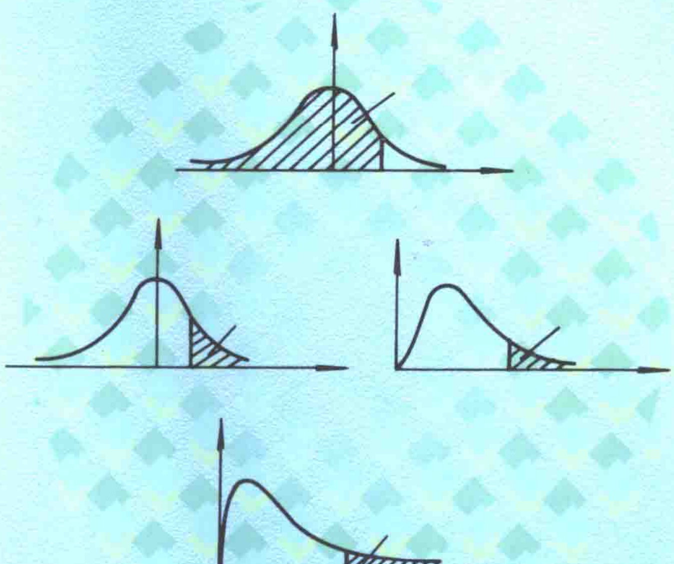
21世纪大学课程辅导丛书

概率论与数理统计

典型题

解法·技巧·注释

龚冬保　王宁



西安交通大学出版社

21世纪大学课程辅导丛书 概率论与数理统计典型题 解法·技巧·注释

内容提要

作者根据多年的教学经验，收集了300多道概率统计的典型题，所选的题目旨在启发读者学习概率统计的兴趣，提高解题能力。为了突出一些典型方法和揭示一些习题的背景，本书对大多数题目都作了注释。

本书可作为大学生，专科生等学习概率统计的参考书，也可供报考硕士研究生的考生使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计典型题：解法·技巧·注释/龚冬保，王宁编著．—西安：西安交通大学出版社，2000.6
(21世纪大学课程辅导丛书)
ISBN 7-5605-1246-1

Ⅰ.概… Ⅱ.①龚…②王… Ⅲ.①概率论-高等学校-解题②数理统计-高等学校-解题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第21805号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市咸宁西路28号 邮政编码:710049 电话:(029)2668316)
西安电子科技大学印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本:787 mm×1092 mm 1/16 印张:14.25 字数:345千字
2000年6月第1版 2000年12月第2次印刷
印数:5 001～10 000 定价:15.00元

前　　言

我们这本书与《高等数学典型题·解法·技巧·注释》在编写风格上是一致的，力求讲清解题的思路，旁注要领，画龙点睛。希望本书能帮助读者加深对“概率统计”课程基本内容的理解，进而掌握解题的方法、技巧，以培养分析问题和解决问题的能力，由于我们选的是“典型题”，读者在阅读本书时，一定要边看书、边自行推导，以掌握我们介绍的方法与技巧，并用以去解答更多的题。为了检验解题能力，我们在每一章后附有“独立作业”。

本书可作为“概率统计学”的教学参考书，对报考硕士研究生的考生也有参考价值。

本书由王宁、龚冬保编写，龚冬保统稿。我们希望本书对读者有所启发，受到广大读者的喜爱。但限于作者水平，疏漏与不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编者衷心感谢西安交通大学出版社的支持，使本书得以出版问世。

编者

2000 年 2 月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　单项选择题

1-1　设 A、B、C 是任意三个随机事件，则以下命题中正确的是(　　).

(A) $(A\cup B)-B=A-B$　　(B) $(A-B)\cup B=A$

(C) $(A\cup B)-C=A\cup(B-C)$　　(D) $A\cup B=A\bar{B}\cup\bar{A}B$

解　由于 $(A\cup B)-B=(A\cup B)\bar{B}=A\bar{B}=A-B$，故选(A). 其余三个是不对的，原因在于

$(A-B)\cup B=(A\bar{B})\cup B=(A\cup B)(\bar{B}\cup B)=A\cup B$

$(A\cup B)-C=(A\cup B)\bar{C}=A\bar{C}\cup B\bar{C}=A\bar{C}\cup(B-C)$

$A\cup B=A\bar{B}\cup AB\cup\bar{A}B$（$A\bar{B}$、$AB$、$\bar{A}B$ 两两互不相容）

本题主要考查事件的关系与运算，由于随机事件的运算与集合相同，因此对集合的运算要熟悉.

