

数理地震学进展

冯德益 小山顺二 主编



地震出版社

- 地震科学联合基金资助 •
- 国家地震局杭州干部培训中心继续教育教材 •

数理地震学进展

冯德益 小山顺二 主编

地震出版社

1996

内 容 提 要

数理地震学是地震学的一个分支。本书主要介绍应用数学手段及理论和实验分析方法解决地震问题的最新进展。其中包括统计地震学、模糊地震学、震源物理学、非线性地震科学等方面的新成果。涉及最多的地震学问题有地震活动性分析、地震预报、震源孕育与破裂过程的数学模拟等。本书可供从事地震工作的科研人员及大专院校有关专业师生参考。

数理地震学进展

冯德益 小山顺二 主编

责任编辑：姚家榴

责任校对：耿 艳

*

地 震 出 版 社 出 版

北京民族学院南路 9 号

中国地质大学轻印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

*

787×1092 1/16 13.75 印张 352 千字

1996 年 6 月第一版 1996 年 6 月第一次印刷

印数 001—800

ISBN 7-5028-1282-2/P·804

(1712) 定价：20.00 元

前 言

地震学的发展离不开应用各种数学和物理学的最新方法。由于所应用的方法有不同的类别，因而形成了不同的地震学分支，数理地震学就是其中之一。它的主要研究方法是把各种应用数学方法及某些理论与实验分析方法应用于地震学研究当中，因而可以包括统计地震学和模糊地震学的大部分内容以及震源物理学、非线性地震科学等的一部分内容，侧重于数学方法与模型研究和计算，涉及最多的地震学问题有地震活动性分析、地震预报、震源孕育与破裂过程的数学模拟等。

为了介绍中国和日本的研究人员近十年来在数理地震学方面所取得的新进展，发展在这一科学领域的国际友谊与合作，培养两国的青年地震科技骨干，我们主持编写了两本姊妹篇专著。第一本由地震出版社用英文出版，即“Advance in Mathematical Seismology”，该书共分八章，作者有小山顺二、陈颢、冯德益、加藤尚之、王公恕、吉田明夫、王锦华、伊藤秀美、臧绍先、大内彻、松崎光弘、平泽朋郎等12人。本书是第二本专著，用中文出版。书中的大部分内容都是对另一批新成果的论述，与第一本不重复，但也有一部分内容系根据第一本中的有关章节编译而成，以便形成一个整体。

全书共分八章。第一章介绍分形几何与地学中复杂现象的定标关系；第二、三章分别介绍统计地震学与模糊地震学的新进展；第四、五章分别介绍新近发展起来的 H_∞ 控制论和神经网络理论与方法在地震研究中的应用；第六、七章分别介绍地震活动性及地震孕育与发生过程的数学模拟；第八章给出用确定性的观点和随机的观点综合研究复杂的震源破裂过程的一些最新结果；第六、八两章及§7.4的中文稿系根据日本作者提供的英文稿与有关论文，由冯德益编译而成。

中国国家地震局、地震科学联合基金会和日本科学振兴会支持这一领域的研究工作，地震科学联合基金会和国家地震局杭州干部培训中心等单位赞助本书出版，在两本书的出版过程中都得到地震出版社的大力支持与帮助，对此我们表示衷心的感谢。由于水平和时间所限，不当之处在所难免，敬请同行专家和读者们批评指正！

本书是国家地震局杭州干部培训中心组织编著出版的继续教育教材系列丛书之一，可供地震学、地球物理学、地质学、应用数学、计算机科学、系统工程学等领域的科研人员、工程技术人员和有关专业的大专院校师生们参考使用。

冯德益 小山顺二

1995年3月

天津—仙台

本书作者一览表

- 第一章** 陈 颢 (国家地震局, 北京 100036, 中国)
刘 杰 (国家地震局, 北京 100036, 中国)
- 第二章** 王公恕 (南开大学数学系, 天津 300071, 中国)
冯德益 (天津地震局, 天津 300201, 中国)
伊藤秀美 (气象厅地震火山部, 东京 100, 日本)
- 第三章** 冯德益
林命周 (上海地震局, 上海 200062, 中国)
郑熙铭 (天津地震局, 天津 300201, 中国)
- 第四章** 胡传淦 (南开大学数学系, 天津 300071, 中国)
刘喜兰 (天津地震局, 天津 300201, 中国)
冯德益
- 第五章** 冯德益
蒋 淳 (天津地震局, 天津 300201, 中国)
郑熙铭
- 第六章** 小山顺二 (东北大学地球物理研究所, 仙台 980, 日本)
大内 彻 (神戸大学理学部, 神戸 657, 日本)
臧绍先 (北京大学地球物理系, 北京 100871, 中国)
- 第七章** 张国民 (国家地震局分析预报中心, 北京 100036, 中国)
冯德益
吉田明夫 (气象厅气象研究所, 茨城县筑波 305, 日本)
- 第八章** 小山顺二

