〔日〕力武常次 佐藤良辅 萩原幸男 编著

周胜奎 译

杨懋源 校

地球科学中的
数学物理方法

上册 基础篇

地震出版社

地球科学中的数学物理方法

上册·基础篇

力武常次
[日] 佐藤良辅　编著
萩原幸男
周胜奎　译
杨懋源　校

地震出版社
1988

内 容 简 介

本书分上下册，是日本《地球物理学》丛书中的两个分册，系统地论述了数学物理方法中的基础理论及其在地球科学中的应用。上册是基础篇，介绍了数学物理方法中常用的积分变换、算子法、谱分析、特殊函数、拉普拉斯方程、波动方程以及松弛法等内容；下册是应用篇，围绕地球物理学中的一些基本问题，介绍了如何应用上述基础理论。

本书中数学理论的指导简明，论述严谨，选择的例题既有代表性又有启发性，对地球科学各领域的科研人员和大学师生十分有用，同时也可供数理学科有关专业人员参考。

地球物理シソーズ02

物理・数学〈I〉(基础编)

地球科学在主体としこ

力武常次・佐藤良輔・萩原幸男

学会出版センター　1980

地球科学中的数学物理方法

（上册・基础篇）

〔日〕力武常次等　编著

周胜奎　译　杨懋源　校

责任编辑：裴　申

地震出版社出版

北京复兴路63号

北京昌平展望印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

850×1168　1/32　5.875　印张　157　千字

1988 年 7 月第一版　1988 年 7 月第一次印刷

印数 0001—2500

ISBN 7-5028-0008-5/P.8

(417)　定价：3.10 元

序

对于我的研究生涯来说，数学物理方法是头等重要的事情了。当然，设计仪器、进行实验和野外观测也是非常重要的，但是为了分析实验和观测结果，并把它们提高成理论，无论如何必须借助于数学物理方法。

在我的手边有一张普通的旧明信片，日期是 1934 年 5 月 4 日，明信片是 2 钱的，同时还贴了 1 钱的邮票。寄信人是佐藤泰夫(现任鹿儿岛大学教授，东京大学名誉教授，当时是东大理学部地球物理教研室的助教)，收信人是我，我当时作为技师在横须贺海军工厂航海实验部工作。为了使大家对于佐藤先生也有所了解，我把全文抄录如下：

“昨天虽然已给您去信，但由于弄清了Hobson 的错误，再来打扰您一次。

Hobson 在他的书中第 289 页中间有

$$(\mu^2-1)\frac{d}{d\mu}U(n,\ m)=(n-m+1)U(n+1,\ m)$$
$$-(n+m+1)\mu U(n,m),$$

这是正确的。

然后将

$$P_n^m(\mu)=c_m(\mu^2-1)^{m/2}U(n,\ m)$$

即 $$U(n,\ m)=c_m^{-1}(\mu^2-1)^{-m/2}P_n^m(\mu)$$

代入等式的左边，得

$$(\mu^2-1)\frac{d}{d\mu}\{c_m^{-1}(\mu^2-1)^{-m/2}P_n^m\}.$$

但是在进行微分时，Hobson忘掉了第一项：

$$(\mu^2-1)c_m^{-1}\left\{\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{d}{d\mu}((\mu^2-1)^{-m/2})\cdot P_n^m}\right.$$

$$\left.+(\mu^2-1)^{-m/2}\frac{d}{d\mu}P_n^m\right\}.$$

这样在(162) 式右边：$-(n+\underset{\sim}{m}+1)\mu P_n^m$，与$m$有关的项就被漏掉了，因此Jahnke是正确的。

我想您也已经弄清楚了，但是，为了慎重起见，特致此信。

Hobson尚未指出这一点。”

当时，我为了解析船体的磁性，需要球函数的知识，把剑桥大学出版物，E.W.Hobson 所著的“Spherical and Ellipsoidal Harmonics”(1931，500 pp.) 翻来复去地读，但是由于渐近公式与著名的E.Jahnke 和F.Emde 所著的“Funktionentafeln mit Formeln und kurven”(1933，330 pp.) 的公式不一致，因而十分不快，于是我就向擅长数学的佐藤先生请教。

在关于球函数最权威的书中，发现把对积的微分 $d(xy)=ydx+xdy$忘了一项的基本错误，这对于年轻的我来说，是一件非常惊奇的事。因此，即使乍一看是很出色的书，刚开始时也不应该全然相信，这便是我得到的教训。

