5413

模糊数学方法与应用

冯德益　楼世博 等　编著

地 震 出 版 社

模糊数学方法与应用

冯德益　楼世博　林命週
陈化成　顾瑾平　钟廷姣　编著

地震出版社

1985

内 容 提 要

本书是作者根据若干年来对模糊数学的研究与应用的经验，并参考了国内外有关文献编写的.

本书共分六章. 第一、二章介绍模糊数学基础知识，第三章阐述模糊数学的一些常用方法，第四、五、六章分别叙述模糊数学在地震、气象及其它科技领域中的初步应用结果. 书末附有模糊聚类分析程序.

本书可供地震、气象、地质、矿业、医疗卫生、农业、环境保护，以及工业、交通运输、经济管理等部门的科研人员、生产人员参考.

模糊数学方法与应用

冯德益　楼世博等　编著

•

地震出版社 出版

北京复兴路63号

北京朝阳区展望印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

•

787×1092 1/16　12印张　262千字

1983年7月第一版　1985年12月第二次印刷

印数：15,001—20,100

统一书号：13180·193　　定价：2.80 元

前　　言

如所周知，尽管事物的各种表观或内在属性有其确定性，但是，由于观测手段和科研水平所限，在科学发展的一定阶段上人们对这些属性的认识常带有模糊性．为了描述并分析自然界及人类社会中的各种模糊事物，人们就要探索能表现事物模糊性的新的数学工具．

1965 年，美国自动控制学家 L. 柴德首先提出了用"模糊集合"(Fuzzy sets)描述模糊事物的数学模型．自柴德发表开创性文章以来，模糊数学发展很快．目前，这门新学科已在自动控制、信息处理、天气预报、地震研究、人工智能、图象识别、医疗诊断、体育训练、农作物选种、商品评价、化合物分类以及经济学、心理学、社会学、生态学、语言学、管理科学、历史学、法学和哲学研究等多种领域内得到应用．

当前，模糊数学这门新兴数学分支的研究领域可大体分为三个方面：模糊数学理论及其与经典数学、统计数学的关系；模糊语言和模糊逻辑；模糊数学的应用．这三方面的研究内容是相辅相成的，尤其是后两个方面的关系更为密切．本书主要介绍模糊数学方法与应用方面的一些研究结果，也要涉及到模糊语言和逻辑．

模糊数学虽然在自然科学及社会科学领域内都有广阔的发展前景，但它正处于发展当中，一些应用问题才初见成效或开始进行探索，并且需要继续完善．因此，希望读者在阅读和使用本书的方法原理时，对书中不当之处加以指正！

本书是在国家地震局 1981 年在兰州举办的模糊数学讲习班讲义的基础上编写的．书中有些章节曾引用了楼世博、金晓龙、孙章、程里春、宋大鹏、曹立明等合写的文章，以及陈国范、曹鸿兴等气象工作者的某些研究论文，同时还有刘贞荣、童增祥等在讲习班上所作报告的某些内容．在此我们谨向上述各位同志表示衷心的感谢！

作　　者

1982 年 9 月

常 用 数 学 符 号

$\in$：属于

$\overline{\in}$：不属于

$\wedge$，$\cap$：交

$\vee$，$\cup$：并

$\neg A$ 或 A^c：非 A

$A\to B$：A 蕴含 B

$A\Leftrightarrow B$：A 和 B 等价

$(\exists x)P(x)$：存在 x 满足 $P(x)$

$(\forall x)P(x)$：对所有的 x 满足 $P(x)$

$\forall i$：对任意的 i

$A\supseteq B$：A 包含 B

$A\subseteq B$：B 包含 A

$\underset{\sim}{A}$：模糊集

ϕ：空集

Ω：全集

$\wedge(\mu_1,\ \mu_2)$：求 μ_1，μ_2 中的极小值，可换为 $\min(\mu_1,\ \mu_2)$

$\vee(\mu_1,\ \mu_2)$：求 μ_1，μ_2 中的极大值，可换为 $\max(\mu_1,\ \mu_2)$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$：$\underset{\sim}{A}$ 的从属函数，即 $\underset{\sim}{A}$ 中元素 x 的从属度或隶属度

$A_\lambda=\{x\mid\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geqslant\lambda\}$：模糊集 A 的 λ 水平集

$\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}$：模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的环和

$A\times B$：集合 A 和 B 的直积

xRy：x 和 y 有关系 R

$F\circ R=\bigvee_k(f_{ik}\wedge r_{kj})$：关系 F，R 的合成运算

$\underset{\sim}{A}\otimes\underset{\sim}{B}$：模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的内积