目 录

第一章 分形几何与地球科学	(1)
§ 1.1 分形和分维	(1)
§ 1.2 统计分形	(9)
§ 1.3 自仿射分形	(22)
§ 1.4 多重分形	(34)
§ 1.5 分形几何研究的现状和问题	(40)
附录 习题	(46)
参考文献	(48)
第二章 统计地震学新进展	(49)
§ 2.1 统计地震学的主要内容	(49)
§ 2.2 地震预报研究中的统计指标	(49)
§ 2.3 随机微分方程理论及其在地震学中的应用	(53)
§ 2.4 投影寻踪及其在地震预报中的应用	(57)
§ 2.5 地震烈度区划计算的非齐次马尔科夫模型	(65)
§ 2.6 脸谱分析在地震预报中的应用	(66)
§ 2.7 自助统计在地球物理学中的应用	(68)
参考文献	(72)
第三章 模糊地震学新进展	(74)
§ 3.1 模糊数学在地震活动性分析预报中的应用	(74)
§ 3.2 模糊数学在地震前兆分析中的应用	(77)
§ 3.3 后续显著地震的跟踪式模糊预测	(87)
§ 3.4 地震损失的模糊分析与预测	(92)
§ 3.5 用于地震预报研究的模糊分析处理软件系统	(97)
参考文献	(98)
第四章 H_∞ 控制论在地震研究中的应用	(100)
§ 4.1 基本理论知识	(100)
§ 4.2 标准问题的提法与解法	(105)
§ 4.3 单输入单输出的情况	(109)
§ 4.4 H_∞ 控制论方法在地震研究中的应用	(111)
§ 4.5 H_∞ 控制论的发展趋势与应用前景	(113)
参考文献	(115)
第五章 神经网络在地震研究中的应用	(117)
§ 5.1 神经网络模型与算法	(117)
§ 5.2 神经网络在地震预报研究中的应用	(120)

§ 5.3 神经网络在地震工程中的应用	(127)
§ 5.4 神经网络在地震分析中的应用	(129)
参考文献.....	(129)
第六章 地震活动性的数学模拟.....	(131)
§ 6.1 地震的随机性与韵律	(131)
§ 6.2 地震活动性的数学模型	(132)
§ 6.3 地震活动性的随机定标	(136)
§ 6.4 地震活动性的非线性定标律	(141)
参考文献.....	(143)
第七章 地震孕育发生的数学物理模型.....	(145)
§ 7.1 构造块体内成组地震孕育发生的物理力学模型	(145)
§ 7.2 地震孕育发生过程中的场源关系	(153)
§ 7.3 震源区孕震过程中岩石膨胀和断层蠕动的数值模拟	(162)
§ 7.4 地震活动性迁移的应变扩散模型	(170)
§ 7.5 含孕震体介质模型的应力场计算及其应用	(176)
参考文献.....	(185)
第八章 复杂震源破裂过程的研究.....	(187)
§ 8.1 复杂破裂过程的震源谱与震源参数	(187)
§ 8.2 复杂破裂过程的加速度谱	(198)
§ 8.3 复杂破裂过程的地震能量	(207)
§ 8.4 复杂破裂过程的震级	(209)
参考文献.....	(214)

第一章 分形几何与地球科学

§ 1.1 分形和分维

普通的几何对象，具有整数维数。零维的点、一维的线、二维的面、三维的体、乃至四维的“时空”，是人们熟知的例子。然而最近十几年来，具有不必是整数的分维（fractal dimension）的几何对象——分形（fractal）引起了人们的广泛注意。分形几何的主要价值在于它在极端有序和真正混沌之间提供了一种中间可能性。分形最显著的特征是：本来看来十分复杂的事物。事实上大多数均可用仅含很少参数的简单公式来描述。

为了说明什么是分形，我们从熟知的欧几里得几何学谈起。

1.1.1 欧氏几何和分形几何，拓扑维和分维

维数是几何对象的一个重要特征量。直观地说，维数就是为了确定几何对象中一个点的位置所需的独立坐标的数目，或者说独立方向的数目。在平直的欧氏空间中，维数是很自然的：地图上的点有经度、纬度两个坐标，一只集装箱有长、宽、高三个尺寸，它的分别是二维和三维的几何对象。欧氏几何中的这种维数就是拓扑维。以后用字母 d 表示。

现在从欧氏几何维数定义作进一步的推广。把一个正方形的每个边长增加为原来的 3 倍，得到一个大正方形，它正好等于 $3^2=9$ 个原来的正方形。类似地，把一个立方体的每个边长增加为原来的 3 倍，就得到 $3^3=27$ 个原来大小的立方体。推而广之，一个 d 维几何对象的每个独立方向，都增加为原来的 l 倍，结果得到 N 个原来的对象。这三个数之间的关系是 $l^d=N$ ，读者不难验证，对于欧氏几何中一切普通的几何对象，这个简单关系都是成立的。现在把这个关系式两边取对数，写成

$$d = \frac{\ln N}{\ln l} \quad (1.1)$$

欧氏几何中由 (1.1) 式定义的拓扑维 d 都是整数。但若将 (1.1) 式作为维数的定义，对其不加以取整数的限制，我们则向前完成了一次“飞跃”。下面把这样推广定义的维数称为分维，用大写字母 D_0 来表示*

$$D_0 = \frac{\ln N}{\ln l} \quad (1.2)$$

1.1.2 自相似性和标度不变性

地质现象的描述，离不开标度。在对一些地质现象拍照时，一定要放上一个能表示尺度大小的物体（作为一种特征尺度），如一枚硬币，一把锤子或站上一个人。没有这些物体，很难确定这些照片反映的是 10m 还是 10km 范围的现象。如果我们有一幅关于岩石海岸线的照片，而没有表示特征长度的物体，一棵树或一所房屋，那么就很难确定照片是从多高的地方