1-2　设 A、B 为两个随机事件，若 $P(AB)=0$，则下列命题中正确的是(　　).

(A) A 和 B 互不相容(互斥)

(B) AB 是不可能事件

(C) AB 未必是不可能事件

(D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$

解　若 $P(AB)=0$，则 AB 未必是不可能事件. 例如，随机地向 $[0,1]$ 区间投点，以 ξ 表示点的坐标，取 $A=B=\{\xi=\frac{1}{2}\}$，则事件 A、B 均为可能发生的，且 $AB=\{\xi=\frac{1}{2}\}$. 由几何概率知：$P(AB)=0$，故选(C). 此例同时说明 A 与 B 是相容的，且 $AB\neq\varnothing$，所以(A)、(B)是不对的. 为了说明(D)是错误的，我们给出如下的例子：掷一枚骰子，设 A 表示"出现 2 点"，B 表示"出现 6 点"，则 $AB=\varnothing$，从而 $P(AB)=0$. 但是，$P(A)=P(B)=\frac{1}{6}$.

正确理解互不相容、不可能事件及零概率事件之间的联系与区别，是解答本题的关键.

1-3　以 A 表示事件"甲种产品畅销，乙种产品滞销"，则其对立事件 $\bar{A}$ 为(　　).

(A)"甲种产品滞销，乙种产品畅销"

将 A 用其它事件表示之后，再运用事件之间的关

(B)“甲、乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”

(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

解 设 B 表示“甲种产品畅销”,C 表示“乙种产品畅销”,则 $A=B\overline{C}$.于是 $\overline{A}=\overline{B\overline{C}}=\overline{B}\cup C$,即就是 $\overline{A}$ 表示“甲种产品滞销或乙种产品畅销”,故选(D).

系,计算出 $\overline{A}$,从而可很容易地选出答案.

1-4 设随机事件 A、B、C 两两互不相容,且 $P(A)=0.2,P(B)=0.3,P(C)=0.4$,则 $P[(A\cup B)-C]$等于(　　).

(A) 0.5　　(B) 0.1　　(C) 0.44　　(D)0.3

解
$$\begin{aligned}P[(A\cup B)-C]&=P(A\overline{C}\cup B\overline{C})\\&=P(A\overline{C})+P(B\overline{C})-P(AB\overline{C})\\&=P(A-AC)+P(B-BC)-0\\&=P(A)-P(AC)+P(B)-P(BC)\\&=0.5\end{aligned}$$
故答案(A)正确.

由于 A、B、C 两两互不相容,则 $P(AB)=P(AC)=P(BC)=0$,又 $AB\overline{C}\subset AB$,则 $P(AB\overline{C})\leqslant P(AB)$,故 $P(AB\overline{C})=0$.将 $A\overline{C}$、$B\overline{C}$ 进行改写,也是解本题的关键.

1-5 对于任意两个随机事件 A 和 B,有 $P(A-B)$等于(　　).

(A) $P(A)-P(B)$　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$

(C) $P(A)-P(AB)$　　(D) $P(A)+P(\overline{B})+P(A\overline{B})$

解 由于 $A-B=A-AB$,而 $AB\subset A$,于是 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$,故(C)正确.而(A)仅在 $B\subset A$ 时成立,不具有一般性,因此不正确.(B)、(D)显然不正确.

将 $A-B$ 改写为 $A-B=A-AB$ 是解本题的关键.

1-6 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件,则下列结论中肯定正确的是(　　).

(A) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(A-B)=P(A)$

解 因 A 与 B 互不相容,故 $AB=\varnothing$,而 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=P(A)-0=P(A)$,所以(D)正确.(A)显然不正确.由 $P(AB)=P(\varnothing)=0$,而 $P(A)P(B)\neq 0$,故(C)不对.为了说明(B)是不正确的,举例如下:

随机地向[0,1]区间投点,以 ξ 表示落点的坐标,设事件 $A=\{\xi\leqslant\frac{1}{2}\}$,$B=\{\xi>\frac{1}{2}\}$,由几何概型,$P(A)=P(B)=0.5\neq 0$,显然 $AB=\varnothing$,但是 $\overline{A}=B,\overline{B}=A$,于是 $\overline{A}\overline{B}=BA=\varnothing$,即 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 是互不相容的.

