 $\bar{u}$ 为偏微分方程,例如是线性方程(1-13)的正确解;设 u^* 为偏微分差分方程,例如是方程(1-14)的正确解;又设 u 为偏微分差分方程的数值解⁹。因为我们使用的是网格点之间的有限距离,且我们是用有限系统来代替连续系统的,这就产生了所谓离散误差或截断误差, $\bar{u}-u^*$ 。收敛性问题就是要研究 u^* 近似于 $\bar{u}$ 的条件。换言之,假如在逐步近似过程中, u^* 愈来愈接近于 $\bar{u}$,那末我们就说这种方法是收敛的。

差值 $\bar{u}-u$ 表示数值误差。这种误差可看作由下列几种途径所引起,例如不完善的初始条件,局部截断和舍入误差。因为计算机只能存储数的有限数小数,所以我们通常要考虑由之而引起的舍入误差。研究在整个区域,整个空间和整个时间中 $\bar{u}-u$ 都能很小的条件就构成稳定性问题。例如在以 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 和 Δt 作为空间和时间增量的离散区域中,我们考察的是当 $t \rightarrow \infty$ 时解会怎样变化?

1-4 另 一 些 方 案

显式方案

对于某些类型的问题来说,获得无条件稳定的显式方案是可能的。因为这种方案比隐式方案较为省劲,所以我们简单地叙述几个这样的方案。

在Dufort-Frankel方法¹³中,有限差分形式用涉及三个时刻的 u 来表示

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i-1,t} - u_{i,t-1}}{\Delta x} - \frac{u_{i,t+1} - u_{i+1,t}}{\Delta x} \right) = \frac{u_{i,t+1} - u_{i,t-1}}{2\Delta t} \quad (1-19)$$

在Saulev方案^{6,14}中,则采用下列两个方程。在 $t+1$ 时刻,显式方案方程(1-20)在一个方向上例如在 x 正方向逐点实行,而显式方案方程(1-21)则在 x 负方向逐点实现:

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i-1,t+1} - u_{i,t+1}}{\Delta x} - \frac{u_{i,t} - u_{i+1,t}}{\Delta x} \right) = \frac{u_{i,t+1} - u_{i,t}}{\Delta t} \quad (1-20)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u_{i-1,t+1} - u_{i,t+1}}{\Delta x} - \frac{u_{i,t+2} - u_{i+1,t+2}}{\Delta x} \right) = \frac{u_{i,t+2} - u_{i,t+1}}{\Delta t} \quad (1-21)$$

应该注意值 $u_{i-1,t+1}$ 及 $u_{i+1,t+2}$ 是已知的。例如在固结情形,顶上和底上排水面的孔隙水压力在任何时刻都是已知的。Saulev方法的修改形式已由Lavkin¹⁵和Barkat与Clark¹⁶所提出。已经发现,这种交替方向显式(ADE)方案是收敛的和无条件稳定的,且已用来解岩土工程问题。

交替方向隐式(ADI)法

为了说明常用的ADI方案,我们将用两个空间座标 x 和 y 来表示抛物型方程

$$C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1-22)$$

式中 C 表示材料参数。方程(1-22)的一个简单隐有限差分形式为

$$C[(\delta_x^2 u)_{i,j,t+1} + (\delta_y^2 u)_{i,j,t+1}] = \frac{u_{i,j,t+1} - u_{i,j,t}}{\Delta t} \quad (1-23)$$

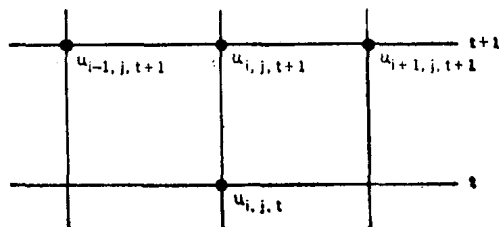
其中 $(\delta_x^2 u)_{i,j,t+1} = u_{i-1,j,t+1} - 2u_{i,j,t+1} + u_{i+1,j,t+1}$