* 为简便计，下文中 D_0 常用 D 来表示。

拍摄的。这是因为海岸线具有自相似性，即将海岸线的一部分放大后，它与原来的海岸线看起来是相似的。如果几何对象的一个局部放大后与其整体相似，这种性质就叫做自相似性 (self-similarity)。地球科学中许多现象都具有自相似性。1860 年，Ruskin 在一本书中写道：“当观察一块石头时，你会发现它象一座缩微的山脉。大自然的神工鬼斧，可以把大尺度的山脉缩微成小尺度。在一块 1m 大小的石块上，你可以找到自然中各种图形和构造的变化形态。石块上的苔藓象森林，晶体的颗粒象悬崖，岩石的表面象山脉……。”当观测标度变化时，几何体（或集合）的许多性质保持不变。这种标度不变性 (scale invariant) 在地学中也经常见到。具有自相似性或标度不变性的几何对象，我们说它们是分形的。研究分形体的数学基础是测度论 (measure theory) 和公度拓扑学 (metric topology)。由测度论给出的分形的定义 (mandelbrot, 1992) 难于被不熟悉测度论的人理解，而且在实际中难于应用。下面给出的两个定义，在物理上易于理解，但不够精确和不够数学化。

定义 1 (Mandelbrot, 1986)。部分以某种形式与整体相似的形状叫做分形。

定义 2 (Edgar, 1990)。分形集合是这样一种集合，它比传统几何学研究的所有集合还要更加不规则 (irregular)，无论是放大还是缩小，甚至进一步地缩小，这种集合的不规则性仍是明显的。

分形 (fractal) 一词是从拉丁文 fractus 转化而来的。它的原意是“不规则的、支离破碎的”物体，英文字典中出现 fractal 一词是 1975 年以后的事情。而在山西五台山南山寺的影壁墙上的碑文中，早在唐朝时代就有了“日月天地，分形变化”的语句。

自然界的许多系统、现象和过程都具有分形特征。比如星云的分布、海岸线的形状、山脉的起伏、地震、河网水系分布、湍流、凝集体、相变、人的血管系统、肺膜结构、城市噪音、气候激烈变化、股票的变动等等。其复杂形态都可以用幂指数函数的 D_0 (即分维) 来描述。今天，分形几何已成为描述自然界，特别是许多不规则地学现象的有力工具。翻开任何一本 90 年代的文献目录，“分形”两字频繁出现。关于分形和分维的国际讨论会每年至少有好几次之多。

下面以最简单的 Koch 曲线来说明什么是分形 (图 1.1)。

平面上 ($d=2$) 有一单位线段 (图 1.1 (a))，用以下迭代方法造出 Koch 曲线。第一步，将单位线段三等分，将中间部分用两条长 $1/3$ 的折线来替代 (图 1.1 (b))；第二步，将图 1.1 (b) 中的每条线段三等分，中间的一段用长 $1/3^2$ 的两条折线替代，得到图 1.1 (c)；不断重复这样的迭代作法，无穷迭代后就生成了具有无穷多弯曲、处处连续、处处不可微商的 Koch 曲线。事实上，Koch 曲线经常用作模拟雪花和海岸线形状的数学模型。

Koch 曲线是分形的，因为它是自相似的。从图 1.1 (d) 中可以清楚地看出这一点。自相似性指的是把要考虑的图形一部分放大，其形状与全体相同，设想把图 1.1 (d) 中 Koch 曲线区间 $[0, 1/3]$ 中的图形放大 3 倍，放大后的图形与原来的曲线形状完全相同。把区间 $[2/3, 1]$ 放大 3 倍，也会得到同样结果。虽然区间 $[1/3, 1/2]$, $[1/2, 2/3]$ 的图形是倾斜的，但是把它放大，也会得到同样的结果。若把区间 $[0, 1/9]$ 的图形放大 9 倍，同样也可以求得与原来相同的图形。对更小的部分进行放大也是同样如此。不论多小的部分，若把它放大到适当大小，应该能得出与原来相同的图形。

既然 Koch 曲线是一分形，下面求其分维。将图 1.1 (d) 中图形放大 3 倍，可以得到 4 个原来的图形，因此 Koch 曲线的分维 D_0 是

$$D_0 = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26$$

在第 n 步迭代时, 每个线段的长度为 $(1/3)^n$, 一共有 $(4)^n$ 个这样的线段。因此, Koch 曲线的长度在第 n 步时为

$$L_n = (4/3)^n$$

显然当 $n \rightarrow \infty$ 时, $L_n \rightarrow \infty$ 。这里我们见到一有趣的结果。一般 (欧氏几何中) 物体的长度与测量单位无关。对于嵌镶于平面之上的 Koch 曲线, 其面积 S 为零, 而当 $n \rightarrow \infty$, 长度 $L \rightarrow \infty$, 显然, S 和 L 都不能很好地描述 Koch 曲线这样的分形。而分维 $D=1.26$ 恰好反映了这种曲线的不规则性和复杂性。 $D_0 = \ln 4 / \ln 3$ 是它不规则性的度量。