本题也是利用公式:$A-B=A-AB$,而 $AB\subset A$,于是 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

1-7 设当事件 A 与 B 同时发生时,事件 C 必发生,则下列式子

解答本题利用了

正确的是(　　)

(A)$P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$　　(B)$P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$

(C)$P(C)=P(AB)$　　(D)$P(C)=P(A\cup B)$

解　由已知,$AB\subset C$,则 $P(C)\geqslant P(AB)$,又 $P(A\cup B)=P(A)+(B)-P(AB)\leqslant 1$,故有 $P(C)\geqslant P(AB)\geqslant P(A)+P(B)-1$,所以(B)正确.因此(A)是错的.(C)、(D)显然不对.

公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 及 $P(A\cup B)\leqslant 1$.

1-8　设 $0<P(A)<1,0<P(B)<1,P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$,则下列各式正确的是(　　).

(A) 事件 A 和 B 互不相容

(B) 事件 A 和 B 互相对立

(C) 事件 A 和 B 互不独立

(D) 事件 A 和 B 相互独立

解　由 $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$,得 $P(A|B)=1-P(\bar{A}|\bar{B})=P(A|\bar{B})$,又 $P(A)=P(AB\cup A\bar{B})$

$$
\begin{aligned}
&=P(AB)+P(A\bar{B})\\
&=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})\\
&=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|B)\\
&=(P(B)+P(\bar{B})P(A|B))\\
&=P(A|B)
\end{aligned}
$$

即有 $P(AB)=P(A)P(B)$

从而得到了 A 与 B 是互相独立的,故选(D).从概率得不到互不相容或互相对立的结论,因为互不相容或互相对立是从事件本身来定义的,与概率无关,因此(A)、(B)显然不对.(C)与(D)的结论是相互对立的,从而(C)也不对.

将等式 $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$ 用对立事件的概率公式改写为:$P(A|B)=P(A|\bar{B})$ 是解本题的关键.还用到了 $P(A)=P(AB\cup A\bar{B})=P(AB)+P(A\bar{B})$.

1-9　一种零件的加工由两道工序组成,第一道工序的废品率为 p,第二道工序的废品率为 q,则该零件加工的成品率为(　　).

(A) $1-p-q$　　(B) $1-pq$

(C) $1-p-q+pq$　　(D) $(1-p)+(1-q)$

解　只有两道工序都加工为正品,则该零件才能成正品,于是所求概率为$(1-p)(1-q)=1-p-q+pq$,故(C)正确.其它结论均不正确.

1-10　设 A、B 为任意两个事件,且 $A\subset B,P(B)>0$,则下列选项必然成立的是(　　).

(A) $P(A)<P(A|B)$　　(B) $P(A)\leqslant P(A|B)$

(C) $P(A)>P(A|B)$　　(D) $P(A)\geqslant P(A|B)$

解　由于 $0<P(B)\leqslant 1$,则 $\frac{1}{P(B)}\geqslant 1$,于是 $P(A)-P(A|B)=$

本题是要比较两个概率的大小,作差的方法是常用的方法.由于 $1\geqslant P(B)>0$,则

$P(A)-\frac{P(AB)}{P(B)}=P(A)-\frac{P(A)}{P(B)}=P(A)(1-\frac{1}{P(B)})\leqslant 0$,即 $P(A)\leqslant P(A|B)$,故(B)正确,从而选(B).

$\frac{1}{P(B)}\geqslant 1$.

1.2 非客观题

1.2.1 随机事件的运算及其概率的性质

1-11 某商场出售电器设备,以事件 A 表示"出售 74 cm 长虹电视机",以事件 B 表示"出售 74 cm 康佳电视机",用 A、B 及它们的对立事件表示以下事件:

(1) 这两种品牌的电视机都出售;

(2) 这两种品牌的电视机都不出售;

(3) 至少有一种品牌的电视机出售;

(4) 只出售一种品牌的电视机.

解 (1)AB (2) $\bar{A}\bar{B}$ (3) $A\cup B$ (4) $A\bar{B}\cup\bar{A}B$

1-12 设 A、B、C 是三个随机事件,试用 A、B、C 分别表示下列事件:

(1) A、B、C 中至少有一个发生;

(2) A、B、C 中恰有一个发生;

(3) A、B、C 中不多于一个发生.

解 (1) 因为 A、B、C 中至少有一个发生,就是 A、B、C 的和,因此可以用 $A\cup B\cup C$ 表示.

(2) 因为 A、B、C 中恰有一个发生,就是 A 发生,B、C 不发生;或 B 发生,A、C 不发生;或 C 发生,A、B 不发生,因此可以用 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$ 表示.

