

MPA联考

高分突破

数学分册

胡显佑 褚永增 编著



中国人民大学出版社

MPA 联考高分突破

数学分册

胡显佑 褚永增 编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

MPA 联考高分突破. 数学分册/胡显佑, 褚永增编著
北京: 中国人民大学出版社, 2000

ISBN 7-300 03666-X/G · 757

I. M...

II. ①胡...②褚...

III. 数学-研究生-入学考试-自学参考资料

IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 59514 号

MPA 联考高分突破

数学分册

胡显佑 褚永增 编著

出版发行: 中国人民大学出版社

(北京海淀路 157 号 邮编 100080)

邮购部: 62515351 门市部: 62514148

总编室: 62511242 出版部: 62511239

E-mail: rendafx@public3.bta.net.cn

经 销: 新华书店

印 刷: 三河市新世纪印刷厂

开本: 890×1240 毫米 1/32 印张·8 375

2000 年 12 月第 1 版 2000 年 12 月第 1 次印刷

字数: 236 000

定价: 15.00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

前 言

公共管理硕士(MPA)将在 2001 年实行全国统一联考. 数学作为联考的必考科目之一, 将要求考生系统地掌握初等数学、微积分和概率统计的基础知识, 要求考生具有一定的抽象概括能力、逻辑推理能力、空间想像能力、基本运算能力和综合运用能力. 这对于工作多年、尤其是工作中不系统运用数学的考生来说确实是一个相当高的要求.

为了帮助有志攻读 MPA 的考生顺利通过数学联考, 我们建议, 考生在复习数学时应有计划地分为三个阶段: 在第一阶段, 应根据联考数学考试大纲和考试指南, 系统地复习有关概念、定理和公式. 每复习一单元的内容, 必须完成必要的基本练习, 达到基本掌握考试内容的目的. 在第二阶段, 则应在第一阶段的基础上, 总结问题, 将考试重点和题型进行归纳, 通过适量的综合练习达到融会贯通的目的. 在第三阶段, 则进行适量的考前模拟测验, 检查自己复习的效果, 补救复习中的漏洞.

本书是为第二阶段的复习编写的. 根据考试大纲的要求, 将各章节的重点题型加以归纳总结. 各类题型均有适量的典型例题, 并做了详细解答. 对各类解题方法做了小结, 并在各章都附有自测练习. 例题和自测练习既注重循序渐进, 更强调数学概念、定理和方法的综合运用. 这将使考生的应试能力有较大的提高.

本书在编写过程中, 得到了中国人民大学出版社马胜利同志和相关部门的大力支持, 在此我们表示衷心的感谢. 欢迎读者对本书的疏漏之处提出建议和批评.

编者

2000 年 10 月

目 录

第一章 初等数学	(1)
第一节 绝对值与不等式	(1)
第二节 方程与方程组	(11)
第三节 指数与对数	(21)
第四节 排列与组合	(30)
第五节 数列	(41)
第六节 直线与圆锥曲线	(54)
第七节 三角	(68)
第二章 函数、极限与函数的连续性	(81)
第一节 函数	(81)
第二节 极限	(91)
第三节 函数的连续性	(110)
第三章 导数与微分	(117)
第一节 导数与微分的概念	(117)
第二节 导数与微分的计算	(124)
第三节 导数的应用	(132)
第四章 不定积分与定积分	(151)
第一节 不定积分	(151)
第二节 定积分	(168)
第五章 多元函数微分学	(190)
第一节 偏导数与全微分	(190)
第二节 多元函数的极值与条件极值	(206)
第六章 概率统计初步	(214)
第一节 随机事件及其概率	(214)
第二节 概率的加法公式和乘法公式	(224)
第三节 随机变量及其数字特征	(240)
模拟练习	(257)

第一章 初等数学

第一节 绝对值与不等式

[考点归纳]

1. 绝对值的定义和几何意义.
2. 绝对值的运算法则.
3. 不等式的定义和性质.
4. 解一元一次、一元二次和含有绝对值的不等式.