1.1.3 分形和计算机算法

传统欧氏几何学概念已经存在了 2000 多年, 它的概念是基于特征大小、特征尺度这种描述。欧氏几何是用公式表述的, 因此与代数学、微积分有密切关系, 因而在科学上起了很大的作用。

分形几何是门新领域, 其主要概念的形成也不过十几年。它的概念的基础在于自相似性。即分形内部具有精细的无穷多的层次结构, 在所有标度上其部分与整体都是相似的。分形研究刚刚开始, 有些数学概念还得从头建立, 例如, 微积分中导数是和欧氏几何中光滑曲线的斜率相联系的, 对于象 Koch 曲线这样无限弯曲的曲线, 导数如何定义? 进一步的数学操作如何进行? 尽管如此, 由于分形在描述复杂不规则现象方面已显示出巨大潜力, 也由于计算机算法和图形技术帮助人们开辟分形这个新的领域。近年来分形研究发展很快, 为了帮助了解分形产生的迭代算法, 了解计算机技术在分形研究中的应用, 下面给出一个用 Basic 语言编写的产生 Koch 曲线的程序。

产生 Koch 曲线的计算机迭代算法

```

110 '
110 ' VON KOCH CURVE
120 '
130 N=12:PI=3.14159
140 DIM X (2^ (N+1) -2), Y (2^ (N+1) -2)
150 SCREEN 2, 0:CLS
160 WINDOW (0, -2/3) - (1, 0)
170 'VIEW (0, 0) - (599, 399)
190 A=SQR (1/3) * COS (PI/6)
200 B=SQR (1/3) * SIN (PI/6)
210 A1=A: A2=B: A3=B: A4=-A
220 B1=A: B2=-B: B3=-B: B4=-A
230 '

```

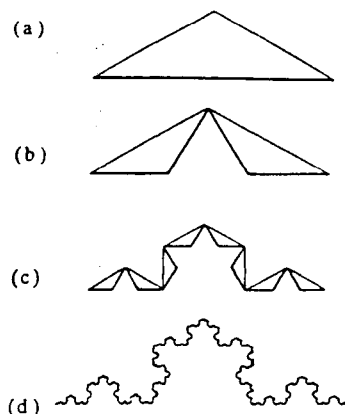


图 1.1 Koch 曲线

(a) 单位线段; (b) 单位线段三等分, 中间一段用与其长度相同的两段替代; (c) 将 (b) 得到图形中的线段再三等分, 中间用与其长度相同的两条折线替代; (d) 不断重复以上迭代作法得到 Koch 曲线

```

240 X (0) =0 : Y (0) =0
250 FOR M=1 TO N
260 L2=2^(M-1)-1 : L1=L2*2+1 : L3=L1*2
270 FOR K=0 TO L2
280 XX=X (L2+K) : YY=Y (L2+K)
290 X (L1+K) =A1*XX+A2*YY
300 Y (L1+K) =A3*XX+A4*YY
310 X (L3-K) =B1*XX+B2*YY+1-B1
320 Y (L3-K) =B3*XX+B4*YY-B3
330 PSET (X (L1+K), -Y (L1+K))
340 PSET (X (L3-K), -Y (L3-K))
350 NEXT K
360 NEXT M
370 END

```

值得指出的是，从原始图形出发，依照上面程序中 160 条和 220 条的规则，就可以生成 Koch 曲线。假如我们对迭加规则作以下改动（程序中其他条不变）：

```

110' FRACTAL BRANCH
160 WINDOW (0, -1/3) - (1, 1/3)
220 C=2/3 : B1=C : B2=0 : B3=0 : B4=-C

```

有兴趣的读者运行修改后的程序不难发现，生成的图案是如同松柏树枝形状的图形。松柏树枝与 Koch 曲线是十分不同的形状，但产生这些图形的计算机程序却几乎是相同的，不同的是 160 条和 220 条所反映的生成规则不同。这种生成规则，仿佛象遗传密码一样，可以生成各种各样的图形。这正是十分复杂的事物（图形或集合）可以少数简单的参数（分形维数或遗传密码）来描述的原因。

本节主要介绍的是分形与分维的基本概念。后面几节将要介绍的从实际现象分析其分维（或遗传密码）的问题，这与分子生物学的研究有许多相似之处。

1.1.4 数学分形

严格满足自相似条件的图形（例如上面谈到的 Koch 曲线），我们称之为数学分形，也叫做有规分形。在地球科学和物理学中存在的分形，它们的自相似性是近似的或统计意义上的，我们称之为统计分形，或无规分形。第 2 节我们将专门讨论统计分形。

现在以三分 Cantor 集合为例，说明数学分形的一些特点。如图 1.2 所示，把线段 $[0, 1]$ 分成三等分，把中央的部分 $[1/3, 2/3]$ 去掉。接着，把剩余的线段 $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$ 再分别分成三等分，去掉中央的部分 $[1/9, 2/9]$, $[7/9, 8/9]$ 。这种作法不断重复下去，图 1.2 给出了第 7 级的情况。当这一操作反复无限次达到极限时所剩下来的点的集合，叫做 Cantor 集合。从上面讨论可知，Cantor 集合是严格自相似的，它的分维 D_0 为

$$D_0 = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309 \dots$$

关于 Cantor 集合有两点值得强调。第一，以上三分 Cantor 集合是把单元线段分成三段，舍去一段，保留 2 段，不断重复这种作法而生成的。倘若将单位线段等分 3^K (K 是任意整