第二次世界大战后，我回到地震研究所，开始应用数学物理方法对磁位势、地球电磁感应、地磁发电机理论、电磁流体振动、地球内部热传导、地球的弹性变形等各种问题进行研究。每当我找到了有效的复变积分的方法，或者导出了现有书中尚未给出的普遍公式时，或者找到了一开始感到非常棘手的微分方程的解的时候，都使我对研究工作感到小小的欣慰。近来，由于电子计算机的普及，深夜静悄悄地思考围道积分的那种乐趣(艰苦?!) 几乎已经消失。但是比起从头开始就进行数值积分，不如在可能的情况下，使用球函数和Bessel函数这样的特殊函数更好一些。

仔细一想，与纯粹的物理学相比，在地球物理学中适合于应用数学物理方法的问题或许更多一些。因为是在地球中，当然球

的振动、热传导、位势理论等典型的问题比比皆是。然而在局部问题中，地球就成了半无限介质的近似对象，给出了求直角坐标和柱坐标形式的Laplace方程式及波动方程式的解的很好例子，也就是说，存在着很多典型的边值问题。

与数学严格性相比，更重要的是我们希望能够求得问题的解，并将此解与实测结果进行比较，进行讨论，这些对地球物理学来说是主要的。

考虑到这些方面，本书把精力花在边值问题求解的同时，也涉及到了有关算子法及松弛法等，在不同的情况下，这些方法并不能认为是"笨拙"的方法。大多数例题在同类的书中恐怕是难以找到的。这样，对于以地球科学的各种问题为主体的数学物理方法进行归纳的书，我相信对立志于地球物理学的学生、研究生、年轻的研究者等读者是有益的。另外，如果对于地球科学以外的学者来说，也有人进行这些方面的研究，那就更荣幸了。

本书在计划和写作过程中，由于弹性理论专家佐藤良辅先生和重力、测地学专家并活跃在地球物理学各领域内的萩原幸男先生的参加，我想几乎是无遗漏地涉及到固体地球物理学的各领域。为了论述的方便，本书分为两册，即作为基础编的(上册)及作为应用编的下册，大体的分工如下：

上册(基础编)

第一章	Fourier变换	佐藤
第二章	Laplace变换	佐藤
第三章	Heaviside算子法	力武
第四章	频谱分析	佐藤
第五章	特殊函数	萩原
第六章	Laplace方程	萩原
第七章	波动方程	佐藤
第八章	松弛法	力武

下册(应用编)