(3) 因为 A、B、C 中不多于一个发生,就是 A、B、C 中恰有一个发生,或 A、B、C 中都不发生,因此可以用 $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 表示,或表示为 $\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}$.

1-13 设 A、B 是两个事件,那么事件"A、B 都发生","A、B 不都发生"、"A、B 都不发生"中,哪两个是对立事件?

解 上述三个事件可分别表示为 AB、$\overline{AB}$、$\bar{A}\bar{B}$.若 AB 与 $\bar{A}\bar{B}$ 是对立事件,由定义应有 $AB=\overline{\bar{A}\bar{B}}$,但 $\overline{\bar{A}\bar{B}}=A\cup B\neq AB$,所以"$A$、$B$ 都发生"与"A、B 都不发生"不是对立事件.而 $\overline{\overline{AB}}=AB$,所以"$A$、$B$ 都发生"与"A、B"不都发生"是对立事件.

A、B 不都发生就是 A 与 B 不能同时发生。

1-14 设 A、B 为随机事件,$P(A)=0.5$,$P(A-B)=0.2$,求

解答本题的关键

$P(\overline{AB})$.

解 由于 $A-B=A-AB$,且 $AB\subset A$,所以

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

于是

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.5-0.2=0.3$$

因此 $P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.7$

是将 $A-B$ 改写为 $A-B=A-AB$,而 $AB\subset A$,则有 $P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$.

1-15 设 A、B 为两个随机事件,证明:

$1-P(\bar{A})-P(\bar{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

证 因为 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,而 $P(AB)\geqslant 0$,所以

$$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

又 $AB\subset A\cup B$

故 $P(AB)\leqslant P(A\cup B)$

又由于

$$\begin{aligned}1-P(\bar{A})-P(\bar{B})&=P(A)+P(B)-1\\&=P(AB)+P(A\cup B)-1=P(AB)-(1-P(A\cup B))\\&\leqslant P(AB)\end{aligned}$$

总之,有

$$1-P(\bar{A})-P(\bar{B})\leqslant P(AB)\leqslant P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$$

证明本题的关键是将 $P(A\cup B)-1$ 写成 $P(A\cup B)-1=-(1-P(A\cup B))$. 而 $1-P(A\cup B)\geqslant 0$,从而得到要证明的不等式.

1-16 设 $P(A)=p,0<p<1,P(B)=1-\sqrt{p}$,证明:$P(\bar{A}\cap\bar{B})>0$.

证
$$\begin{aligned}P(\bar{A}\cap\bar{B})&=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\cup\bar{B})\\&=1-p+\sqrt{p}-P(\bar{A}\cup\bar{B})\\&\geqslant 1-p+\sqrt{p}-1\\&=\sqrt{p}(1-\sqrt{p})>0\end{aligned}$$

即有

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})>0$$

1-17 已知事件 A、B 满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$,且 $P(A)=p$,求 $P(B)$.

解 由于

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B})&=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}})=1-P(A\cup B)\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB)\end{aligned}$$

而 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

故有 $1-P(A)-P(B)=0$

从而有

$\overline{\overline{A}\overline{B}}=A\cup B$ 是解答本题的关键.

$$P(B)=1-P(A)=1-p$$

1-18 某门课只有通过口试及笔试两种考试，方可结业. 某学生通过口试的概率为80%，通过笔试的概率为65%. 至少通过两者之一的概率为75%，问该学生这门课结业的可能性有多大?

解 用事件 A 表示"他通过口试"，事件 B 表示"他通过笔试"，则由已知，$P(A)=0.80$，$P(B)=0.65$，$P(A\cup B)=0.75$，于是

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=0.80+0.65-0.75\\&=0.70\end{aligned}$$

即该学生这门课结业的可能性为70%.

1.2.2 古典概型与几何概率

1-19 在分别写有2,3,4,5,7,8的六张卡片中任取两张，把卡片上的数字组成一个分数，求所得分数是既约分数的概率?

解1 以 A 表示事件"所得分数为既约分数"，则样本点总数为 $A_6^2=6\times5=30$. 所得分数为既约分数必须分子、分母为3,5,7中的两个，或2,4,8中的一个和3,5,7中的一个组成，所以事件 A 所包含的样本点数为 $A_3^2+2A_3^1\times A_3^1=3\times2+2\times3\times3=24$. 于是

$$P(A)=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$$

解2 仍以 A 表示事件"所得分数为既约分数"，它相当于"所取两个数中至少有一个是奇数"，A 的对立事件 $\bar{A}$ 是"所取两个数都不是奇数"，易见求 $P(\bar{A})$ 较为容易，而

了解事件的对立事件，利用对立事件求概率可以简化计算.

$$P(\bar{A})=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$$

因此

$$\begin{aligned}P(A)&=1-P(\bar{A})=1-\frac{1}{5}\\&=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

1-20 把10本书任意放在书架上，求其中指定的3本书放在一起的概率.

