

K209
1
:6

根据 1966 年前出版的《中国历史小丛书》重印

历史知识小丛书
中国古代数学史话
李伊 杜石然

中华书局出版
(北京王府井大街 36 号)
新华书店北京发行所发行
北京第二新华印刷厂印刷

787×1092 毫米 1/32 1 1/4 印张 18 千字
1964 年 5 月第 2 版 1978 年 9 月北京第 3 次印刷
统一书号: 11018·233 定价: 0.12 元



历史知识小丛书

中国古代数学史话

李 俨 杜石然

目 录

- 一、中国古代数学的萌芽····· 2
- 二、中国古代数学体系的形成·····10
- 三、中国古代数学的高度发展·····20
- 四、由筹算到珠算的演变·····29
- 五、西方数学的传入·····36

一、中国古代数学的萌芽

中国古代数学是从什么时候开始萌芽的？我们远古时代的祖先从什么时候开始掌握了数的概念和形的概念？这是一个很有趣的、同时也是不容易回答的问题。因为远古时代的事情没有任何直接的文字记录，我们只能从古代流传下来的传说中推断出一些情况。

先秦时候有一部古书，书名叫《世本》。在《世本》这部书里，曾提到“黄帝使隸首作数”的传说，意思是说，数是黄帝时代有一个名叫隸首的人所作的。这是一个在古代很流行的传说。但是这种说法显然是不符合历史实际的，因为数学决不可能是某个个人的创造。正像恩格斯所说的那样：“和其他所有科学一样，数学是从人们的实际需要上产生的，是从丈量地段面积和衡量器物容积、从计算时间、从制造工作中产生的。”但是这个传说却说明了这样一个事实：从很古的时候起，甚至从不能确切地说出它的年代的时候起，我们的祖先就已经掌握了数的概念了。

此外还有两个和古代数学有关的传说必须提到，

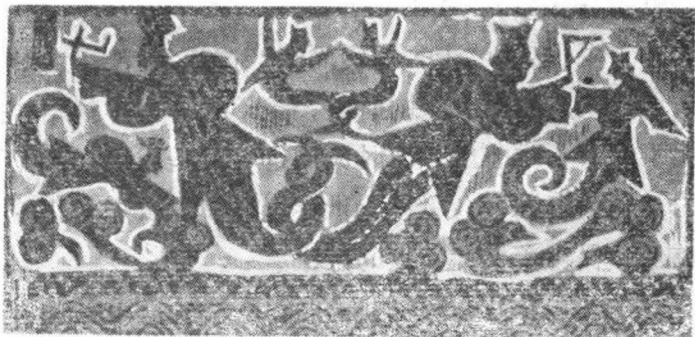
那就是“結繩”和“規矩”。

古書上說：“上古結繩而治。”這就是說，遠古時代人們還沒有使用文字的時候，是用繩打成各種結扣來記事的。不難想像，當時人們也可能是用繩扣來記數的。因為直到不久以前，世界上還有少數未開化的民族仍然保存着結繩記數的方法。

“規”和“矩”，是我們現在常用的名詞，可是起源却很早。“規”，就是圓規，是用來畫圓形的工具。“矩”，是像現在木工所使用的曲尺一類的東西，是用來畫方形的工具。漢朝的歷史學家根據傳說，認為伏羲是規矩的創造者。流傳到現在的漢朝的浮雕像中，就有“伏羲手執矩，女媧[wā]手執規”的圖像，而且還不止一處。根據這些傳說來看，規矩的產生可能是很早的。司馬遷的《史記》中還提到，相傳古代夏禹治水的時候，也是“左准繩”（就是左手帶着水準工具和繩），“右規矩”（右手拿着規和矩），來進行測量和設計工作的。

古代人們對各種圖形的認識也是很早的。從地下發掘出來的許多考古資料告訴我們：十萬年前的“河套人”已在骨器上刻有菱形的花紋，石器時代〔注〕的各種工具也都具有一定的幾何形狀。