$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B}$：模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的外积

$(\underset{\sim}{A},\ \underset{\sim}{B})$：模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的贴近度

$\|X\|$：X 的范数，X 为多维空间的向量

$\overline{A}$：A 的补集，即 $\overline{A}=\Omega-A$

$\overline{\underset{\sim}{A}}$：模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的补集

$\underline{\underset{\sim}{A}}$：模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的下模

$\overline{\underset{\sim}{A}}$：模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的上模

目　　录

第一章　模糊数学基础知识

§1.1 经典集合及其运算

一、集合的概念

定义 1.1.1 具有某种属性的元素的全体叫做集合，或简称为集．集合里每一个成员叫做这个集合的元素，或简称为元．

数学讨论的对象，如代数中的数，几何中的点、直线等，我们统统叫做元素．

任何一个元 a，如果它有集合 M 的特性，也就是说它是 M 的元时，我们就用记号

$$a\in M$$

来表示．如果它没有集合 M 的特性，也就是它不是 M 的元时，我们用

$$a\overline{\in} M$$

来表示．有时，a 在 M 中我们也说 a 属于 M，或者说 M 包含 a；同样，a 不在 M 中我们也说 a 不属于 M，或者说 M 不包含 a．

定义 1.1.2 假如一个集所包含的元为有限个，就叫做有穷集，否则就叫做无穷集．一个集所包含的元的个数，叫做这个集的元数或基数，有穷集的元数（或基数）当然是自然数．

二、集合的表示

有穷集可以用列举法来表示．例如 10 到 20 之间的质数所构成的集合可表示为

$$\{11,\ 13,\ 17,\ 19\}.$$

可数且有明显规律的集合可用省略法来表示．例如自然数集 N 可表示为

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}.$$

集合一般可用表征法来表示，即：任给定一个性质 P，那么存在着一个集合 S，它的元素恰好是具有性质 P 的那样一些对象．我们可用

$$S=\{x\,|\,P(x)\}$$

来表示这个集合，其中 $P(x)$ 是"x 具有性质 P"的一个缩写．例如，所有大于 0 并且小于或等于 2 的实数可表示为

$$(0,\ 2]=\{x\,|\,0<x\leqslant 2\}.$$

例 1.1.1　设 $A=\{x\,|\,x^2-1=0\}$，它是满足方程 $x^2-1=0$ 的一切 x 组成的集合．解方程即得

$$A=\{x\,|\,x^2-1=0\}=\{-1,\ 1\},$$

它的元素只有两个：-1 和 1．由于它的元素的个数为有限个，所以它是一个有穷集．

例 1.1.2　设 Z 是整数集（即由全体整数所组成的集合），那么

$$E=\left\{n \left| \frac{n}{2} \in Z\right.\right\}$$

也是一个集合．条件"$\frac{n}{2}\in Z$"表示$\frac{n}{2}$属于整数集，即这种n必须是偶数：

$$E=\left\{n \left| \frac{n}{2} \in Z\right.\right\}=\{0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \cdots\},$$

它是一个无穷可数集．

三、子集、空集、全集和幂集

引进逻辑符号$\wedge$，$\vee$，$\neg$（或者右上角放上c），$\rightarrow$，$\Leftrightarrow$，$\exists$和$\forall$对集合的表示是十分有用的．$A\wedge B$表示A且B，即同时满足A和B，$A\vee B$表示A或B，即至少满足两者之一，$\neg A$（或A^c）表示非A，即不存在A，$A\rightarrow B$表示A蕴含B，$A\Leftrightarrow B$表示A和B等价．$(\exists x)P(x)$表示存在x满足$P(x)$，$(\forall x)P(x)$表示所有的x均满足$P(x)$．

定义 1.1.3 假如集合N中所有的元都是集合M的元，也就是说N是M的一部分，那么N就叫做M的子集，M又叫做N的包含集．我们用记号$N\subseteq M$或$M\supseteq N$来表示，即