解 基本事件的总数是对10本书进行的全排列数 $n=10!$. 以 A 表示事件"指定的3本书放在一起"，事件 A 可以看成分两步得到：第一步将3本书看成一个整体与剩余的7本书进行全排列，所有可能排列数为 $8!$ 种；第二步再将3本书进行全排列，所有可能的排列数为 $3!$ 种. 因此，A 所包含的基本事件数为 $m=8!\times3!$，从而所求的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{8!\times 3!}{10!}=0.067$$

1-21 1～2 000 中随机取一整数，问取到的整数不能被 6 或 8 整除的概率是多少？

解 设事件 A、B、C 分别表示"取到被 6 整除的数"、"取到被 8 整除的数"及"取到不能被 6 或 8 整除的数"，则

$$C=\overline{A\cup B}$$

所以

$$\begin{aligned}P(C)&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\end{aligned}$$

下面分别求事件 A、B 及 AB 的概率. 由于

$$333<\frac{2\,000}{6}<334$$

故 A 所包含的样本点数为 333，于是

$$P(A)=\frac{333}{2\,000}$$

由于

$$\frac{2\,000}{8}=250$$

故 B 所包含的样本点数为 250，所以有

$$P(B)=\frac{250}{2\,000}$$

又因为一个数同时被 6 与 8 整除，就相当于被它们的最小公倍数 24 整除. 注意到

$$83<\frac{2\,000}{24}<84$$

则 AB 所包含的样本点数为 83，于是

$$P(AB)=\frac{83}{2\,000}$$

这样，所求概率为

$$\begin{aligned}P(C)&=1-[P(A)-P(B)-P(AB)]\\&=1-[\frac{333}{2\,000}+\frac{25}{2\,000}-\frac{83}{2\,000}]\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

本题中把所求的概率转化为计算 $1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$ 的值，表面上好像繁了一点，实质上是把原来不易求解的问题转化为易于求解的问题，是一种以退为进的解题思路.

1-22 已知 10 个晶体管中有 7 个正品及 3 个次品，每次任意抽取一个来测试，测试后不再放回去，直至把 3 个次品都找到为止，求需要测试 7 次的概率.

解 测试 7 次，即就是从 10 个晶体管中不放回地抽 7 个晶体管，基本事件的总数为 A_{10}^{7}. 设事件 A 表示"经过 7 次测试，3 个次品都已找到"，这就是说在前 6 次测试中有 2 次找到次品，而在第 7 次测试时

分析出事件 A 所包含的基本事件总数是解答本题的关键.

找到了最后一个次品.由于3个次品均可在最后一次被测试到,所以事件 A 所包含的基本事件数为 $C_6^2C_4^4A_7^43!$.因此,所求概率为

$$P(A)=\frac{C_6^2C_4^4A_7^43!}{A_{10}^7}=\frac{1}{8}$$
$$=0.125$$

1-23 从 $a,b,c,\cdots,h$ 等8个字母中任意选出三个不同的字母,试求下列事件的概率:

$A_1=\{$三个字母中不含 a 与 $b\}$;$A_2=\{$三个字母中不含 a 或 $b\}$;$A_3=\{$三个字母中不含 a 但含有 $b\}$.

解 设 $B_1=\{$所取的三个字母中不含 $a\}$,$B_2=\{$所取的三个字母中不含 $b\}$.

另见, $A_1=B_1B_2,A_2=B_1\cup B_2,A_3=B_1\bar{B}_2$

从而

$$P(A_1)=P(B_1B_2)=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{5}{14}$$

$$P(A_2)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1B_2)$$
$$=\frac{C_7^3}{C_8^3}+\frac{C_7^3}{C_8^3}-\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{10}{8}-\frac{5}{14}=\frac{25}{28}$$

$$P(A_3)=P(B_1\bar{B}_2)=\frac{C_1^1C_6^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}$$

1-24 从5双不同的手套中任取4只,求

(1) 恰有一双配对的概率?

(2) 至少有2只配成一双的概率?