[考点突破]

命题趋势

不等式的应用极其广泛.像研究函数的性质、方程组的讨论、直线与曲线位置关系的讨论等经常用到不等式,也正是由于其特殊的地位,不等式一直是重点考查内容.经常有综合性强、难度较大的考题出现,主要考查综合运用知识、分析问题和解决问题的能力.本节考查的主要题型有:比较数式的大小;求解一元一次不等式(组);求解含有绝对值的不等式;求解一元二次不等式;不等式的证明和其他类型的题目.

难点剖析

1. 解不等式和证明不等式都是在不断变形中完成的,而不等式的四个性质、三个推论是不等式变形的重要理论依据.实践表明,解答不等式题目中的大量错误不是计算错误,而是由于错用不等式的性质造成的,所以要搞清每一性质的条件和结论,注意条件的放宽和加强,条件与结论之间的相互联系.

2. 重要不等式的功能在于“和积互化”,在解题中,创造应用重要不等式的环境,正确运用重要不等式往往可以使问题大大简化.尤其应掌握:

$$a^2+b^2 \geq 2ab \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a, b \in \mathbb{R}^+, \text{其中等号成立的充要条件是}$$

$a=b$; $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$ 分别表示实数集合和非负实数的集合).

3. 求解含有绝对值的不等式, 实际上是先转化为不含绝对值符号的不等式后再求解. 在去掉绝对值符号的过程中一定要依据绝对值的定义、性质和运算法则进行同解变形. 在解题中有时利用绝对值的几何意义可以使问题更为直观.

[典型例题]

题型 1: 比较数式的大小

例 1 已知 a, b 为非零实数, 且 $a > b$, 试比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.

解
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

由题设 $a > b$, 有 $b-a < 0$

若 a, b 同号, 则 $ab > 0$, $\frac{b-a}{ab} < 0$, 故 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$,

若 a, b 异号, 则 $a > 0 > b$, 则 $ab < 0$, $\frac{b-a}{ab} > 0$, 故 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

小结 本题结论可概括为: 当 a, b 同号时, $a > b$ 与 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 互为充要条件.

例 2(选择题) 设 a, b 是满足 $ab < 0$ 的实数, 那么下列命题中正确的是:

(A) $|a+b| > |a-b|$ (B) $|a+b| < |a-b|$

(C) $|a-b| < ||a| - |b||$ (D) $|a-b| < |a| + |b|$

解 由题设 a, b 满足 $ab < 0$, 那么令 $a = -1, b = 2$, 有

(1) $|a+b| = 1, |a-b| = 3$, 则 $|a+b| < |a-b|$, 从而否定了(A);

(2) $||a| - |b|| = 1$, 则 $|a-b| > ||a| - |b||$, 从而否定了(C);

(3) $|a| + |b| = 3$, 则 $|a-b| = |a| + |b|$, 从而否定了(D);

综上所述, 只有命题(B)是正确的.

故本题应选(B).

小结 因为否定一个命题只要有一个反例即可,所以在解答某些选择题时,用选择符合题目条件的特殊值代入,采用排他法解题比证明命题正确有时要容易的多.

题型 2: 求解一元一次不等式(组)

例 3 解关于 x 的不等式 $a(x-a) < b(x-b)$.

解 原不等式可化成 $(a-b)x < a^2 - b^2$, 那么若 $a-b > 0$, 即 $a > b$ 时, 原不等式的解集为

$$\{x | x < a+b\}$$

若 $a-b=0$, 即 $a=b$ 时, 原不等式解集为空集 $\emptyset$;

若 $a-b < 0$, 即 $a < b$ 时, 原不等式的解集为

$$\{x | x > a+b\}$$

小结 求解含字母参数的不等式, 如果在参数的取值范围内, 不等式的转化结果或解集的表达形式不同, 则必须分别讨论求解.

例 4 解不等式组.

$$\begin{cases} x-2 > 1 & \text{①} \\ 2x > 1 & \text{②} \end{cases}$$

解 先请考虑下列解法是否正确:

由①+②得 $3x-2 > 2$

则 $x > \frac{4}{3}$

注意 这种解法是错误的, 因为原不等式组与 $3x-2 > 2$ 不等价. 正确解法是:

由①得 $x > 3$

由②得 $x > \frac{1}{2}$

所以不等式的解集是 $\{x | x > 3\}$.

