高等学校计算机系列丛书

概率论与数理统计

刘庆珍　罗学霞　钱晓凡　编

重庆大学出版社

概率论与数理统计

刘庆珍　罗学霞　钱晓凡　编

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书研究随机现象规律性，其严格的理论建立在抽象的测度和积分之上。全书共六章，介绍了事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计基本概念、参数估计、假设检验与回归分析等内容，每章后均有同步练习。

本书适合高等院校非数学类各专业专科学生使用。也可供本科生及工程技术人员参考。

概率论与数理统计

刘庆珍　罗学霞　钱晓凡　编

责任编辑　韩洁

*

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆电力印刷厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:5.875　字数:156 千

1997 年 6 月第 1 版　　2000 年 1 月第 2 次印刷

印数:6001—10000

ISBN　7-5624-1353-3/O·146　定价:8.00 元

序

面对知识爆炸，社会学家们几乎都开出了一个相同的药方：计算机。计算机也深孚众望，以其强大的功能，对人类作出了巨大的贡献，取得了叹观止矣的成就。自它 1946 年 2 月 14 日在美国费城诞生以来，至今已过“知天命”的年龄了。现在，计算机已是一个庞大的家族。如果说，它的成员占据了世界的每一个角落和每一个部门也并不过分，甚至找不到这样一个文明人，他的生活不直接或间接与计算机有关。目前，全世界计算机的总量已达数亿台，而且，现在正以每年几千万台的速度增长。

作为计算机在信息传递方面的应用，计算机加上网络，被认为是和能源、交通同等重要的基础设施。这种设施对信息的传递起着异常重要的作用。西方发达国家和我们国家对此都非常重视。例如，美国的信息高速公路计划，全球通讯的“铱”计划，我国也开始实行一系列“金”字头的国民经济管理信息化计划。这些计划中唱主角的设备便是

计算机。计算机在各个方面的应用不胜枚举，我们每个人都自觉不自觉地处于计算机包围中。

计算机对社会生产来说是一个产业大户，对每个现代人来说是一种工具，对学生们来说，它是一个庞大的知识系统。面对计算机知识的膨胀，面对计算机及其应用产业的膨胀，计算机各个层次的从业人员的需要也在不断膨胀，计算机知识的教育也遍及从小学生到研究生的各个层次。

为了适应计算机教学的需要，重庆大学出版社近几年出版了大量的计算机教学用书，这一套教材就是一套适应专科层次的系列教材。我们将会看到，这一套教材以系列、配套、适用对路，便于教师和学生选用。如果再仔细研究一下，将会发现它的一系列编写特色：

1. 这些书的作者们是一些长期从事计算机教学和科研的教师，不少作者在以前都有大量计算机方面的著作出版。例如本系列书中的《Visual Fox Pro 中文版教程》的作者，十年前回国后最早将狐狸软件介绍到祖国大陆，这一本书已是他的第八本著作了。坚实的作者基础，是这套书成功的最根本的保证。

2. 计算机科学是发展速度惊人的科学，内容的先进性、新颖性、科学性是衡量计算机图书质量的重要标准，这一套书的作者们在这方面花了极大的功夫，力求让读者既掌握计算机的基础知识，又让读者了解最新的计算机信息。

3. 在内容的深度和知识结构上，从专科学生的培养目标出发，在理论上，从实际出发，满足本课程及后续课程的需要，而不刻意追求理论的深度。在知识结构上，考虑到全书结构的整体优化，而不过分强调单本书的系统性。这样，在学过这一套系列教材后，学生们就可在浩瀚的计算机知识中，建立起清晰的轮廓，就会知道这些知识的前因后果，就会了解这些知识的前接后续。使学生们能在今后的工作实践中得心应手。

4. 计算机是实践性很强的课程，仅靠坐而论道是学习不了这些知识的。所以从课程整体设置来讲，包括有最基本的操作技能的教材。对单本书来说，在技术基础课和专业课中，都安排有一定的上机实习或实验，这样可使学生既具备一定的理论知识以利今后发展和深造，又掌握实际的工作技能胜任今后的实际工作。

编写一套系列教材，这是一个巨大的工程。这一套书的作者们，重庆大学出版社的领导和编辑们，都为此付出了辛勤的劳动。作为计算机工作者，以此序赞赏他们的耕耘，弘扬他们的成绩。