解 (1) 设事件 A 表示"5双手套中任取4只,恰有一双配对".从5双(10只)手套中任取4只,共有 C_{10}^4种取法;而从5双手套中任选一双,有 C_5^1 种选法,把选出的一双的2只都取出,有 C_2^2 种取法,在剩下的4双中任选2双,有 C_4^2 种选法,每双任取一只有 $C_2^1C_2^1$ 种取法.于是任取4只恰有一双配对的取法数共有 $C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1$ 种.因此,所求概率为

$$P(A)=\frac{C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}$$
$$=\frac{4}{7}$$

利用组合数求出 A 所包含的样本点,是解(1)的关键.

注意先选了一双配对后,另两只就不能再成双了,因此要从2双中各取1只.

另解 事件 A 所包含的基本事件数也可以这样得到:先从5双手套中任选一双,有 C_5^1 种选法,把选中的一双的2只都取出有 C_2^2 种取法,在剩下的8只中任取2只,有 C_8^2 种取法,其中有 $C_4^1C_2^2$ 种取法是配对的,应减去,故 A 所包含的基本事件数为

$C_5^1C_2^2(C_8^2-C_4^1C_2^2)$种，于是 A 的概率为

$$P(A)=\frac{C_5^1C_2^2(C_8^2-C_4^1C_2^2)}{C_{10}^4}$$

$$=\frac{4}{7}$$

(2) 可依照(1)的解法，利用组合数的方法来计算概率. 在此，我们介绍其它两种解法.

设事件 B 为"4 只手套中至少有 2 只配成一对"，则其逆事件 $\bar{B}$ 为"4 只手套中没有 2 只配成一双"，显然样本点总数仍为 C_{10}^4. 事件 $\bar{B}$ 包含的样本点可以这样来计算：从 5 双中任取 4 双，然后再从每双中任取一只，这样取出的 4 只手套肯定没有 2 只配成一双，这样的取法有 $C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=80$ 种，于是

$$P(\bar{B})=\frac{80}{C_{10}^4}$$

$$=\frac{8}{21}$$

从而

$$P(B)=1-P(\bar{B})$$

$$=\frac{13}{21}$$

另解 B 和 $\bar{B}$ 的概率也可以这样来计算.

如果设想手套是一只一只取出的，即注意到手套被取出的先后顺序，那么样本点总数就是 10 只手套中任取 4 只的排列数，即有 P_{10}^4种.

按照同样的理解，事件 $\bar{B}$ 中的样本点可以这样来确定：4 只手套是一只一只取出的，第一只手套有 10 种取法(5 双中任取一只)，第二只手套有 8 种取法(除去已取出的第一只以及与第一只配成一双的另一只)，第三、第四只手套各有 6 种、4 种取法. 所以，依乘法原理 $\bar{B}$ 中样本点数为 $10\times8\times6\times4$，故

$$P(\bar{B})=\frac{10\times8\times6\times4}{P_{10}^4}$$

$$=\frac{8}{21}$$

因此，得

$$P(B)=1-\frac{8}{21}$$

$$=\frac{13}{21}$$

1-25 袋中有 a 个黑球，b 个白球，现在把球随机地一个一个摸出来，求第 k 次摸出的一个球是黑球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

本题的四种解法，来自对样本空间的不同构造. 在

解 1 给 $a+b$ 个球分别编号，把摸出的球依次排列在 $a+b$ 个位

置上，则所有可能的排列相当于对 $a+b$ 个相异元素进行全排列，所以样本点总数为 $(a+b)!$. 有利场合数可以这样考虑：第 k 个位置安放一个黑球有 a 种放法，而另外 $a+b-1$ 个位置上相当于对 $a+b-1$ 个球进行全排列，有 $(a+b-1)!$ 种放法，故所求概率为

$$P_k = \frac{a\cdot(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}$$

计算样本点总数和有利场合数时，必须在已经确定的样本空间中进行，否则就会导致错误的结果.