题型 3: 求解含有绝对值的不等式

例 5 解关于 x 的不等式 $|x+1| < |2x-3|$.

解 原不等式可变形为

$$-|2x-3| < x+1 < |2x-3|$$

$$\begin{cases} x+1 > -|2x-3| & \text{①} \\ x+1 < |2x-3| & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{由①得 } \begin{cases} 2x-3 > -x-1, \\ 2x-3 < x+1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x > \frac{2}{3} \quad \text{③} \\ x < 4 \quad \text{④} \end{cases}$$

$$\text{由②得 } \begin{cases} 2x-3 > x+1, \\ 2x-3 < -x-1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x > 4 \quad \text{⑤} \\ x < \frac{2}{3} \quad \text{⑥} \end{cases}$$

解得 $x > 4$ 或 $x < \frac{2}{3}$ 为原不等式的解集.

例 6(选择题) 不等式 $\frac{|x-1|-1}{|x-3|} > 0$ 的解集为

(A) $x < 0$

(B) $x < 0$ 或 $x > 2$

(C) $-3 < x < 0$ 或 $x > 2$

(D) $x < 0$ 或 $x > 2$ 且 $x \neq 3$

解 原不等式可以化为

$$\begin{cases} |x-1|-1 > 0 \\ |x-3| \neq 0 \end{cases} \quad \text{①}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x-1 < -1 \text{ 或 } x-1 > 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \quad \text{②}$$

由②得 $x < 0$ 或 $x > 2$ 且 $x \neq 3$

故本题应选(D).

题型 4: 求解一元二次不等式

例 7 解不等式 $|x^2-3x-8| < 10$.

解 $|x^2-3x-8| < 10$

即 $-10 < x^2-3x-8 < 10$

$$\begin{cases} x^2-3x+2 > 0 \\ x^2-3x-18 < 0 \end{cases}$$

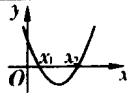
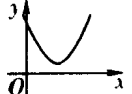
$$\text{可化为 } \begin{cases} (x-1)(x-2) > 0 \\ (x+3)(x-6) < 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x < 1 \text{ 或 } x > 2 \\ -3 < x < 6 \end{cases}$$

故原不等式的解集为 $\{x | (-3, 1) \cup (2, 6)\}$.

小结 一元二次不等式可以利用二次函数的图像求解, 使问题变得直观、简化, 如表 1-1 所示.

表 1-1

$\Delta = b^2 - 4ac$ ($a > 0$)	方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根	$ax^2 + bx + c > 0$ 的解	$ax^2 + bx + c < 0$ 的解	二次函数 $y = ax^2 + bx + c$
$\Delta > 0$	相异实根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x > x_2$ 或 $x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	
$\Delta = 0$	相等实根 $x = -\frac{b}{2a}$	$x \neq -\frac{b}{2a}$	$\emptyset$	
$\Delta < 0$	无	k 任意实数	$\emptyset$	

例 8 解不等式 $x^2 - (a + a^2)x + a^3 > 0$.

解 将原不等式化为

$$(x - a)(x - a^2) > 0 \quad \text{那么}$$

若 $a < 0$, 或 $a > 1$, 有 $a < a^2$, 则解集为 $\{x | x < a \text{ 或 } x > a^2\}$;

若 $0 < a < 1$, 有 $a > a^2$, 则解集为 $\{x | x < a^2 \text{ 或 } x > a\}$;

若 $a = 0$, 则解集为 $\{x | x \in R \text{ 且 } x \neq 0\}$;

若 $a = 1$, 则解集为 $\{x | x \in R \text{ 且 } x \neq 1\}$.