第一章　弹性体的位移分量　佐藤

第二章　弹性波的传播　佐藤

第三章　弹性波的发生　佐藤

第四章　弹性体的静变形　佐藤

第五章　重力势理论　荻原

第六章　地球自转和潮汐　荻原

第七章　热传导　荻原

第八章　磁势和电势　力武，荻原

第九章　电磁感应　力武

第十章　电磁场与运动的相互作用

——电磁流体力学　力武

最后要说明的是，本书在计划、执笔和出版过程中得到了学报发行中心的押田惠司先生的帮助，在此表示感谢。

力武常次

于东工大的研究室

1980年1月

目　录

第一章　Fourier 变换 ………………………………………………（1）

1.1　Fourier级数………………………………………………（1）

1.2　有限Fourier变换 ………………………………………（3）

1.3　Fourier 积分 ……………………………………………（4）

1.4　Fourier变换………………………………………………（6）

1.5　δ函数 ……………………………………………………（8）

1.6　褶积…………………………………………………………（10）

1.7　Hankel 变换 ……………………………………………（11）

1.8　弦的振动 …………………………………………………（13）

1.8.1　无限长的弦………………………………………………（14）

1.8.2　有限长的弦………………………………………………（17）

第二章　Laplace变换 …………………………………………（21）

2.1　Laplace变换……………………………………………（21）

2.2　推广的Fourier变换 ……………………………………（22）

2.3　δ函数的Laplace变换 ………………………………（24）

2.4　褶积…………………………………………………………（24）

2.5　非弹性体的应变…………………………………………（25）

2.5.1　Maxwell体…………………………………………………（26）

2.5.2　Kelvin-Voigt 体 ………………………………………（27）

2.6　地震仪 ……………………………………………………（28）

2.6.1　$d^2f/dt^2=H(t)$的情况 ………………………………（29）

2.6.2　$f(t)=H(t)$ 的情况 ……………………………………（30）

2.6.3　$f(x)=\sin\omega tH(t)$ 的情况……………………………（30）

2.6.4　褶积的情况………………………………………………（31）

第三章　Heaviside算子法…………………………………………（35）

3.1 引言 …… (35)
3.2 Brcmwich积分 …… (36)
3.3 算子法的公式 …… (38)
3.4 Borel定理 …… (40)
3.5 算子e^{hp} …… (41)
3.6 初始条件问题 …… (43)
3.7 算子法的局限性 …… (44)
第四章 频谱分析 …… (45)
4.1 频谱 …… (45)
4.2 Gibbs现象 …… (46)
4.3 功率谱 …… (49)
4.4 窗口 …… (51)
4.5 滤波器 …… (54)
4.6 梳形函数 …… (56)
4.7 时间序列 …… (57)
4.8 FFT …… (59)
4.9 自相关函数的计算 …… (65)
4.10 褶积的计算 …… (66)
4.11 递推滤波器 …… (67)
4.11.1 高通滤波器 …… (68)
4.11.2 低通滤波器 …… (69)
4.11.3 带通滤波器 …… (69)
4.11.4 微分滤波器 …… (70)
第五章 特殊函数 …… (72)
5.1 Γ函数 …… (72)
5.1.1 Γ函数的定义 …… (72)
5.1.2 Γ函数的性质 …… (73)
5.2 B函数 …… (75)
5.2.1 B函数的性质 …… (75)
5.2.2 不完全的B函数与二项分布 …… (76)

5.3 超几何函数 …………………………………………………… (77)
5.4 正交多项式 …………………………………………………… (78)
5.4.1 正交函数系 …………………………………………………… (78)
5.4.2 Legendre 多项式…………………………………………………… (79)
5.4.3 利用Legendre多项式进行展开…………………………………… (83)
5.4.4 Tchebycheff(Chebyshev) 多项式 ……………………………… (85)
5.4.5 Laguerre多项式 …………………………………………………… (88)
5.4.6 Hermite多项式 …………………………………………………… (90)
5.4.7 Hermite多项式与误差函数 ……………………………………… (93)
5.4.8 曲线拟合 …………………………………………………… (94)
5.5 球函数…………………………………………………… (96)
5.5.1 Legendre函数 …………………………………………………… (96)
5.5.2 $P_n(z)$ 与$Q_n(z)$ 的关系 ……………………………… (97)
5.5.3 $P_n(z)$ 和$Q_n(z)$ 的递推公式 ……………………………… (100)
5.5.4 $P_n(z)$ 及$Q_n(z)$ 的母函数 ……………………………… (102)
5.5.5 $P_n(z)$ 及$Q_n(z)$ 的微分表达式 ……………………………… (103)
5.5.6 连带Legendre函数的定义 ……………………………… (105)
5.5.7 $P_\nu^{-m}(z)$ 及$Q_\nu^{-m}(z)$ ……………………………… (108)
5.5.8 连带函数的递推公式 ……………………………… (110)
5.5.9 连带函数的正交关系 ……………………………… (110)
5.5.10 连带函数三重乘积的积分 ……………………………… (111)
5.5.11 球面调和函数 ……………………………… (114)
5.5.12 加法定理 ……………………………… (116)
5.6 柱函数…………………………………………………… (119)
5.6.1 Bessel 函数的定义 ……………………………… (119)
5.6.2 Bessel 函数的母函数 ……………………………… (119)
5.6.3 Gegenbauer 加法定理 ……………………………… (121)
5.6.4 Bessel 函数的递推公式 ……………………………… (122)
5.6.5 含有Bessel 函数的定积分举例 ……………………………… (122)
5.6.6 Lommel 积分定理 ……………………………… (125)
5.6.7 Fourier-Bessel 展开与Dini 展开……………………………… (126)

5.6.8 半奇数阶Bessel 函数 …… (128)
5.6.9 球Bessel 函数 …… (130)
5.6.10 修正Bessel 函数 …… (131)
第六章 Laplace方程 …… (135)
6.1 关于圆的边值问题 …… (135)
6.1.1 极坐标系下Laplace方程的解 …… (135)
6.1.2 关于圆的Dirichlet 问题 …… (136)
6.1.3 Poisson积分 …… (137)
6.1.4 关于圆的Neumann问题 …… (138)
6.2 在半无限平面里Laplace 方程的解 …… (140)
6.2.1 二维问题 …… (140)
6.2.2 三维问题 …… (142)
6.2.3 柱座标系下的解 …… (143)
6.3 关于球的边值问题 …… (146)
6.3.1 球坐标系中Laplace 方程的解 …… (146)
6.3.2 关于球的Dirichlet 问题 …… (147)
6.3.3 Poisson积分 …… (149)
6.3.4 关于球的Neumann问题 …… (150)
6.3.5 关于球的第三边值问题 …… (152)
6.4 椭球坐标下Laplace 方程的解 …… (154)
6.4.1 椭球坐标 …… (154)
6.4.2 椭球坐标下的Laplace方程 …… (155)
第七章 波动方程 …… (158)
7.1 波动方程 …… (158)
7.2 Helmholtz方程 …… (159)
7.3 柱坐标系中的解 …… (160)
7.4 球坐标系中的解 …… (162)
第八章 松弛法 …… (165)
8.1 用松弛法求解代数方程 …… (165)
8.2 在边值问题中的应用 …… (168)