〔注〕考古學上把人類歷史的最初階段，叫作石器時代。這個時期，大約經歷了數十萬年，勞動的主要工具是石器。



汉朝武梁祠造像 规矩图

现在已发现的我国早期的文字，有公元1899年（清光绪二十五年）从河南安阳发掘出来的龟甲和兽骨上面所刻的象形文字。这种文字称为“甲骨文”，是大約三千多年以前殷代的文字。其中有許多数字记录，如战争中杀死或俘获的敌人数目，狩猎时猎得的禽兽数目，祭祀时宰杀的牲畜数目，等等。例如有一片甲骨，上面刻着“八日辛亥允戈伐二千六百五十六人”。这是說，在八日辛亥那一天，在一次战争中消灭掉二千六百五十六人。甲骨文中記載的最大的数目是“三万”。值得注意的是，当时已經采用了十进位制的記数方法，和現在我們所用的記数方法已經完全一致了，至少万以下的整数記法是完全一致的。由此可見，我国的記数法，从古代开始就一直是使用十进位制的。

古代保存下来的文字，除了甲骨文之外，还有一种

铸在青铜器上面的文字。这种文字叫作“钟鼎文”或“金文”。据考证，这大致是周代的文字。现在我们把甲骨文、金文上面所用的数目字以及后来汉朝用来记数的文字分别介绍在下面，读者可以比较这些古代记数的文字跟现代汉字的不同。

现代：一 二 三 四 五 六 七 八 九 十

甲骨文：一 二 三 四 五 六 七 八 九 十

金文：一 二 三 四 五 六 七 八 九 十

汉朝：一 二 三 四 五 六 七 八 九 十

除了整数之外，我国古代认识分数也比较早。开始时还只认识一些单分数，即分子是1的分数，后来逐渐认识到一般分数，并用“大($\frac{2}{3}$)”、“半($\frac{1}{2}$)”、“小($\frac{1}{3}$)”各字记分数。

至于整数和分数的四则运算和应用，也是相当早的。关于计算整数的加减法，究竟是从什么时候开始的，到现在人们还不能作出确切的回答。可是毫无疑问，那是很久很久以前的事了。

我们大家都知道《九九歌》这个正整数的乘法歌诀。“一二得二，二二得四，二三得六，……”，每个小学生都能背诵得很熟练。可是，这个歌诀为什么叫作“九九”呢？原来在古代，这个歌诀不是从“一一如一”开始，而是倒过来，从“九九八十一”开始的。正因为是从

“九九八十一”开始，所以叫作“九九”。“九九”这一名称就一直沿用到現在。那么，古代是从什么时候起开始使用《九九歌》的呢？据说春秋时期齐桓公曾经专门设了一个“招賢館”来征求各方面有才干的人，但是等了很久，一直沒有人前往应招。一年以后，才来了一个人，这个人把《九九歌》献给齐桓公作为进見的礼物。齐桓公觉得很好笑，对他說：“《九九歌》能够当作見面礼嗎？”这个人回答說：“《九九歌》确实够不上拿来作見面礼，但是如果您对我这个懂得‘九九’的人都能重視的話，那么还怕比我高明的人会不接連而来嗎！”桓公认为很对，就把他接进“招賢館”，隆重的招待他。果然不到一个月，許多有才干的人从四面八方接連不断地前来应招了。从这个故事，可見在春秋时期，《九九歌》就已被大家知晓，没什么新奇了。在許多流传下来的古书如《荀子》、《管子》里面，也有关于“九九”的記載。

从十九世紀末叶以来，陆续在我国西北发掘出来的許多“竹木簡”〔注〕，也有些記錄着《九九歌》。但是这些竹木簡由于在地下埋藏过久，上面的《九九歌》已經殘缺不全了，最多的只剩下十七句，有的是十四句，有的只有三句、五句。

〔注〕东汉以前，紙尚未通用，记事一般写在竹片或木片上，称之为竹木簡。

上面說的，是我國古代整數和分數的概念以及四則運算方法產生的情況。下面再談談古代人們用什麼工具來進行計算的問題。

在古代，世界上許多民族曾經使用過各種不同的計算工具。例如巴比倫人用的是一塊泥板，在上面刻字；埃及人用的是一種水草葉子，在上面寫字；印度人和阿拉伯人用的是沙盤，或是在地上用小木棍進行“筆算”。我國古代所用的計算工具是一種“算籌”。“籌”就是一般粗細、一般長短的一些小竹棍。中國古代的數學家們就是用這些小竹棍擺成不同的行列，表示不同的數目，來進行各種計算的。這種用“算籌”來進行的計算，叫作“籌算”。“算籌”的“算”，古代寫作“筭”。古代的字書《說文解字》中說：“筭，從竹，從弄。”就是說，筭字是由“竹”字和“弄”字合成的，也就是擺列竹棍來進行計算的意思。