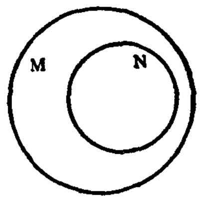


图 1.1.1

$$N\subseteq M\Leftrightarrow(\forall x)\ (x\in N\rightarrow x\in M).$$

子集与包含集的关系可以用图形来说明．从图 1.1.1 上我们很容易看出N中所有的元都在M中，也就是说任意一个元x，如果属于N，它一定也属于M．

定义 1.1.4 假如M的所有元都属于N，同时N的所有元又都属于M，即

$$M\subseteq N,\quad N\subseteq M,$$

也就是说M和N的特性完全相同时，我们就说M与N相等，用记号

$$M=N$$

来表示．即

$$M=N\Leftrightarrow(M\subseteq N\wedge N\subseteq M).$$

定义 1.1.5 假如$N\subseteq M$，但N和M不相等，那么N就叫做M的真子集，M叫做N的真包含集，用记号

$$N\subset M \quad 或 \quad M\supset N$$

来表示．这时N的所有元都属于M，但M中至少有一个元不属于N，即

$$N\subset M\Leftrightarrow(N\subseteq M\wedge(\exists x)((x\in M)\wedge(x\overline{\in}N))).$$

例如$\{1,\ 2\}\subseteq\{1,\ 2,\ 3\}$，$\{1,\ 2\}\subset\{1,\ 2,\ 3\}$．

定义 1.1.6 不含元素的集合称为空集，记为Φ，即

$$\Phi=\{x\,|\,P(x)\wedge\neg P(x)\}.$$

此式表示$(\forall x)\overline{\in}\Phi$．

定义 1.1.7 我们把讨论范围的全体称为全集，记为Ω，即表示$(\forall x)\in\Omega$．

显然，任意一个集合A都包含在Φ和Ω之间，

$$\Phi\subseteq A\subseteq\Omega,$$

所以空集是任何集合的子集．

定义 1.1.8 集合 A 的所有子集组成的一个新的集合称为幂集，记作 $P(A)$.

例如，假定 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$，则

$$P(A)=\{\Phi, \{a_3\}, \{a_2\}, \{a_2a_3\}, \{a_1\}, \{a_1a_3\}, \{a_1a_2\}, A\},$$

如果 A 为有穷集，设 A 中有 n 个元素，则 $P(A)$ 有 2^n 个子集. 用两项式公式

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n,$$

立即可得到这个结论.

例 1.1.3 设 R 是实数集(即由全体实数所组成的集合). 那么

$$S=\{x|x\in R\wedge x^2+1=0\}$$

就是由方程 $x^2+1=0$ 的属于实数的根所组成. 由于这个方程没有实根，所以集合 S 是空的. 于是

$$S=\{x|x\in R\wedge x^2+1=0\}=\Phi.$$

要注意：$\{x|x^2=0\}=\{0\}$ 不是空集，因为它是由一个元素 0 所组成，所以并不空.

四、交集、并集、差集和补集

定义 1.1.9 假如 A、B 是两个集，那么属于 A 同时又属于 B 的所有元组成的集 P，就叫做 A 与 B 的交集，用记号

$$P=A\cap B$$

表示，即

$$A\cap B=\{x|x\in A\wedge x\in B\}.$$

于是 P 是 A, B 的子集，并且任何集只要它同时是 A, B 的子集，它一定是 P 的子集，因此 P 是包含在 A, B 中的最大集.

定义 1.1.10 假如 A、B 是两个集，那么属于 A 或属于 B 的所有元组成的集 S，就叫做 A 与 B 的并集，用记号

$$S=A\cup B$$

表示，即

$$A\cup B=\{x|x\in A\vee x\in B\}.$$

定义 1.1.11 假如 A, B 是两个集，那么属于 A 但不属于 A, B 之交集的所有元素组成的集 Q 称为 A 与 B 的差集，用记号

$$Q=A-B$$

表示，即

$$A-B=\{x|x\in A\wedge x\overline{\in} A\wedge B\}.$$

定义 1.1.12 我们称 $\Omega-A$ 为 A 的补集，记为 $\overline{A}$，即

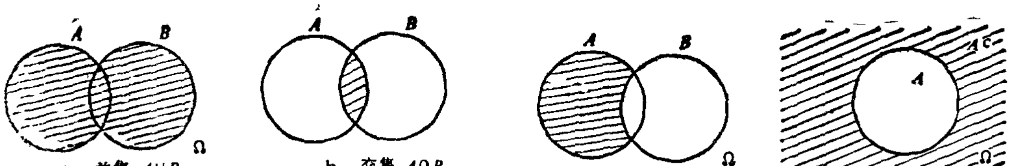
$$\overline{A}=\Omega-A=\{x|x\overline{\in} A\wedge x\in\Omega\}.$$

例 1.1.4 设 $A=(-1, 1)$, $B=[0, 2]$，那么

$$A\cup B=(-1, 2],\ A\cap B=[0, 1),$$
$$A-B=(-1, 0),\ B-A=[1, 2].$$

五、文 氏 图

利用各种重迭的图来代表集合的所谓文氏图是帮助理解集合关系的一种有价值的直观工具 图 1.1.2 中就是利用这种图来表示并、交、差及补集.