等等。这方法是无条件稳定的。对于普通的点 i (图1-4), 方程(1-23)的展开式为

$$- \Delta T u_{i-1,j,t+1} - \Delta T u_{i,j-1,t+1} + (4\Delta T + 1) u_{i,j,t+1} - \Delta T u_{i,j+1,t+1} - \Delta T u_{i,j,t} = u_{i,j,t} \quad (1-24)$$

方程(1-24)有五个未知数, 且假如所有节点的这种方程都已列出, 则我们就得到一方程组, 其系数矩阵为包含着五个具有非零元素的对角线。正象我们以后要讨论的那样, 可采用象高斯消去法和 Gauss-Seidel 法那样的计算方案来解这种方程。

ADI法是隐式法的一种改进。这种方法已由 Peaceman 和 Rachford²⁴, Douglas²⁵ 以及其他一些人^{5,6,26}详细叙述过了。这方法产生的系数矩阵是三对角线。它是用来代替象方程(1-24)所给出的五对角线的。所以, 这方法



隐式法

图 1-4 隐式法

使方程适于用更经济更有效的办法来求解。这种方法包括着使用两个有限差分方程

$$(\delta_x^2 \bar{u})_{i,j} + (\delta_y^2 u)_{i,j,t} = \frac{\bar{u}_{i,j} - u_{i,j,t}}{\Delta t/2} \quad (1-25)$$

和

$$(\delta_x^2 \bar{u})_{i,j} + (\delta_y^2 u)_{i,j,t+1} = \frac{u_{i,j,t+1} - \bar{u}_{i,j}}{\Delta t/2} \quad (1-26)$$

式中 $\bar{u}$ 为中间值或暂取值。这些方程采用了半时间步长 $\Delta t/2$ 。我们可以看出方程(1-25)只在 x 方向为隐式, 而方程(1-26)只在 y 方向为隐式。ADI方案已为各种不同的研究者所使用^{21,27~30}。它是无条件稳定的和牵涉到关于 $\Delta x = \Delta y$ 的离散误差 $O[(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2]$ 和 $\Delta x/\Delta y$ 的常数值。ADI方案能推广到三维空间座标的方程。

交替方向显式法 (ADE法)

交替方向显式法, 方程(1-20)和(1-21), 可推广到二维和三维的问题中去¹⁷。因之, 方程(1-22) (见图1-5) 的有限差分方程为

$$C \left[\left(\frac{u_{i-1,j,t+1} - u_{i,j,t+1}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j,t} - u_{i+1,j,t}}{\Delta x} \right) + \left(\frac{u_{i,j+1,t+1} - u_{i,j,t+1}}{\Delta y} - \frac{u_{i,j,t} - u_{i,j-1,t}}{\Delta y} \right) \right] = \frac{u_{i,j,t+1} - u_{i,j,t}}{\Delta t} \quad (1-27)$$

另一些可能的ADE法已由 Larkin 所阐述¹⁵, 在那里已经指明ADE方案对任何大小的正时间增量来说都是无条件稳定的。把ADE法用于三维问题的情况已由 Allada 和 Quon¹⁷ 讨论过了。

已经发现¹⁷: 从物理或数学观点都不能预先知道ADI法或ADE法较其他方法优越。对于一维空间座标方程[方程(1-13)]来说, Desai 和 Johnson²² 从定量分析中发现隐式法的性状比ADE法稍好一点。然而, ADI方案所需要的计算时间大约是 ADE 方案的五倍之多^{15,22}。且ADE方案还有一个要求: 象 $u_{i-1,t+1}$ [方程(1-27)] 那样的一些边界点处的 u 值或者应由已知的边界条件得到, 或者应从计算得出。尽管 ADE 方案有某种数学上的限制, 但对于许多实际情况来说, 它们还是适用的。