用算籌來表示數目，有兩種形式：一種是縱（直）式，一種是橫式。具體擺法是這樣的：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
縱式	丨					┌	┐	┑	┒
橫式	—	＝	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

怎樣使這種擺法和十進制配合起來呢？方法是：個位用縱式，十位用橫式，百位又用縱式，千位又用橫式，萬

位再用纵式，以此类推；凡是遇到零的时候，就不摆算筹，让它空着。这样，纵横相间，一直摆下去，任何数目都能够表示得出来。例如 378 可摆成 $\text{III} \perp \text{III}$ ，6708 可摆成 $\perp \text{II} \quad \text{III}$ 。这种方法和现代的笔算记数基本上是相同的。我国古代的文字都是从右到左，写成直行；可是数字记数却和现在的笔算记数一样，从左到右，排成横行。

筹算从什么时候开始出现的，现在还没有可靠的材料来作精确的说明。不过我们可以肯定，至迟在春秋战国的時候，人們已經十分熟练地运用筹算来进行计算了。到了公元前 100 年左右的时候，人們已經可以用筹算来进行四则运算。开平方、开立方等比较复杂的计算也可以进行了。

从远古起到公元前 100 年左右这段时间内，随着生产力的不断提高，各种科学技术也不断向前发展；各种科学技术的发展，又不断地推动着数学的发展。例如农业生产要求人們准确的掌握农事季节，这就必然推动着人們去进行天文的研究。但是，天文学是离不开数学的；随着天文学的发展，人們对于数学的知识也就不断地丰富起来。流传到现在的一部最早的数学著作，同时也是一部最早的天文学著作——《周髀 [b] 算经》，便是这一时期由于天文学上的实际需要而积累起

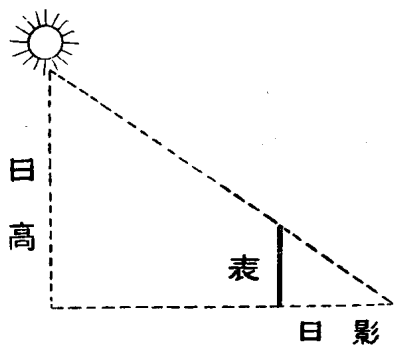
来的一部科学研究结晶。

现在我们所能看到的《周髀算经》，已经不是最初的原书，而是经过后代的学者修改和补充过的。根据数学史家的研究，大约在公元前100年左右，这部书的内容就已经和我们现在所看到的大致相同了。《周髀算经》中记载了用标竿测日影的方法，标竿算作股，股也可以叫“髀”，日影则是勾。书中又有周公问算的内容，从而有《周髀算经》的名称。《周髀算经》主要是讲解“盖天说”〔注〕一派的天文学说的。

《周髀算经》这部书里面，除了关于“盖天说”以及其他一些天文学方面的记载以外，从数学的角度看，有两点值得注意：第一，这部书里记载了许多比较复杂的分数计算问题，例如 $354\frac{348}{940} \times 13\frac{7}{19} \div 365\frac{1}{4}$ 之类。这说明当时对分数的计算已经十分熟练。第二，就是关于“勾股定理”和“勾股测量”的记载。所谓“勾股定理”，是指一个直角三角形两腰的平方（勾平方和股平方）之和等于斜边（弦）的平方。这个定理很重要，据说古希腊的数学家毕达哥拉斯在证得这个定理的时候，曾宰了一百头牛来表示庆祝。所谓“勾股测量”，就是指利用相似的两个直角三角形对应边成比例的关系来进行测

〔注〕盖天说主张：“天象盖笠，地法覆盆”，这是说天好像是一顶尖草帽，而地好像是一只倒过来的盆子。

量。《周髀算經》記載了有关这种测量的方法，如根据标竿(表)的日影的长短来量出太阳的高度的方法(如图)。用这种方法来进行天文上的测量，当然不能测出正确的結果；但是用来测量地面上的



远近、高低等等，是能够作到十分精确的。根据《周髀算經》中的記載，当时人們已經使用这种方法来进行地面上的测量了。由此可见，在《周髀算經》这部书出現的时候，我国古代数学已經发展到相当高的水平了。