a、并集 $A\cup B$　　b、交集 $A\cap B$　　c、差集 $A-B$　　d、补集 $\overline{A}$

图 1.1.2

六、集合运算性质

1．幂等律

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A.$$

2．交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A.$$

3．结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

4．吸收律

$$A\cap(A\cup B)=A,$$
$$A\cup(A\cap B)=A.$$

5．分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

6．复归律

$$\overline{\overline{A}}=A.$$

7．对偶律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

8．互补律

$$A\cup\overline{A}=\Omega,\quad A\cap\overline{A}=\Phi,$$
$$A\cup\Omega=\Omega,\quad A\cap\Omega=A,$$
$$A\cup\Phi=A,\quad A\cap\Phi=\Phi.$$

现在，我们把两个集合的并和交推广到许多集合的并和交．设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个集合，我们用记号 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 表示这 n 个集合之并，用记号 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 表示它们的交，其确切含义是：

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid \text{在 } A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 中至少有一个集合含有 } x\},$$

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n=\{x\mid x \text{ 属于一切 } A_i, i=1, 2, \cdots, n\}.$$

那么对偶律可表示为

(1) $(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)^c=\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c$,

(2) $(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)^c=\bigcup_{i=1}^{n}A_i^c$.

例 1.1.5　设 $X=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$，$A_1=\{2, 3\}$，$A_2=\{2, 4, 6\}$，$A_3=\{3, 4, 6\}$，$A_4=\{7,$

8}, $A_5=\{1, 8, 10\}$, A_i^c 是 A_i 在 X内的补集($i=1, 2, 3, 4, 5$), 求 $\bigcap\limits_{i=1}^{5} A_i^c$.

利用对偶律得

$$\bigcap_{i=1}^{5} A_i^c=(\bigcup_{i=1}^{5} A_i)^c=X-(\bigcup_{i=1}^{5} A_i)=X-\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}=\{5, 9\}.$$

七、特 征 函 数

对 Ω 的子集 A 而言, 由

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1(x\in A)\\0(x\overline{\in} A)\end{cases}$$

所定义的函数 $\mu_A(x)$ 称为 A 的特征函数.

如果集合 $S=\{0, 1\}$, 在此集合中三种运算 $\vee$, $\wedge$, ^{c} 规定如下:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

α	α^c
0	1
1	0

那么我们称($\{0, 1\}$, $\vee$, $\wedge$, ^{c})属于布尔代数系统.

假定 A, B 和 C 为 Ω 的子集, 它们的特征函数分别为 μ_A, μ_B 和 μ_C, 则

$$A\subseteq B\Leftrightarrow \mu_A(x)\leqslant\mu_B(x), \quad \forall x\in\Omega;$$
$$C=A\cup B\Leftrightarrow \mu_C(x)=\vee\{\mu_A(x), \mu_B(x)\};$$
$$C=A\cap B\Leftrightarrow \mu_C(x)=\wedge\{\mu_A(x), \mu_B(x)\};$$
$$C=\overline{A}\Leftrightarrow \mu_C(x)=1-\mu_A(x), \quad \forall x\in\Omega.$$

§1.2 模糊集合及其运算

一、模糊子集的定义和运算[1,2,3,26,41]

定义 1.2.1 论域 $X=\{x\}$ 上的模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 由从属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 来表征, 其中 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 在实轴的闭区间[0, 1]中取值, $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的大小反映 x 对于模糊集合 A 的从属程度.

这就是说, 论域 $X=\{x\}$ 上的模糊集合 A 是指 x 中的具有某种性质的元素整体, 这些元素具有某个不分明的界限. 对于 X 中任一元素, 我们能根据该种性质, 用一个[0, 1]间的数来表征该元素从属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度.

论域是指被讨论的全体对象, 有时也称为空间. 论域元素总是分明的, 而只有 x 的子集 $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$ 等才是模糊的, 所以模糊集合通常是指模糊子集合. 在不易混淆的场合, 模糊子集简称模糊集.

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的值接近 1, 表示 x 从属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度很高; $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的值接近于 0, 表示 x 从属 $\underset{\sim}{A}$ 的程度很低.

例 1.2.1 $\underset{\sim}{A}$ 表示远大于 0 的实数，即 $\underset{\sim}{A}=\{x|x\gg 0\}$，$\underset{\sim}{A}$ 的从属函数可以确定为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\begin{cases}0, & (x\leqslant 0)\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{100}{x^2}}, & (x>0)\end{cases} \tag{1.2.1}$$

如图 1.2.1 所示.