题型 5: 不等式的证明

例 9 求证 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

证 由于 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 同理 $b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ca$

三式不等号两边分边相加, 即得

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

小结 这是一个常用的不等式, 很多证明题源于此题, 如

$$(1) \text{ 求证 } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$$

$$\left(\text{设 } \frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b, \frac{1}{z} = c \right)$$

$$(2) \text{ 求证 } x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 \geq xyz(x + y + z)$$

$$(\text{设 } x^2 = a, y^2 = b, z^2 = c \text{ 或 } xy = a, yz = b, zx = c)$$

例 10 已知 $a, b \in R^+$, 求证 $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

证 本题有多种证法:

(1) 差值比较法.

由题设 $a, b \in R^+$

$$\begin{aligned} \text{那么} \quad & \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \\ &= \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b} - a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{(a-b)(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{故} \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{得证.}$$

(2) 商值比较法.

由题设 $a, b \in R$, 有 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

$$\begin{aligned} \text{那么} \quad & \frac{\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - \sqrt{ab})}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\ &= \frac{a + b - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2\sqrt{ab} - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = 1 \end{aligned}$$

故原式得证.

题型 6: 其他

该题型中包括三角不等式、对数不等式、指数不等式及解决有关函数性质等涉及不等式关系的应用问题.

例 11 解不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-3} < 3^{x^2-2x-3}$.

解 原式可化为 $3^{3-3x} < 3^{x^2-2x-3}$.

两边取对数可得到 $3-3x < x^2-2x-3$

从而解得 $x < -3$ 或 $x > 2$

故不等式的解集为 $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$.

例 12 解不等式 $x^{\log \frac{1}{2} x} < \frac{1}{x}$.

解 两边取以 $\frac{1}{2}$ 为底的对数得

$$(\log \frac{1}{2} x)^2 > \log \frac{1}{2} \frac{1}{x}$$

即 $\left(\log \frac{1}{2} x\right)^2 + \log \frac{1}{2} x > 0$

$$\log \frac{1}{2} x \left(\log \frac{1}{2} x + 1\right) > 0$$

$$\log \frac{1}{2} x < -1 \text{ 或 } \log \frac{1}{2} x > 0$$

$$x > 2 \text{ 或 } 0 < x < 1$$

故不等式的解集为 $\{x | x > 2 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$.

例 13(选择题) 已知 $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ 且 $c = |a+b| + |b+1| + |a-2b+4|$, c 的最大值为 M , 最小值为 m , 则

(A) $M=6, m=3$

(B) $M=7, m=3$

(C) $M=7, m=2$

(D) $M=6, m=2$

解 由题设 $|b| \leq 1$ 有 $-1 \leq b \leq 1$

那么 $0 \leq b+1$, 可推得 $|b+1| = b+1$

由题设有 $-1 \leq a \leq 1, -2 \leq 2b \leq 2$

那么 $-3 \leq a-2b \leq 3$ 有 $a-2b+4 > 0$ 可推得

$$|a-2b+4| = a-2b+4$$

那么 $c = |a+b| + b+1 + a-2b+4 = |a+b| + a-b+5$

若 $a+b \geq 0$ 则 $c = a+b+a-b+5 = 2a+5$,

由题设 $-1 \leq a \leq 1$ 有 $3 \leq 2a+5 \leq 7$

若 $a+b < 0$ 则 $c = -a-b+a-b+5 = 5-2b$,

由题设 $-1 \leq b \leq 1$ 有 $3 \leq 5-2b \leq 7$

综上所述 $M=7, m=3$,

本题应选(B).

[自测练习]

(一)选择题

1. 已知 $a < b < 0$, 那么下列不等式中错误的是[].

(A) $-a > b$

(B) $\frac{a}{b} > 0$

(C) $-b > a$

(D) $a + b > 0$

2. 下列命题中, 正确命题的个数为[].

(1) 如果 $ab > 0$, 则 $a > 0, b > 0$.

(2) 如果 $a > b, c \neq 0$, 则 $ac > bc$.

(3) 如果 $-a > b$, 则 $a + b < 0$.

(4) 如果 $a < -b$, 则 $a > b$.

(A) 1 个

(B) 2 个

(C) 3 个

(D) 4 个

3. 如果 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边, 则下列不等式中正确的是[].