解 2 把黑球与白球看作是没有区别的，将摸出的球仍依次放在 $a+b$ 个位置上. 样本点总数为 $C_{a+b}^{a}C_{b}^{b}=\frac{(a+b)!}{a!\ b!}$. 有利场合数可这样考虑：第 k 个位置上必须放置黑球，剩下的 $a-1$ 个黑球和 b 个白球放在 $a+b-1$ 个位置上，共有 $C_a^1C_{a+b-1}^{a-1}C_b^b$ 种放法，于是所求概率为

$$P_k = \frac{C_a^1C_{a+b-1}^{a-1}C_b^b}{C_{a+b}^{a}C_b^b} = \frac{a}{a+b}$$

解 3 把 a 个黑球和 b 个白球看作是各不相同，且样本空间只考虑前 k 次摸球. 那么，样本点总数就是从 $a+b$ 个球中任取 k 个的排列数，即 A_{a+b}^{k}，而其中第 k 个位置上排黑球的排法数就是从 a 个黑球中任取一个，排在第 k 个位置上，再从余下的 $a+b-1$ 个球中任取 $k-1$ 个，排在其余 $k-1$ 个位置上，这种排法一共有 $C_a^1A_{a+b-1}^{k-1}$ 种，于是

$$P_k = \frac{C_a^1\cdot A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^{k}} = \frac{a}{a+b}$$

解 4 样本空间只考虑第 k 次摸球. 那么，样本点总数相当于从 $a+b$ 个球中任取一个排在第 k 个位置上，有 $a+b$ 种排法，而第 k 个位置上黑球的排法数为 C_a^1，即有 a 种排法，所以

$$P_k = \frac{a}{a+b}$$

本题表明，摸得黑球的概率与摸球的先后次序无关. 这个结论与我们日常的生活经验是一致的. 例如体育比赛中进行抽签，对各队机会均等，与抽签的先后次序无关.

1-26 袋中有 α 个白球，β 个黑球，逐一把球取出（不返回），直至留在袋中的球都是同一种颜色为止，求最后是白球留在袋中的概率.

解 设 A 表示事件"袋中只剩白球"，取出的球必为 β 个黑球，i 个白球 $(i=0,1,\cdots,\alpha-1)$. 用 B_i 表示事件"取出 β 个黑球，i 个白球，袋中留下的全是白球" $(i=0,1,\cdots,\alpha-1)$，则事件 $B_0,B_1,\cdots,B_{\alpha-1}$ 必两两互不相容，且

将 A 表示为各个 B_i 的和，是解本题的一个重要环节. 学会设事件，对解复杂的概率题非常有用.

$$A=B_0\cup B_1\cup\cdots\cup B_{\alpha-1}$$

根据概率的有限可加性,有

$$P(A)=P(B_0)+P(B_1)+\cdots+P(B_{\alpha-1})$$

由事件 B_i 的定义,对确定的 i,它的样本空间,就是从 $\alpha+\beta$ 个球中任取 $i+\beta$ 个球的排列. 所以,样本点总数为 $A_{\alpha+\beta}^{i+\beta}$. 注意到 $i+\beta$ 个球取出后,留在袋中的全是白球,因而在这 $i+\beta$ 个球中,最后取出的一个应是黑球. 这样,事件 B_i 的有利场合数,就是 $i+\beta-1$ 个球的全排列(β 个黑球中扣除 1 个,以保证最后取出的一个必为黑球). 显然,i 个白球可以从 α 个白球中取得,有 C_α^i 种取法. $\beta-1$ 黑球可从 β 个黑球中取得,有 $C_\beta^{\beta-1}$ 种取法,从而事件 B_i 所含的样本点数为 $C_\alpha^i\cdot C_\beta^{\beta-1}\cdot A_{i+\beta-1}^{i+\beta-1}$. 因此

$$\begin{aligned}P(B_i)&=\frac{C_\alpha^iC_\beta^{\beta-1}\cdot(i+\beta-1)!}{A_{\alpha+\beta}^{i+\beta}}\\&=\frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha+\beta)!}C_{i+\beta-1}^{i}\end{aligned}$$

把诸 $P(B_i)$代入 $P(A)$中,并注意到

$$C_m^0+C_{m+1}^1+C_{m+2}^2+\cdots+C_{m+n-1}^{n-1}=C_{n+m}^{n-1}$$

即得

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha+\beta)!}[C_{\beta-1}^0+C_\beta^1+C_{\beta+1}^2+\cdots+C_{\beta+\alpha-2}^{\alpha-1}]\\&=\frac{\alpha!\ \beta!}{(\alpha+\beta)!}C_{\beta+\alpha-1}^{\alpha-1}\\&=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\end{aligned}$$

1-27 n 个人每人携带一件礼品参加联欢会. 联欢会开始后,先把所有的礼品编号,然后每人各抽一个号码,按号码领取礼品. 求所有参加联欢会的人都得到别人赠送的礼品的概率.

为求事件 A 的概率,先求其对立事件 $\overline{A}$ 的概率,是常用的方法.