模糊数学用来研究和处理模糊现象. 在这里，概念本身没有明确的含义，概念的外延是模糊的，我们称之为模糊概念. 为了定量表达模糊概念，我们将集合拓广为模糊集合. 一个对象是否符合一个模糊概念，不应单用一个字“是”或“否”来回答，最好用一个数来反映它从属于该模糊概念的程度. 在模糊数学中，我们用一个 0 与 1 之间的数来反映论域中元素从属于模糊集合的程度，从属函数就是用于这个用途的.

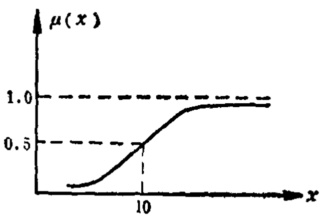


图 1.2.1

模糊概念是客观事物本质属性在人们头脑中的反映，是人类社会在长期发展过程中约定俗成的东西. 模糊性的根源在于客观事物的差异之间存在着中间过渡，存在着亦此亦彼的现象. 但是，在亦此亦彼中依然存在着差异，依然可以相互比较，在上一层次中亦此亦彼的东西，在下一层次中可能又是非此即彼. 当然，从属函数的具体确定，确实包含着人脑的加工，其中包含着某种心理过程. 心理学的大量实验表明，人的各种感觉所反应出来的心理量与外界刺激的物理量之间保持着相当严格的关系. 这些便在客观上对从属函数进行了某种限定，使得从属函数是对模糊概念具有客观性的一种量度，不能主观任意地捏造.

正确地确定从属函数，是利用模糊集合恰如其分地定量表现模糊概念的基础. 文献[1]提出了确定从属函数的一般原则和方法，精辟地阐述了这个问题. 可是，模糊概念何止万千，确定反映模糊概念的模糊集合的从属函数，却无法找到统一的途径可循. 对同一模糊概念，不同的人往往使用不同的从属函数. 只要从属函数能反映该模糊概念，尽管形式不同，但在解决处理模糊信息的问题中仍能殊途同归. 要正确确定从属函数，既要深刻地认识它所反映的模糊概念，又要找到定量反映这模糊概念的恰当形式，因而是很困难的. 应用模糊数学来解决实际问题，往往归结为寻找一个或几个从属函数. 这个问题解决了，其它问题也就迎刃而解. 从属函数的确定过程，本质上是客观的，但又容许有一定的人为技巧. 只有多实践，才能逐渐掌握这些技巧. 本书后面几章介绍了许多从属函数，可供读者参考.

定义 1.2.2 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 均为 X 中的模糊集，如对 $\forall x\in X$，均有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(x),$$

则称 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 相等，即

$$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(x).$$

定义 1.2.3 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 均为 X 中的模糊集，如对 $\forall x\in X$，均有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}(x),$$

则称 $\underset{\sim}{B}$ 包含 $\underset{\sim}{A}$，或称 $\underset{\sim}{A}$ 为 $\underset{\sim}{B}$ 的子集，记为 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$，即

$$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}(x).$$

例如，“非常高的人”这一模糊集是模糊集“高的人”的子集.

如 $\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$ 且 $\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{A}$，则称 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 相等，记为 $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$，即 $\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{A}}\leqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}$ 且 $\mu_{\underset{\sim}{B}}\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}$.

定义 1.2.4 $\underset{\sim}{A}$ 为 X 中的模糊集，如对 $\forall x\in X$ 时，均有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0,$$

则称 $\underset{\sim}{A}$ 为空集，记为 Φ，即

$$\underset{\sim}{A}=\Phi\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0.$$

定义 1.2.5 $\underset{\sim}{A}$ 为 X 中的模糊集，如对 $\forall x\in X$ 时，均有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=1,$$

则称 $\underset{\sim}{A}$ 为全集，记为 Ω，即

$$\underset{\sim}{A}=\Omega\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=1.$$

定义 1.2.6 假如 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 和 $\underset{\sim}{C}$ 是 X 中的模糊集，如对 $\forall x\in X$，有

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)=\vee[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(x),$$

那么 $\underset{\sim}{C}$ 就叫做 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的并集，用记号

$$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$$

表示，即

$$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)=\vee[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)],$$

其中 $\vee$ 表示求最大值，作前置式用时，$\vee$ 也可换写成 max.