周明德

1997年6月15日

前 言

本教材编写的指导思想是，切合大学专科《概率论与数理统计》课程的教学基本要求，便于教学安排和自学。教材着重基本概念和基本方法的介绍，对数学理论不作过多的要求。

本教材在概率论部分介绍了随机事件及其概率、随机变量及其分布以及随机变量的数字特征等方面的最基础的知识，在数理统计部分则对已取得数据如何进行统计推断，介绍了常用的统计推断原理和方法。

本教材的编写分工如下：钱晓凡编写第一章，刘庆珍编写第二、三章，罗学霞编写第四、五、六章。刘庆珍任主编，主持了本书的编写。

云南大学张昇教授仔细地审阅了全部书稿，提出了许多宝贵意见，对此，我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，错误和缺点在所难免，恳请专家和读者批评指正。

编者

1997.3

目　录

第一章 事件与概率

第一节 概率论与数理统计的研究对象

人们在科学实验、生产活动乃至日常生活中，常常会遇到各种现象，就现象结果的确定性而言，可分为两类。一类现象，只要条件相同或大致相同，其结果是唯一确定的，称这类现象为确定性现象或必然现象。例如，在一个大气压下，水加热到100℃必然沸腾；电流i在阻值为R的元件上消耗的电功率为i^2R；高空中的物体必定下落等等。与确定性现象不同的另一类现象，在重复相同的条件时，各次的结果不尽相同，事前不能确定事后的结果，称这类不确定现象为偶然现象或随机现象。向上抛掷一枚硬币，落地后其向上的一面可能是正面也可能是反面（简称为出现正面或出现反面），在这枚硬币落定之前是不能确定的；指定时刻某售票窗口前排队购票的旅客人数，在这一时刻到来之前也是不能确定的；某地区十月份的平均气温，在十月份未结束前也是不能确定的。这些现象的共同特点是：在相同条件下，各次观察的结果是不确定的，即观察结果具有随机性，所以它们都是随机现象。

随机现象一次观察结果的随机性或无规律性，是否说明随机现象无规律可寻呢？事实并非如此。人们通过长期对随机现象的观察和实践，发现在相同条件下对随机现象进行大量的观察时，随机现象呈现出某种规律性。以抛掷硬币为例，抛掷一次硬币出现正面或反面是无规律可寻的，完全是偶然的。然而，历史上曾有数人，大量重复抛掷一枚硬币，观察都发现出现正面与出现反面的次数几乎各占抛掷次数的一半。又如在分子物理中，气体由众多的分子

组成，它们都各自进行着杂乱无章的运动，在运动过程中相互碰撞而改变其动量和方向，因此每个分子的运动是随机的，然而，作为大量分子运动的气体的温度和压强却满足波义耳定律。这种建立在大量数观察基础上的规律性，称为统计规律性。正如恩格斯在《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学的终结》一书中指出："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。"

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。它揭示了偶然性与必然性间的联系，指明偶然性向必然性转化的条件。

概率论的发展可以追溯到 17 世纪中叶，甚至更早的赌博问题的研究。虽然概率论历史悠久，但它严格的数学基础的建立，以及其理论的研究和实际应用的极大发展却主要是本世纪的事情。随着科学和社会经济的发展，概率论与数理统计的思想和方法已渗入到各个学科，成了近代科学发展的明显特征之一。概率论与数理统计的思想和方法在自然科学和社会科学及国民经济中的应用已日益扩大。目前，它们在近代物理、现代生物、工程技术、质量控制、农业试验、公共事业等诸多方面都得到了重要的应用。今天，概率统计已成为高等学校理、工、医、农等许多专业的基础理论课程。通过这门课的学习，将使学生初步掌握处理随机现象的基本理论和方法，培养他们解决某些有关实际问题的能力。

第二节 随机事件及其运算

一、随机试验及其样本空间

每门学科都有其一定的术语和概念。随机试验就是概率论的一个基本概念。人们在对一类现象进行研究时，常常要对其进行观察、测量、记录或实验，统称完成这些工作为试验。如果试验满足下