解 设 A 表示事件"所有参加联欢会的人都得到别人赠送的礼品",A_i 表示事件"第 i 个人得到自己带来的礼品",$i=1,2,\cdots,n$,则事件$\bigcup\limits_{i=1}^{n}Ai$ 表示至少有一个人得到自己带来的礼品,于是

$$A=\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}$$

为此先计算如下概率

$$P(A_i)=\frac{1}{n}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$P(A_iA_j)=\frac{1}{n(n-1)}\qquad(1\leqslant i<j\leqslant n)$$

$$P(A_iA_jA_k)=\frac{1}{n(n-1)(n-2)}\qquad(1\leqslant i<j<k\leqslant n)$$

$$\vdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}$$

由此得

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)=\mathrm{C}_n^2\cdot\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{2!}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)=\mathrm{C}_n^3\cdot\frac{1}{n(n-1)(n-2)}=\frac{1}{3!}$$

$$\vdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\frac{1}{n!}$$

根据 n 个事件和的计算公式得

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\\&\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+\\&(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\\=&1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\\=&\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i!}\end{aligned}$$

故,所求概率为

$$P(A)=1-P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

当 n 充分大时,$P(A)\approx \mathrm{e}^{-1}=0.368$

1-28 某饭店一楼有三部电梯,今有 5 位旅客要乘电梯.假定选择哪部电梯是随机的,求每部电梯内至少有一位旅客的概率.

解 令 A_i 表示事件“没有一位旅客进入第 i 部电梯”,也就是表示“第 i 部电梯空着”,$i=1,2,3$. 则

$$P(A_i)=\frac{(3-1)^5}{3^5}=\left(\frac{2}{3}\right)^5,\qquad i=1,2,3$$

同理,“没有一位旅客进入第 i 部和第 j 部电梯”的概率为

$$P(A_iA_j)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^5,\quad i,j=1,2,3$$

显然,三部电梯全空着的概率为 0. 于是

$$\begin{aligned}&P\{\text{至少有一部电梯空着}\}=P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_2)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-\\&\quad P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)\\&=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^5-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+0\end{aligned}$$

认清事件“每部电梯内至少有一位旅客”等价于事件“每部电梯都不空”是非常必要的,而此事件的对立事件为“至少有一部电梯空着”,而将这个对立事件表示为 A_1,A_2,A_3 的和,是解本题的重要步骤.

$$= 0.38$$

从而

$$\begin{aligned}
&P\{\text{每部电梯至少有一位旅客}\}\\
&= P\{\text{每部电梯不空}\}\\
&= 1 - P\{\text{至少有一部电梯空着}\}\\
&= 1 - 0.38 = 0.62
\end{aligned}$$

1-29 任取两个正的真分数,求它们的乘积不大于$\frac{1}{4}$的概率.

解 设 x 和 y 为所取的真分数,则

$$0 < x < 1, \qquad 0 < y < 1$$

把(x, y)表示为平面上一点的坐标,则点(x,y)位于边长为 1 的正方形区域内(如图 1.1).

为了 x、y 的乘积不大于$\frac{1}{4}$,即

$$xy \leqslant \frac{1}{4}$$

则点(x,y)应位于图 1.1 中阴影部分的区域内.因此,所求概率为

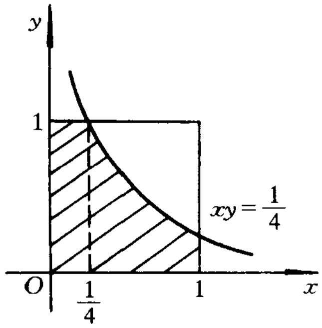


图 1.1

$$P = \frac{1}{4} + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ln 4$$

$$= 0.597$$

这是一道几何概率的题目.在做这类题目时,正确做出图形是解题的关键,这类题常用到定积分的知识.

1-30 随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$(a 为正常数)内掷一点,点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比,则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率是多少?

解 随机地向图 1.2 中的半圆掷一点,则该点与原点的连线与 x 轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的区域为图 1.2 中的阴影部分,于是所求概率为

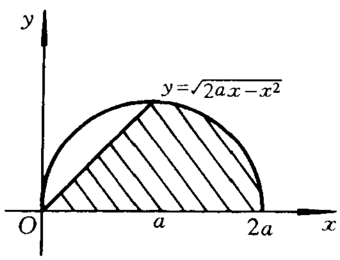


图 1.2

$$P = \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$$

从本质上来说,几何概率问题一般地都可以通过引进适当的随机变量,确定相应的分布函数,利用积分的知识来处理.