例如，若对某 x 而言，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0.9$，$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)=0.4$，则

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)=\max[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]=0.9.$$

又 $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$ 是既包含 $\underset{\sim}{A}$ 又包含 $\underset{\sim}{B}$ 的最小模糊集，这结论可证明如下．因为

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}=\max[\mu_{\underset{\sim}{A}},\ \mu_{\underset{\sim}{B}}]\geqslant\mu_{\underset{\sim}{A}},$$

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}=\max[\mu_{\underset{\sim}{A}},\ \mu_{\underset{\sim}{B}}]\geqslant\mu_{\underset{\sim}{B}},$$

故 $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}$ 既包含 $\underset{\sim}{A}$ 又包含 $\underset{\sim}{B}$．若 $\underset{\sim}{D}$ 为任一既包含 $\underset{\sim}{A}$ 又包含 $\underset{\sim}{B}$ 的集合，则因

$$\mu_{\underset{\sim}{D}}\geqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}\quad 和\quad \mu_{\underset{\sim}{D}}\geqslant\mu_{\underset{\sim}{B}},$$

故

$$\mu_{\underset{\sim}{D}}\geqslant\max[\mu_{\underset{\sim}{A}},\ \mu_{\underset{\sim}{B}}]=\mu_{\underset{\sim}{C}},$$

即

$$\underset{\sim}{D}\supseteq\underset{\sim}{C}.$$

这样就证得了上面的结论.

定义 1.2.7 假如 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 和 $\underset{\sim}{C}$ 是 X 中的模糊集，如对 $\forall x\in X$ 有

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)=\wedge[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)],$$

那么 $\underset{\sim}{C}$ 就叫做 $\underset{\sim}{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 的交集，用记号 $\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$ 表示，即

$$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}\Leftrightarrow\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)=\wedge[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)],$$

其中 $\wedge$ 表示求最小值，作前置式用时，$\wedge$ 也可换写成 min.

仿照上段方法，可证 $\underset{\sim}{C}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的公共子集中的最大的集合.

定义 1.2.8 假如 $\underset{\sim}{A}$ 是 X 中的模糊集，它的补集 $\bar{\underset{\sim}{A}}$ 由下式定义：

$$\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \forall x\in X,$$

即

$$\bar{\underset{\sim}{A}}\Leftrightarrow\mu_{\bar{\underset{\sim}{A}}}(x)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x).$$

二、模糊集的表示

定义 1.2.9 $\underset{\sim}{A}$ 的台是 X 中能使 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)>0$ 的元素的集合.

定义 1.2.10 一个模糊独点集是它的台只有一个元素的集合，如 $\underset{\sim}{A}$ 是一个模糊独点集，它的台只含有元素 x_0，且 $\mu(x_0)=\mu_0$，则 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 可用下式表示：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}=\mu_0/x_0.$$

如 $\underset{\sim}{A}$ 的台仅有有限个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，且 $\mu(x_i)=\mu_i$，则 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 可用下式表示：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}=\mu_1/x_1\cup\mu_2/x_2\cup\cdots\cup\mu_n/x_n=\bigcup_{i=1}^{n}\mu_i/x_i. \tag{1.2.2}$$

在不易混淆的场合，我们可以径用 $\underset{\sim}{A}$ 来表示模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的从属函数；在 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 的表示式中，用"+"号来代替"∪"号，用 "$\sum\limits_{i=1}^{n}$" 号来代替 "$\bigcup\limits_{i=1}^{n}$" 号．如(1.2.2)式可改写成

$$\underset{\sim}{A}=\mu_1/x_1+\mu_2/x_2+\cdots+\mu_n/x_n=\sum_{i=1}^{n}\mu_i/x_i. \tag{1.2.3}$$

(1.2.3)式还可写成

$$\underset{\sim}{A}=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n), \tag{1.2.4}$$

或

$$\underset{\sim}{A}=\{(\mu_1, x_1), (\mu_2, x_2), \cdots, (\mu_n, x_n)\}.$$

如 $\underset{\sim}{A}$ 的台有无限个元素，则 $\underset{\sim}{A}$ 可表示为

$$\underset{\sim}{A}=\int_x \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)/x,$$

其中 $\int_x$ 表示对台中的无限个元素求并，而不用作积分号．

定义 1.2.11 设 $\underset{\sim}{A}$ 为 $X=\{x\}$ 中的模糊集，集合

$$A_\lambda=\{x\mid\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geqslant\lambda\}$$

称为模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ 水平集，或称 A_λ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ 截集．