我国古代人們数学知識逐渐积累的结果，终于形成了我国古代数学的完整体系。

二、中国古代数学体系的形成

公元前 221 年秦始皇統一中国，到了汉朝，社会生产力有了很大的发展。随着生产力的发展，数学也有了很大的发展。从周朝以来逐渐发展起来的中国古代数学，到了汉朝已經逐渐形成了完整的体系。著名的《九

《九章算术》就是当时的一部代表性的著作。它总结了周、秦以来的数学研究成果，并对后来我国数学的发展起了极大的影响。

《九章算术》这部伟大著作的作者和确实的成书年代，都已经考证不出来了。但是它确是以古代人们长期积累起来的数学知识为基础，并且经过许多人的修改和补充，方才最后完成的。这或许正是人们不能确定地指出它的作者和成书年代的原因。

流传到现在的《九章算术》，是经过各个朝代许多数学家注解过的。根据研究的结果来看，至迟在公元后 100 年左右的时候，《九章算术》的内容就和现在流传的本子相同了。

《九章算术》是采取问题集的形式编写的。这部书一共收有 246 个问题，分为九章，即九大类。这种问题集的形式对后世的影响很大，一直到很久很久以后，中国的数学著作仍然采用这种形式。各章的主要内容是：

第一章“方田”，主要是讲田亩面积的计算，还详细地叙述了分数的各种计算方法。

第二章“粟米”，是讲各种比例问题，特别是关于各种粮谷间的比例交换问题的计算方法。

第三章“衰分”，是讨论如何按比例分配的问题。例如一次狩猎共猎得五头鹿，根据大官多分、小官少分的

原則，怎樣分配給五个官阶大小不同的人，等等。

第四章“少广”，是讲开平方、开立方的計算方法。

第五章“商功”，是讲各种形状的体积的計算方法，如方仓、圓仓等各种形状的粮仓容积的計算以及筑城筑堤所需土方的計算等等。

第六章“均輸”，是討論如何按人口、路途远近等等条件合理安排各地的賦稅以及分派工役等問題的計算方法。

第七章“盈不足”，是用假設的方法来解决某些問題。什么是“盈不足”？唐朝有一位政府官員曾用下面的数学問題来考試下級：“一天晚上，他曾在树林后边听得几个人在那里分配他們偷来的馬，假如每人分 6 匹，还余下 5 匹；假如每人分 7 匹，又不够 8 匹，問一共有多少人和多少匹馬？”这就是“盈不足”的問題。這個問題，在《九章算术》中就已經有着完整的解法。这种解法和現代的“行列式解法”很相像。

第八章“方程”，是关于联立一次方程組普遍解法的叙述。中国古代数学家在这一方面取得的成就是极其伟大的。欧洲直到十六世紀，法国的数学家方才得出了类似的联立一次方程組的普遍解法。特別值得着重指出的，是“方程”章中还引入了負数的概念以及正数和負数的加減法法則。这也是具有世界意义的成就。

印度数学家到了七世纪之后，欧洲则到了十六世纪之后，才产生了比较明确的负数概念。正负数的概念，在中国古代很早就被天文学家所充分掌握和利用。正、负这两个常用的数学术语，一直流传到现在。

第九章“勾股”，是应用“勾股定理”以及直角三角形相似形的各种比例关系的计算。值得注意的是，“勾股”章中还提出了二次方程的普遍解法问题。在中国古代，方程的数值解法问题都是由开平方、开立方等演算步骤中推演出来的。了解了开平方和开立方的步骤之后，求解二次或三次方程的正根，就没有什么困难了。

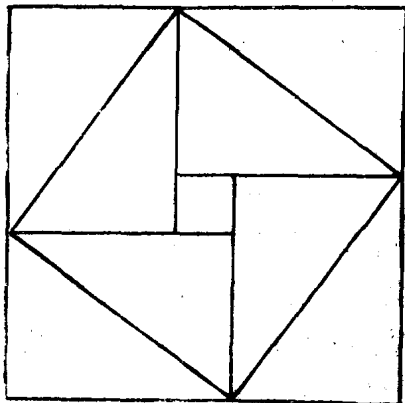
从上面的简单介绍中，我们可以看出《九章算术》的内容是丰富多采的，而且是同实际生活特别是农业生产密切联系着的。它比较全面地反映了我国古代数学高度发展的面貌，集中地显示了中国古代劳动人民的智慧和许多数学家的天才。它不仅是我国数学发展历史上的一部杰出的著作，而且在全世界数学发展历史上也占有很重要的地位。现在，《九章算术》已经被译成各种文字出版。这部中国古代数学著作受到了世界各国科学家的重视。