数), 保留 2^K 段, 并不断重复这种作法, 也可以得到一个分形的 Cantor 集合, 它是与三分 Cantor 不同的集合, 它的分维 D_0

$$D_0 = \ln 2^K / \ln 3^K$$

$$= \ln 2 / \ln 3 = 0.6309 \dots$$

与三分 Cantor 集合相同。因此, 不同的分形图可以具有相同的分维。因此, 分维既可以表征分形的基本特征, 但要完全确定地描述分形, 目前意义下用单一参数——分维是不够的, 需要用多个 (甚至无穷多个) 参数来描述。这就是下面第 4 节中

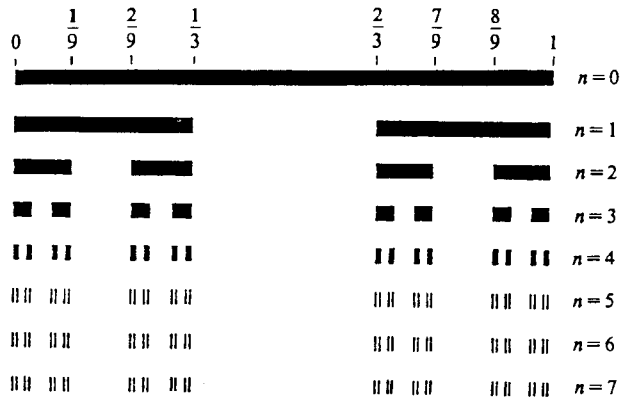


图 1.2 具有严格自相似性的三分 Cantor 集合

要讲的多重分形。第二点需要强调的是, 数学分形经常是用来解释复杂现象的简单数学模型, 仍以 Cantor 集合为例, Cantor 集合是由无穷多个点组成, 相邻点之间存在着“空区”, 如果把单位线段看成是时间轴, 每个点看成是发生在时间轴上的一次“点”事件, 可以把相邻事件之间的“空区”看成是事件的间隔时间 Δt_i 。从图 1.2 最下方的 Cantor 集合可以看出, 存在着各种大小的 Δt_i 。可以证明, 比 Δt_0 间隔长的“空区” Δt_i 的数目 $N(\Delta t_i > \Delta t_0)$ 与 Δt_0 之间存在着幂指数关系, 其幂指数即为 Cantor 集合的分维 D_0 , 即

$$N(\Delta t_i > \Delta t_0) \propto (\Delta t_0)^{-D_0}$$

证明如下: 用 Δt 作尺子去测量 Cantor 集合的空区。由分形定义可知长度为 Δt 的空区数目 $N(\Delta t)$ 与 Δt 之间的关系是

$$N(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-D_0}$$

空区的总长度 $L(\Delta t) = N(\Delta t) \cdot \Delta t \propto (\Delta t)^{1-D_0}$

当尺子长度由 Δt 减少至 $\Delta t - \delta t$ 时, 由于在时间轴上长度在 $(\Delta t - \delta t, \Delta t)$ 区间的空区数目增加, 空区总长度会增加。令 $n(\Delta t)$ 表示长度在 $(\Delta t - \delta t, \Delta t)$ 之间的空区数目, 则有

$$\frac{d(L(\Delta t))}{d(\Delta t)} \cdot \delta t \propto n(\Delta t) \cdot \Delta t \cdot \delta t$$

$$\propto (\Delta t)^{-D_0} \delta t$$

$\therefore$

$$n(\Delta t) \propto (\Delta t)^{-D_0-1}$$

于是

$$N(\Delta t > \Delta t_0) = \int_0^{\Delta t_0} n(\Delta t) d(\Delta t) = (\Delta t_0)^{-D_0}$$

Kagan 和 Knopoff 等 (1981) 指出地震发生的时间分布是分形的, 由简单的 Cantor 模型可导出地震事件的间隔时间是幂指数分布的, 而不是随机模型所预期的泊松分布。由此可见数学分形在许多实际问题中所起的数学模型作用。

图 1.3 所示的是另一种数学分形的例子, 叫做 Menger 海绵。将一个单位立方体分成边长为 $\frac{1}{3}$ 的 27 个小立方体, 去掉各面中心的 6 小立方体以及体积中心的那个立方体, 保留 20 个小立方体。不断重复这个过程, 最后得到的极限图形就是 Menger 海绵, 按照 (1.2) 式, Menger