例 1.2.2 如

$$\underset{\sim}{A}=0.3/x_1+0.6/x_2+1/x_3$$

和

$$\underset{\sim}{B}=0.4/x_1+0.8/x_2+0.2/x_3,$$

则

$$\overline{\underset{\sim}{A}}=0.7/x_1+0.4/x_2+0/x_3,$$

$$\overline{\underset{\sim}{B}}=0.6/x_1+0.2/x_2+0.8/x_3;$$

$$\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}=0.4/x_1+0.8/x_2+1/x_3$$

和

$$\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=0.3/x_1+0.6/x_2+0.2/x_3.$$

例 1.2.3 设 $X=\{2, 1, 4, 5, 8, 9\}$，X 中的模糊集

$$\underset{\sim}{A}=0.1/2+0.3/1+0.5/5+0.9/8+1/9,$$

则

$$A_{0.1}=\{2, 1, 5, 8, 9\},$$

$$A_{0.5}=\{5, 8, 9\},$$

$$A_{0.9}=\{8, 9\}$$

和

$$A_1=\{9\}.$$

显然，A_λ 即 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ 截集是一个清晰集．

定理 1.2.1(分解定理) 设 $\underset{\sim}{A}$ 为 X 的一个模糊集合，其从属函数为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，$A_\lambda$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的 λ 截集，则

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)=\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge\mu_{A_\lambda})$$

是 A_λ 的特征函数．

证明: $\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge A_\lambda(u))=[\bigvee\limits_{\lambda>\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}(\lambda\wedge\mu_{A_\lambda}(u)]\vee[\bigvee\limits_{\lambda\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}(\lambda\wedge\mu_{A_\lambda}(u)]$.

当 $\lambda>\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$, 有 $u\notin A_\lambda$, 从而 $\mu_{A_\lambda}=0$, 故

$$\bigvee_{\lambda>\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}(\lambda\wedge\mu_{A_\lambda}(u))=\bigvee_{\lambda>\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}(\lambda\wedge 0)=0.$$

因而 $\bigvee\limits_{\lambda\in[0,1]}(\lambda\wedge\mu_{A_\lambda}(u))=\bigvee\limits_{\lambda\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}(\lambda\wedge\mu_{A_\lambda}(u))=\bigvee\limits_{\lambda\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}(\lambda\wedge 1)=\bigvee\limits_{\lambda\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)}\lambda=\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$.

定理证毕.

截集概念及分解定理是联系普通子集与模糊子集的桥梁.

定义 1.2.12 若 $\underset{\sim}{A}$ 为论域 U 上的模糊集, 称 A_1 为 $\underset{\sim}{A}$ 的核, 称

$$\operatorname{supp}\underset{\sim}{A}=\{u\mid\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)>0\}$$

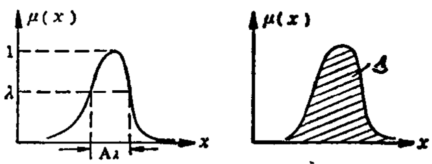
为 $\underset{\sim}{A}$ 的支集, 称 $A_1-\operatorname{supp}\underset{\sim}{A}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的边界.

核 A_1 是完全从属于 $\underset{\sim}{A}$ 的元素的集合, 若它不空, 称 $\underset{\sim}{A}$ 为正规模糊集, 否则称为非正规模糊集.

随着阈值 λ 从 1 下降趋于 0(不到达 0), A_λ 从 $\underset{\sim}{A}$ 的核扩张为 $\underset{\sim}{A}$ 的支集. 因此, 普通子集族

$$\{A_\lambda\mid 0<\lambda\leqslant 1\}$$

象征着一个具有游移、弹性边界的集合, 一个可变的、运动的集合.



a　　b

图 1.2.2

如果把 $\underset{\sim}{A}$ 看成是连续曲线下的区域, 分解定理的几何意义就较明显, 如图 1.2.2(a) 中 $\lambda\cdot A_\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$ 矩形区域迭加之和等于图(b)中阴影部分区域.

三、模糊集合运算的基本性质

象普通集一样, 模糊集满足自反律、反对称律、传递律、幂等律、交换律、结合律、吸收律、分配律、复归律、对偶律. 一般来说, 相补律 $\underset{\sim}{A}\cup\overline{\underset{\sim}{A}}=\Omega$ 和 $\underset{\sim}{A}\cap\overline{\underset{\sim}{A}}=\Phi$ 不成立.

如假定 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0.2$ 和 $\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x)=0.8$, 则

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\overline{\underset{\sim}{A}}}(x)=0.8\neq 1,\qquad \mu_{\underset{\sim}{A}\cap\overline{\underset{\sim}{A}}}(x)=0.2\neq 0.$$

现在我们来证明模糊集满足对偶律, 即

(1) $\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}=\overline{\underset{\sim}{A}}\cap\overline{\underset{\sim}{B}}$,

(2) $\overline{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}=\overline{\underset{\sim}{A}}\cup\overline{\underset{\sim}{B}}$.