前面已经说过：流传到现在的《九章算术》，是经各个朝代的许多数学家作过注解的。其中最著名的是三

国时代的刘徽。在刘徽的注解中包含有许多天才的创见和补充。关于刘徽的生平，我们只知道他注《九章》的年代是在公元 263 年（三国曹魏景元四年），也就是距今约一千七百年前的时候。除此以外，我们就什么也不知道了。

刘徽的注解，可以看成是对《九章算术》中所提各种算法的一些证明。他所使用的方法，按他自己的说法，就是“用文字讲清楚道理，用图形来解决各种问题”。

这种用图形的“出入相补”的方法来证明各种定理的正确，是一个很重要的直观的方法。和刘徽几乎同时代或者稍早一些的赵爽，也曾用图形的方法来证明各种几何问题。像利用上面的“弦图”，可以



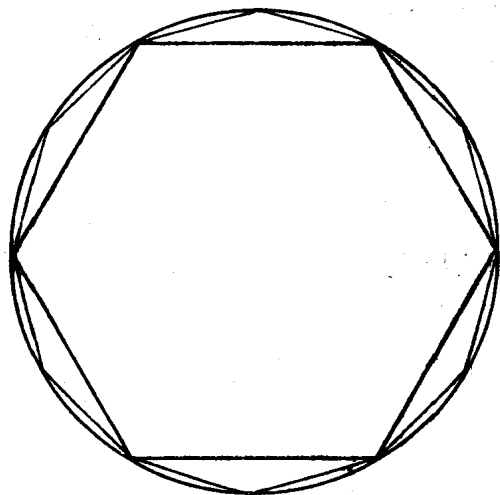
弦图

证明“勾股定理”和许多重要的几何学问题。

刘徽最主要的成就是关于圆周率的计算。我们知道，正确的圆周率等于 $3.1415926\cdots$ ，是个不尽小数。《九章算术》中的各种问题是按圆周率等于 3 来计算的，这当然不精确。刘徽指出了这种错误，并且提出

了他自己計算圓周率的方法。刘徽是由圓內接正六边形算起，再算正十二边形，正二十四边形，正四十八边形，直算到正九十六边形，求得圓周率等于 $3.14\frac{64}{625}$ ，

或 $\frac{157}{50}$ （相当于 3.14）。刘徽这种使內接正多边形边数逐渐增加、边数越多就越和圓周密切貼合的思想，在当时的条件下是非常难得的。



刘徽割圓示意图

他的这种思想相当于現代的“极限”思想，对中国数学家們关于圓周率的計算，起着很大的影响。

刘徽研究學問的态度是严肃的。他对于自己还没有求得的东西，如球体体积的精确計算公式，就把自己感到困难的地方老老实实在地写出来。用他自己的話來說，就是“留給后来的聪明人去解决”。他的这种踏踏实实的学风以及为后来人开路的研究态度，都是值得人

們学习的。

三国之后，經過晋朝短时期的統一，中国又形成了南北朝对峙[zhì]的局面。由于北方各族統治者的长期混战，大量的人口迁移到了南方，使南方的經濟有了迅速的发展。随着經濟的发展，科学文化也得到了进步。伟大的科学家祖冲之（公元429—500年）便誕生在这样的时代里。

根据現在流传下来的資料来看，祖冲之在数学方面的最大成就要算是关于圓周率的計算。按古代历史书《隋书·律历志》的記載，假如以一丈作圓的直径，祖冲之求得圓周长度應該在三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽和三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽之間。这就是求得了圓周率在3.1415927和3.1415926之間。祖冲之在公元六世紀的时候就能算得如此精确的圓周率，是具有世界意义的。一直到了十六世紀，中央亞細亞国家的数学家算得小数点后16位准确的圓周率，这才超过了祖冲之所保持的小数点后6位准确的記錄。

祖冲之为了当时社会使用便利起見，还得出两个分数值的圓周率。比較精密一点的叫作“密率”，就是 $\frac{355}{113}$ （相当于3.1415929）。这是一个和正确的圓周率极相接近的数值。欧洲直到公元十六世紀下半世紀，