海绵的分维

$$D_0 = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2.7268$$

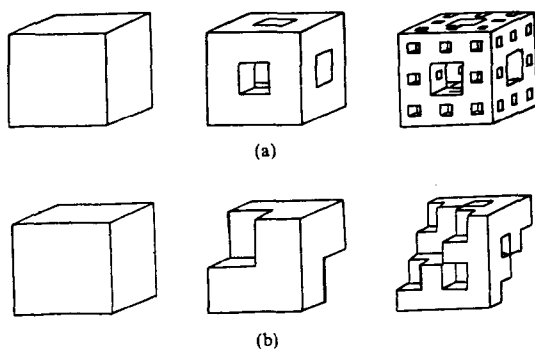


图 1.3 Menger 海绵

Menger 海绵可以用来作为模拟岩石结构的数学模型。从表观上看, 海绵立方块是一个立方体, 是 3 维的。但它是以某一构造而规则形成的许多孔洞的高度无序结构。假定最初单位立方体的密度是 ρ_0 , 不难计算出经过 n 次迭代后生成的图形的平均密度是

$$\rho_n = \left(\frac{20}{27}\right)^n \rho_0$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\rho_\infty = 0$$

这表明, Menger 海绵的质量 (或体积) 为零。即在一定压力下它能压实在一个平面上, 这时就是 2 维的。这说明, 表观看上去充实的立方体实际上是部分充实的 3 维结构, 其真实维数大于 2.0 而小于 3.0。所以可以说, 经典几何的整数维数只能反映物体的表观现象 (立体是 3 维的, 平面是 2 维的), 而分形维数能刻划物体的内在特性。

岩石材料的结构非常类似于海绵体, 它包含了大量不同大小 (即不同层次) 的孔隙和微裂纹, 它具有分形结构。岩石的变形、断裂、孔隙率、渗透率、密度、及其他物理力学性质均应具有分形特征。大量的实验结果已证实了这个思想 (谢和平, 1994)。

图 1.4 给出了几个数学分形的例子。从图 1.4 所示的图形, 不难发现这些图形的生成规则。这些图形在实际问题的模拟方面, 均起了很重要的作用。

除了用迭代法可以产生分形图形外, 利用映射也能产生复杂的分形图形。它们都是数学分形的典型例子。下面举一个例子:

$$Z_{n+1} = aZ_n (1 - Z_n)$$

式中 Z 是复平面上的点。上式实际是一种复数的 Logistic 映射。我们通常把在 $n \rightarrow \infty$ 时不能成为 $|Z_n| \rightarrow \infty$ 的初始值 $\{Z_n\}$ 的集合称为 Julia 集合。上面的例子是一个非线性的映射, 在用数值方法求解代数方程和超越方程时经常会遇到这种映射方程。改变上述非线性映射形式, 或

取 a 以不同数值, 会得到产生的各种不同的分形图形。Mandelbrot 在他的书中给出了许多 Julia 集合的五彩缤纷的分形图形 (Mandelbrot, 1982)。^{*}

```

100 '
110 ' JULIA SET (F(Z) = A * Z * (1 -
Z))
120 '
130 AR=3.3 : AI=0
140 XN=499 : NY=399 : R=4 : TM=
50
150 XL=0! : XU=1! : YL=-.25 :
YU=.25
160 SCREEN 2 : CLS 3
170 WINDOW (XL, -YU) - (XU, -
YL) : VIEW (0, 0) - (NX, NY)
180 DX = (XU - XL) / NX : DY = (YU
- YL) / NY
190 '
200 FOR I = XL + DX TO XU - DX
STEP DX
210 FOR J = YL + YX TO YU - YX
STEP DY
220 ZR=I : ZI=J : T=0
230 ZR2=ZR * ZR : ZI2=ZI * ZI
240 * LOOP
250 ZZR=ZR - ZR2 + ZI2 : ZZI=ZI * (1 - 2 * ZR)
260 ZR=AR * ZZR - AI * ZZI : ZI=AR * ZZI + AI * ZZR
270 ZR2=ZR * ZR : ZI2=ZI * ZI
280 IF ZR2 + ZI2 > R GOTO * GO
290 T=T+1 : IF T < TM GOTO * LOOP
300 PSET (1, -J)
310 * GO
320 NEXT J : NEXT I

```

1.1.5 分形的周长, 周长-面积关系

在 § 1.1.2 中我们已经讨论过 Koch 曲线的长度问题, 现作更为一般性的讨论。我们以图

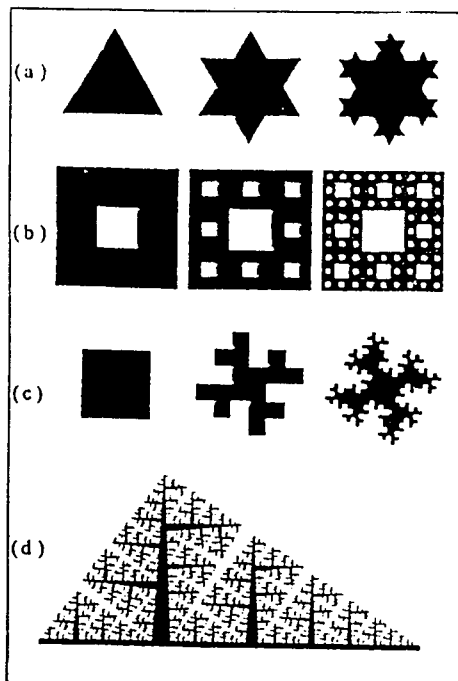


图 1.4 几种常见的数学分形

(a) 三分 Koch 雪花的边界线, $D_0 = \ln 4 / \ln 3 = 1.2618 \dots$; (b) Sierpinski 地毯, $D_0 = \ln 8 / \ln 3 = 1.8928 \dots$; (c) 正方 Koch 岛屿, $D_0 = \ln 8 / \ln 4 = 1.5$; (d) D_0 接近于 2 的一个自相似图形