列条件：

(1)试验可以在相同条件下重复进行；

(2)每次试验的可能结果不只一个，但所有可能结果在试验之前已经知道；

(3)每次试验出现哪个可能结果，在试验之前是不能确定的；则称为**随机试验**。简称试验。

记录单位时间内某电话交换台接到的呼叫次数；测定某钢铁厂生产的铁中含硫量；检查自动机床生产的产品质量指标等等都是随机试验。

定义 1-1 随机试验的所有可能结果的集合称为试验的**样本空间**，记为 U。样本空间的的元素称为**样本点**。

一个样本点就是试验的一个可能结果。

【例 1】 写出下列试验的样本空间：

(1)从甲、乙、丙、丁 4 人中任意选举两人作代表，记录选举结果。

(2)同时抛掷红色与白色的骰子各一粒，记录其向上一面(简称出现)的点数。

(3)同时抛掷两粒骰子，记录出现的点数之和。

解 (1)4 人中任何两人都有可能被推选为代表，若用(甲乙)表示甲、乙两人为代表，用类似的符号，可将样本空间表示为

$U=\{$(甲乙),(甲丙),(甲丁),(乙丙),(乙丁),(丙丁)$\}$

(2)用有序数组(i,j)表示红色骰子出现 i 点，白色骰子出现 j 点，则样本空间可表为

$$U=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

(3)试验和(2)类似，但观察的内容不相同，其样本点也不相同，不难看出(3)的样本空间可以表为

$U=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$。

【例 2】 写出下列试验的样本空间：

(1)记录日通过某个指定的交通道口的机动车辆数。

(2)向半径为 1m 的圆形靶面进行射击，观察弹着点的位置。假定射击总能击中靶面。

解 (1)从理论上看，通过道口的机动车可以是任何非负整数辆，因此样本空间可以写为

$$U=\{0,1,2,\cdots\cdots\}$$

其中的每个非负整数代表一个样本点，表示通过道口的机动车辆数。

(2)为讨论方便，以靶心为原点，在靶面上建立平面直角坐标系，则弹着点的位置可用平面点的直角坐标(x,y)表示。因此，这个试验的样本空间可表为

$$U=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}。$$

由上述各例可见，样本空间由试验完全地确定。样本空间作为一个集合，可以是有限集、可数无限集或不可数无限集。

二、随机事件

随机试验总有一定的观察目的，除了考察其所有可能结果组成的样本空间外，还需观察其他的各种各样的结果。例如，作抛掷一粒骰子的试验，还可以考察“掷出 4 点”、“掷出奇数点”，“掷出大于 2 的点”，“掷出小于 5 的点”等等结果，这些结果在一次试验中既可能出现(或发生)，也可能不出现(或不发生)。这样的结果称为**随机事件**。然而有些结果，如“掷出的点数不小于 1”，“掷出点数是自然数”等，它们在每次试验中必定出现，这样的结果称为**必然事件**。相反还有一类结果，如“掷出超过 6 的点”，“掷出点数不是整数”等，它们在每次试验中都不会出现，这样的结果称为**不可能事件**。

从集合的角度看，如果把样本空间作为全集，上面的各随机事件、必然事件和不可能事件都归结为全集的某种子集，而且将各种

事件的出现与否由试验的结果(样本点)是否是事件集的元素来确定,则上述各种事件可以用集合表为

$U=\{1,2,3,4,5,6\}$

“掷出 4 点”$=\{4\}$

“掷出奇数点”$=\{1,3,5\}$

“掷出大于 2 的点”$=\{3,4,5,6\}$

“掷出小于 5 的点”$=\{1,2,3,4\}$

必然事件仍用样本空间的集合符号 U 来表示,不可能事件都可用空集 V 表示。

定义 1-2 随机试验的样本空间的某些子集对应的结果,称为该试验下的**随机事件**,常用 A、B、C 等大写拉丁字母表示。特别,用 U 记必然事件,用 V 记不可能事件。

例如 $A_1=\{4\}$,$A_2=\{1,3,5\}$,$A_3=\{3,4,5,6\}$,$A_4=\{1,2,3,4\}$。

$U=$“掷出的点数不小于 1”$=$“掷出点数是自然数”,$V=$“掷出超过 6 的点”$=$“掷出点数不是整数”。

易于理解,必然事件和不可能事件是非随机事件,为讨论问题的方便,仍将必然事件和不可能事件作为随机事件的两个极端情形来统一处理。以下将随机事件都简称为事件。

一个事件的出现或发生,意味着试验的结果为该事件所包含的某个样本点。例如,在抛掷一粒骰子的试验中,如果出现 2 点,则事件 A_4 发生,而 A_1,A_2 和 A_3 则不发生。如果出现 4 点,则 A_1、A_3 和 A_4 均发生,而 A_2 不发生。由一个样本点组成的事件(单点集),如 A_1,称为**基本事件**。因此,一个基本事件的出现等价于试验的相应的样本点出现。