(A) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc > 0$

(B) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc < 0$

(C) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc = 0$

(D) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc \geq 0$

4. 已知 $\triangle ABC$ 中, 各边长均为正整数, 且 $AB = 5$ 厘米, $AB \geq BC \geq CA$, 则满足上述条件的不同三角形共有[].

(A) 1 个

(B) 6 个

(C) 8 个

(D) 9 个

5. 不等式组 $\begin{cases} 2(x-1) \geq 3x+2 \\ x + \frac{3}{2} > \frac{3x-1}{2} \end{cases}$ 的解集是[].

(A) $x \leq -4$

(B) $x < -4$

(C) $x \leq 4$

(D) $x < 4$

6. 下列结论中, 错误的是[].

(A) 已知不等式组 $\begin{cases} 2x-2 > x-1 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ 则 $x > 1$ 是它的解集

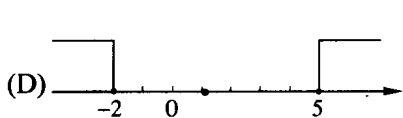
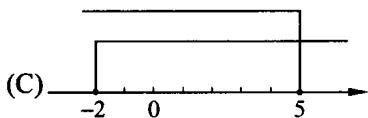
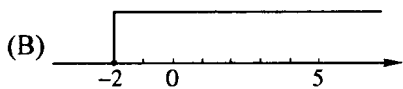
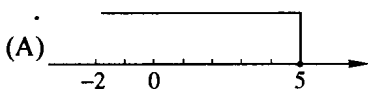
(B) 如果不等式组 $\begin{cases} x > a \\ x > 1 \end{cases}$ 的解集是 $x > 1$, 则 $a < 1$

(C) 当 $a < 1$ 时不等式组 $\begin{cases} x < a \\ x > 1 \end{cases}$ 无解

(D) 不等式组 $\begin{cases} 4x-5 > 2x+3 \\ 2(x+5) < x+4 \end{cases}$ 的解集是 $x < -6$ 或 $x > 4$

7. 不等式组 $\begin{cases} 2x-3 \leq x+2 \\ x-\frac{3x-1}{2} \leq 2-\frac{x}{2} \end{cases}$ 的解集可以在数轴上表示为

[].



8. 已知三个连续奇数的和不超过 27 且大于 10, 这样的数组共有 [].

(A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

9. 已知 $|x| < y$, 则下列各式中一定成立的是 [].

(A) $-x < -(y+1)$ (B) $-x > -(y+1)$
(C) $-x > -y+1$ (D) $-x < y-1$

10. 已知 $|x| < |y|$, $|z| < |y|$, 则下列各式中一定成立的是 [].

(A) $|x| - |z| < 0$ (B) $|x| + |z| < |y|$
(C) $|x - z| < |2y|$ (D) $|y| + |z| < |x + y|$

11. 设 $a < b < 0$, 则下列不等关系中不能成立的是 [].

(A) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (B) $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$
(C) $|a| > |b|$ (D) $a^2 > b^2$

12. 不等式 $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$ 的解集为 [].

(A) $(-\infty, -2]$ (B) $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$
(C) $(-\infty, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (D) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

(二) 填空题

1. 设函数 $y = \frac{kx+7}{kx^2+4kx+3}$ 的定义域为全体实数, 则 k 的取值范

围是_____.

2. $\lg x > \frac{2}{\lg x} + 1$, 则 x 的取值范围是_____.

3. 不等式 $|\sqrt{x-2}-3| < 1$ 的解集是_____.

4. 不等式 $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \leq 0$ 的解集是_____.

5. 满足不等式 $4 \cdot 3^{2x+1} + 3^x < 1$ 的最大整数 x 的值是_____.

6. 不等式 $5 \leq |x^2 - 4| \leq x + 2$ 的解为_____.

7. 已知不等式 $mx^2 - 5x + n > 0$ 的解集为 $\{x | -3 < x < -2\}$, 那么不等式 $nx^2 - 5x + m < 0$ 的解集为_____.

8. 已知 $a^2 - 2a - 15 \leq 0$, 化简 $|a+3| - |a-5|$ 得_____.