* 读者若有兴趣, 可以试用以下的一个计算机程序来产生 Julia 分形图形 (这个程序引自高安秀树的“分数维”一书)。改变语句 130 中的 AR 值和 AI 值, 分形图形的形状就会产生各种各样的变化。另外, 如果跳过语句 280 时的 T 值给以相应的颜色, 就可以见到极为漂亮的彩色数学分形图形。

1.4 (a) 的 Koch 雪花为例。

若以 $\delta_n = (1/3)^n$ 为尺子, 测量第 n 级 Koch 雪花的边长, 得到 P_n 个单位的尺子长度, 显然

$$P_n = 3P_{n-1} = 3 \times 4^n = 3 \times \left(\frac{1}{3^n}\right)^{-D} = 3 \times \frac{1}{\delta_n^D} \times 4^n = 3 \times (1/3^n)^{-D} = 3 \times 1/\delta_n^D$$

式中 $D = \ln 4 / \ln 3$ 是 Koch 雪花的分维。从上式可以得出

$$P_n \propto \frac{1}{\delta_n^D} \quad (1.3)$$

$$L_n = P_n \delta_n = 3 \delta_n^{1-D} \quad (1.4)$$

L_n 是第 n 级 Koch 雪花图形的周长。从 (1.4) 式可以看出, 分形体的周长是随测量用的尺子长度 δ_n 而变化的, 当 $\delta_n \rightarrow 0$ 时, 周长趋于无穷长。这是分形的显著特征之一。

对于欧几里得几何中讨论的规则几何形状(例如一个圆), 其周长 P 与面积 A 的关系通常是

$$P \propto A^{\frac{1}{2}}$$

而对于分形体, 上述关系式不再成立, 出现了新的周长-面积关系式。例如以 Koch 雪花为例, 第 n 级图形的周长和面积分别为

$$L_n = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$A_n = A_0 \left[1 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \times 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + 3 \times 4^{n-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \right]$$

其中 A_0 是 0 级 Koch 雪花的面积

当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$L_n \rightarrow \infty$$

$$A_n \rightarrow \frac{8}{5} A_0$$

这些现象是欧氏几何难以解释的。若用长度为 δ 的单位去测量 Koch 雪花的长度, 得到 P_δ 个单位的尺子长度, 测量结果有

$$P_\delta \propto \frac{1}{\delta^D}, \quad P_\delta^{\frac{1}{D}} \propto \frac{1}{\delta}$$

用 δ^2 作面积单位去测量 Koch 雪花, 得到 A_δ 个面积单位, 有

$$A_\delta \propto \frac{1}{\delta^2}, \quad A_\delta^{\frac{1}{2}} \propto \frac{1}{\delta}$$

由上两式可得

$$P_\delta^{\frac{1}{D}} \propto A_\delta^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

(1.5) 式就是分形体的周长 P 和面积 A 的关系式。当周长曲线的 $D=1$ 时, 该式就与欧氏几何中规则几何体的公式一致。(1.5) 式可以用来确定分形体的 D 值。该式在材料科学中有着广泛的应用 (Xie, 1993)

1.1.6 小结

表 1.1 对比了欧氏几何与分形几何的不同特点, 可作为本节内容的小结。

表 1.1 欧氏几何与分形几何不同特点的对比

欧氏几何	分形几何
是过去 2000 年的传统几何学	刚刚问世不到 20 年的一门新几何学
具有特征尺度	没有特征尺度, 各种尺度下存在着标度律
适用于描述规则形式, 常用于制造物体	适用于描述不规则的形式, 在自然界的描述中有广泛应用
主要用公式来描述, 演绎推理是主要的方法	常用的是递推算法, 离不开计算机的应用

概括来说, 分形与不规则形状的几何有关。早期概念中的分形要求整体与它的局部都相似, 即是一种从数量和形状都具有的严格的“自相似性”。下面几节将向大家介绍的是, 当今概念中的分形, 对自相似性作了适当的修正和推广(如统计分形、多重分形等), 使其更能接近现实的事物。这套几何工具在处理许多非线性现象时是很有效的。分形理论开始时是在真实世界中寻找应用例子, 后来, 人们则寻找产生分形的物理规律, 研究分形形状的事物是如何随时间演化的。目前分形的数学理论还不完善, 如象微积分那样的运算操作都还没有。分形数学与分形物理的结合刚刚开始。

§ 1.2 统计分形

1.2.1 数学分形和统计分形

自然界的许多事物和现象表现出极为复杂的形态, 而不是数学分形所显示的那样理想化。自相似性或标度不变性往往以统计方式表示出来, 即当改变尺度时, 在该尺度包含的部分统计学的特征与整体是相似的。这种分形是数学分形的一种推广, 叫做统计分形或无规分形。