(1) 的证明如下:

$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}}(x)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)=1-\max[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)],$$

$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}\cap\overline{\underset{\sim}{B}}}(x)=\min[\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}}(x),\ \mu_{\overline{\underset{\sim}{B}}}(x)]=\min[(1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)),\ (1-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x))].$$

设 $\mu_{\underset{\sim}{A}}\geqslant\mu_{\underset{\sim}{B}}$, 则

$$1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant 1-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x),$$

$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}}(x)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}\cap\overline{\underset{\sim}{B}}}(x).$$

设 $\mu_{\underset{\sim}{A}}<\mu_{\underset{\sim}{B}}$, 则

$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}}(x)=1-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}\cap\overline{\underset{\sim}{B}}}(x).$$

所以

$$\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}}(x)=\mu_{\overline{\underset{\sim}{A}}\cap\overline{\underset{\sim}{B}}}(x),$$

即 $$\overline{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}=\overline{\underset{\sim}{A}}\cap\overline{\underset{\sim}{B}}.$$
用同样方法可以证明(2)和分配律.

定义 1.2.13 $\underset{\sim}{A}$ 为论域 U 上的模糊集, $U\in R$, R 为实数域. 如果对任意实数 $x<y<z$, 都有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(y)\geqslant\min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(z)),\tag{1.2.5}$$

则称 $\underset{\sim}{A}$ 为**凸模糊集**, 如图 1.2.3 所示.

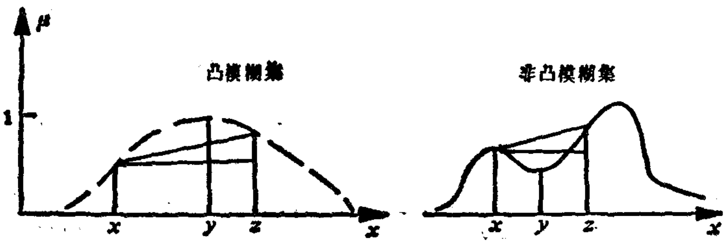


图 1.2.3

定理 1.2.2 凸模糊集的截集必是区间; 截集均为区间的模糊集必为凸模糊集. 此处我们把实轴也看成区域.

证明: 设 $\underset{\sim}{A}$ 为凸模糊集, 任给 $\lambda\in[0,1]$, 若 x 与 z(不妨假定 $x<z$) $\in A_\lambda$, 亦即

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geqslant\lambda,\quad \mu_{\underset{\sim}{A}}(z)\geqslant\lambda,$$

则对任意 $y\in[x,z]$, 由(1.2.5)式知, 应有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(y)\geqslant\min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(z))\geqslant\lambda,$$

从而 $y\in A_\lambda$. 这说明, 若两点在 A_λ 中, 则以这两点为端点的整个区间亦在 A_λ 中. 因此, A_λ 只能是一个区间.

反之, 设 $\underset{\sim}{A}$ 为 U 上的模糊集, 它的任意截集 A_λ 都是区间. 任给 $x<y<z$. 取

$$\lambda=\min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(z)),$$

则有 $x\in A_\lambda$, $z\in A_\lambda$. 因 A_λ 是区间, 故 $y\in A_\lambda$, 亦即

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(y)\geqslant\lambda=\min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(z)).$$

(1.2.5)式成立, $\underset{\sim}{A}$ 是凸模糊集. 证毕.

截集均为区间可以作为凸模糊集的等价定义.

定理 1.2.3 若 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 是凸模糊集, 则 $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$ 的截集均为区间 此时, 由定理 1.2.2 很容易证明 $\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$ 也是凸模糊集.

凸模糊集的概念可以扩张到 n 维欧氏空间, 即以 R^n 为论域. 这只需要将(1.2.5)式改为: 对任意 $x, y\in R^n$ 及任意 $\lambda\in[0,1]$, 有

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{A}}(y)),$$

式中 x, y 为 n 维向量, $\lambda x+(1-\lambda)y$ 为向量运算.

定义 1.2.14 具有连续隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{I}}(x)$ 的凸模糊集 $\underset{\sim}{I}$ 叫做一个**模糊数**.

四、模糊集合的代数运算

定义 1.2.15 我们称 $\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}$ 为模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的代数积, $\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}$ 的从属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}}$ 为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}}=\mu_{\underset{\sim}{A}}\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}.$$