(三) 计算题

1. 一个两位数, 其个位数字比十位数字大 2 且其大于 20 而小于 40, 求这个两位数.

2. 求满足不等式 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < 0.1$ 的最小整数 x .

3. 如果不等式 $(a+b)x + (2a-3b) < 0$ 的解是 $x < -\frac{1}{3}$, 求不等式 $(a-3b)x + (b-2a) > 0$ 的解.

[参考答案]

(一) 选择题

1. D 2. A 3. B 4. D 5. A 6. D 7. C
8. C 9. B 10. C 11. B 12. C

(二) 填空题

1. (100, 1 000) 2. $(0, 1, 1) \cup (100, +\infty)$ 3. $\{x | 6 < x < 18\}$
4. $[0, 2]$ 5. -2 6. $x=3$ 7. $\{x | x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > -\frac{1}{3}\}$
8. $2a-2$

(三) 计算题

1. 24 或 35
2. $x=25$

3. $x < -3$

第二节 方程与方程组

[考点归纳]

1. 求解一元一次方程.
2. 求解二元一次方程组.
3. 一元二次方程根与系数的关系及相关的计算.
4. 求解一元二次方程.

[考点突破]

命题趋势

很多数学问题的解决都是通过解方程来实现的,代数方程则是解各种复杂方程的基础,而一元一次、一元二次方程更是基础的基础,是考试中必定要涉及到的内容,因此学会方程的解法具有重要意义. 本节内容中的主要题型有:求解一元一次方程;求解二元一次方程组;求解一元二次方程及一元二次方程根与系数的关系.

难点剖析

1. 解方程往往是通过方程变换来实现的. 而有些变换,如方程两边同加一个分式,乘以同一个整式,乘方同样次数,开方同样次数等,运算后所得到的新方程就不一定与原方程同解,作这些变换可能增根,也可能减根. 所以在解方程过程中,实施的变换是否破坏了方程的同解性是应该特别注意的问题.

2. 一元二次方程根与系数的关系(韦达定理)涉及的问题较广,如不解方程求两根表达式的值;已知两根的某些关系式的值求原方程;利用韦达定理的关系式,求解极值、三角函数、对数等综合题等,这是重要的考点之一.

[典型例题]

题型 1:求解一元一次方程

例 1(选择题) 甲水池中储水 30 米^3 ,乙水池中储水 40 米^3 ,要

再往两水池中注入 80 米^3 的水,使甲池中的水是乙池中水的 1.5 倍,应往乙池中注入水的数量为[] 米^3 .

- (A) 30 (B) 25 (C) 20 (D) 15

解 设应往乙水池中注入水 $x \text{ 米}^3$,依题意,

得
$$\frac{30+(80-x)}{40+x}=1.5$$

即
$$220-2x=120+3x$$

解得
$$x=20(\text{米}^3)$$

故本题应选(C).

例 2(选择题) 加工一批零件,甲、乙二人合干 9 小时可加工全部零件的一半,若乙单独加工需 30 小时完成,又知甲每小时可加工 3 个零件,则这批零件共有[].

- (A) 155 个 (B) 145 个 (C) 140 个 (D) 135 个

解 设这批零件共有 x 个.依题意,有

$$\left(\frac{x}{30}+3\right) \times 9=0.5x$$

即
$$\frac{3x}{10}+27=\frac{x}{2}$$

解得
$$x=135(\text{个})$$

故本题应选(D).

题型 2:求解二元一次方程组

例 3(选择题) 一袋均是伍分和壹角的硬币,共 5 元.若从中取出伍分硬币枚数一半的壹角硬币,则袋中还剩下 3 元.那么袋中原来有伍分、壹角的硬币数目分别为[].

- (A) 50,25 (B) 40,30 (C) 30,40 (D) 20,40

解 设原来袋中伍分、壹角硬币数目分别为 x 和 y ,依题意,有

$$\begin{cases} 5x+10y=500 \\ 5x+10\left(y-\frac{x}{2}\right)=300 \end{cases}$$

解得
$$x=40, y=30$$

故本题应选(B).