三、事件关系及运算

在一个随机试验中,有各种事件,它们间往往存在一定的联系,其联系之一是下面讨论的事件间的关系和运算。设 A、B、C 或 A_1、A_2,……,A_n,……都表示试验中的各种事件,U 与 V 分别为必

然事件和不可能事件，定义事件间的关系和运算如下。

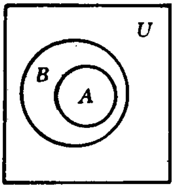

图 1-1

1. 包含关系

如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，或称事件 A 是事件 B 的**子事件**。记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。如图 1-1 所示。

如图 1-2 所示的电路，用 A_i 表示第 i 号开关 K_i 断开，$i=1,2$。B 表示电路不通。则

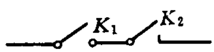

图 1-2

$$A_1\subset B \quad A_2\subset B$$

2. 相等关系

如果事件 A 和事件 B 满足 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 和事件 B **相等**。记为 $A=B$。两个相等事件所包含的样本点相同。

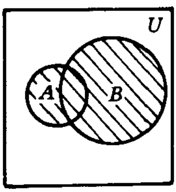

图 1-3

3. 事件并(和)

事件 A 和事件 B 的**并**是一个事件，记为 $A\cup B$，它表示“事件 A 和事件 B 至少有一个发生”。因此，$A\cup B$ 是由属于 A 和属于 B 的所有样本点组成的事件。如图 1-3 所示。

如图 1-4 所示的电路。用 A_i 表示开关 K_i 接通，$i=1,2$；用 B 表示电路通，则 $B=A_1\cup A_2$。

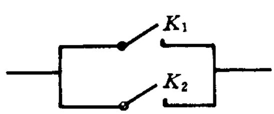

图 1-4

类似地，事件“事件 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$ 至少发生其一”称为事件 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$ 的并。记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。事件“事件列 $A_1,A_2,\cdots\cdots$ 至少发生其一”称为事件 $A_1,A_2,\cdots\cdots$ 的并。记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

4. 事件交(积)

事件 A 和事件 B 的**交**是一个事件，记为 AB 或 $A\cap B$。它表示

“事件 A 和事件 B 同时发生”。因此，事件 $A\cap B$ 是由既属于 A 又属于 B 的样本点组成的事件。如图 1-5 所示。

设一机床加工的轴有两个质量指标：长度和直径。设事件 A 表示“长度合格”，事件 B 表示“直径合格”，事件 C 表示“轴合格”，则 $C=A\cap B$。

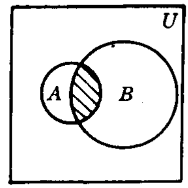

图 1-5

类似有 n 个事件的交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$ 同时发生”。事件列 $A_1,A_2,\cdots\cdots$ 的交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cdots$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示“事件列 $A_1,A_2,\cdots\cdots$ 同时发生”。

5. 互斥(互不相容)事件

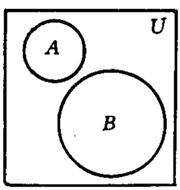

图 1-6

如果事件 A 和事件 B 不可能同时发生，即 $A\cap B=V$，则称事件 A 与事件 B **互斥**，或称事件 A 与事件 B **互不相容**。如图1-6所示。

如果事件组 $A_1,A_2,\cdots\cdots,A_n$(或事件列 $A_1,A_2,\cdots\cdots$)中任何两个事件互斥，即当 $i\neq j$ 时都有 $A_i\cap A_j=V,i,j=1,2,\cdots\cdots,n(\cdots\cdots)$，则称这个事件组(或事件列)为两两互斥的或两两互不相容的。

显然，基本事件是两两互斥的。

6. 互逆事件

如果事件 A 与事件 B 满足条件：

$$A\cup B=U\quad A\cap B=V$$

则称事件 A 与 B **互逆**。并将事件 A(或 B)称为事件 B(或 A)的**逆事件**。这时常将事件 A(或 B)的逆事件 B(或 A)记为 $\overline{A}$(或 $\overline{B}$)。$\overline{A}$ 是由不属于 A 的样本点组成的事件。如图 1-7 所示。

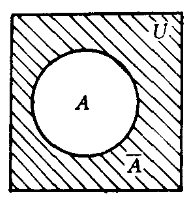

图 1-7

例如，在投掷一粒骰子的试验中，若 A 表示事件“掷出奇数点”，则其逆事件 $\overline{A}$ 表示“掷出偶数点”这一事件。

7. 事件差