下面我们通过一个例子来说明什么是统计分形。图 1.5 (a) 给出了一个产生严格自相似分形图形的迭代作法: 取一单位正方形 ($k=0$), 将其 9 等分, 去掉四个边上中部的 4 个小正方形, 保留其余的 5 个小正方形 ($k=1$)。再对保留下来的正方形重复上述操作 ($k=2, k=3$), 当 $k=\infty$ 时的极限图形是严格数学意义上的自相似, 是一个数学分形。假如改变上述作法, 首先取一单位正方形 ($k=0$), 将其 9 等分, 任意去掉 9 个小正方形中的 4 个, 保留剩下的 5 个 ($k=1$), 对保留下来的正方形反复重复上述操作, 最后得到的极限图形在各级小正方形数目这一点上是与数学分形(图 1.5 (a))是相同的, 但各级图形的形状与数学分形中各级图形形状是不同的, 这种生成的图形称之为统计分形。

数学分形是一种理想的情况, 它必须具备两个条件: (1) 数学分形曲线必须具有无穷的“层次(hierarchy)”结构, 象 Koch 曲线(图 1.1)那样; 数学分形集合必须是无限点的集合, 象 Cantor 集合(图 1.2)那样; 只有无限的层次结构, 才能使得自相似性(标度不变性)处处成立; (2) 数学分形的任何一个局部放大后, 都和整体完全相似(形状、数量以及统计分布上都相似)。数学分形是分析自然界复杂事物的一个数学模型。要想具体应用到真实的自然现象, 我们应该对数学分形作些推广和修正。概括说来, 推广有两个方面: 第一由无穷“层次”结构到有限的“层次”结构, 或由无穷集合到有限集合的推广, 这里就产生了在一定范围内自相似性或无标度性成立的问题, 即无标度区间的问题; 第二由严格的数学相似性到近似的统计相似性的推广。在下面的两小节中, 我们分别对这两个方面的推广作些介绍。

图 1.5 (b) 所示的例子, 保留了无穷集合的特点, 但对自相似性的内容作了推广。它的

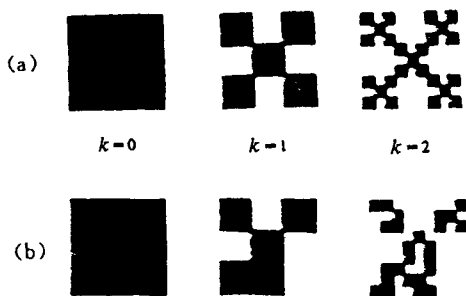


图 1.5 统计分形实例

(a) 严格自相似的数学分形的产生过程。将原始正方形 9 等分，去掉边上中心的 4 个小正方形，保留其余 5 个。对保留下来的小正方形不断重复上述操作，所得的极限图形是严格自相似的数学分形。(b) 近似自相似的统计分形。原始正方形 9 等分后，任意去掉其中 4 个小正方形，保留 5 个。对保留下来的每个正方形再不断重复上述操作，所得极限图形是近似自相似意义下的统计分形。在各级正方形数目上，它遵守自相似原则，但各级图形的形状是不相似的

一个部分(子集)放大后，集合的统计特征(如各种尺度正方形的数目分布等)与原集合是相似的。对于这种统计分形研究而言，使用概率语言来描述统计特征是十分合适的。

1.2.2 超越率函数和统计特征

概率论是研究随机现象数学规律的学科。所谓随机现象是指这样的客观现象，当人们观察它时，所得结果不能预先确定，而只是多种可能结果中的一种。在自然界和人类社会中，存在着大量的随机现象。例如，图 1.5 (b) 产生的分形就有许许多多形状。从原始图形出发，按照图 1.5 (b) 要求的规则，每一次产生的图形称之为随机试验，随机试验的每一可能的结果称之为一个基本事件，一个或一组基本事件通称随机事件，或简称事件。事件发生的可能性量度则叫做其概率。

在进行分形几何研究时，我们把描述集合(或图形)中元素的随机变量(如元素的大小、位置、质量等)取作 ξ 。随机变量 ξ 的统计特征可

以由以下三种方法来描述：

1. 概率密度函数 $f(r)$

$f(r) dr$ 表示随机变量 ξ 落入 $(r, r+dr)$ 区间中的概率 $p(r < \xi \leq r+dr)$ ，即

$$p(r < \xi \leq r+dr) = f(r) dr$$

2. 分布函数 $F(r)$

$F(r)$ 是随机变量 $\xi \leq r$ 的概率，即

$$F(r) = p(\xi \leq r) = \int_{-\infty}^r f(r) dr$$

显然： $f(r) = dF(r) / dr$

3. 超越率函数 $P(r)$

$P(r)$ 是随机变量 $\xi \geq r$ 的概率，即

$$P(r) = p(\xi \geq r) = 1 - F(r) = \int_r^{\infty} f(r) dr$$

显然： $P(r) + F(r) = 1$ ， $f(r) = -dP(r) / dr$ 。水文学中经常称这个函数 $P(r)$ 为保证率函数，它指随机变量大于某个数值的概率，例如某处水位高于 60m 的概率等。在地震危险性分析中则称 $P(r)$ 为超越率函数；通过它给出某地区地震动参数大于某水平的超越概率。

利用上述几种描述，随机变量的一些统计特征就可求出，例如

$$\text{数学期望} \quad E(\xi) = \langle \xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi$$