8.2.1 正方形网格的松弛法 …………………………………… (168)
8.2.2 正三角形网格的松弛法 ………………………………… (170)
8.2.3 联立偏微分方程组的情况 ……………………………… (170)
8.2.4 旋转对称的情况 ………………………………………… (172)
8.2.5 在边界线上没有网格点的情况 ………………………… (173)
8.2.6 三维松弛法 ……………………………………………… (175)

第一章 Fourier 变换

1.1 Fourier 级数

某函数 $f(x)$，当在所考虑的区间($0\leqslant x\leqslant 2\pi$)内只有有限个不连续点时，那末 $f(x)$可以展开成如下形式的 Fourier 级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \qquad (1.1)$$

Fourier 系数 a_n，b_n 可由(1.2)式求得。由于

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx dx=\int_0^{2\pi}\sin mx\sin nx\, dx=\begin{cases}\pi,(n=m)\\0,(n\neq m)\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos mx\sin nx dx=0,$$

将积分算子 $\int_0^{2\pi}dx\cos mx$ 或 $\int_0^{2\pi}dx\sin mx$ 作用在 (1.1) 式的两边，就得到

$$\left.\begin{aligned}&a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx,\\&a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx\end{aligned}\right\}. \qquad (1.2)$$

当所考虑的区间为$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 时，(1.2) 式的积分区间就不是 $0\to 2\pi$，而是$-\pi\to\pi$。如果区间为$-L\leqslant x<L$，则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad (1.3)$$

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,\\ b_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx. \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

一般地，对于区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$，Fourier 级数可以写成如下形式：

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[&a_n\cos\frac{n\pi(2x-\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\\ &+b_n\sin\frac{n\pi(2x-\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}\Big], \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\cos\frac{n\pi(2x-\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}dx,\\ b_n&=\frac{2}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\sin\frac{n\pi(2x-\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}dx. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

当 $f(x)$在区间$(-L\leqslant x\leqslant L)$内为 x 的偶函数时，则有

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{L}x,\\ a_n&=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx. \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

当 $f(x)$为奇函数时,则有

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x,\\ b_n&=\frac{2}{L}\int_{0}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

例：将 $f(x)=|x|/L$ 在$-L\leqslant x\leqslant L$ 内展开。

根据(1.7) 式可得

$a_0=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L\frac{x}{L}dx=1,$

$a_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L\frac{x}{L}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx=\begin{cases}-\dfrac{4}{(n\pi)^2}, & n=\text{奇数},\\ 0, & n=\text{偶数}.\end{cases}$

因此，

$$\frac{|x|}{L}=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi}{L}x,(L\geqslant x\geqslant -L) \tag{1.9}$$

另外，当 $f(x)=x/L$ 时，由(1.8)式可得

$$\frac{x}{L}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{L}x.\quad(L\geqslant x\geqslant -L) \tag{1.10}$$

1.2 有限 Fourier 级数

对于某一所测得的数据，为了知道它含有什么样的波长（或周期）成分及这些波长成分所具有的振幅，我们可以将此数据展开成 Fourier 级数，也就是求它的 Fourier 系数。但是，在这种情况下，对应于前节中的 $f(x)$ 不是以函数的形式给出，而是用曲线或数值的形式给出。在这种情况下，就不是由无限项来构成 Fourier 级数，而可以方便地用对应于数据个数的有限项级数来进行展开。

现在，假定给定的N个数据为 f_s $(s=0,1,\cdots,N-1)$，则它的有限 Fourier 级数为

$$f_s=\sum_{n=0}^{N-1}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{N}s+b_n\sin\frac{2\pi n}{N}s\right), \tag{1.11}$$

$$a_n=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}f_s\cos\frac{2\pi n}{N}s,\ b_n=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}f_s\sin\frac{2\pi n}{N}s, \tag{1.12}$$

$$a_{N-n}=a_n,\quad b_{N-n}=-b_n. \tag{1.13}$$

例如，当 $N=10$ 时，虽然由(1.12)式能够求出系数 a_0—a_9，b_1—b_9，但是根据(1.13)式，有 $a_6=a_4$，$a_7=a_3$，$a_8=a_2$，$a_9=a_1$，$b_5=0$，$b_6=-b_4$，$b_7=-b_3$，$b_8=-b_2$，$b_9=b_1$，所以最后就成了只计算 10 个系数。使用一组给定的N个数据来求(1.11)式，这就

是说，通过这N个点来求(1.11)式的N个系数。

当N是偶数时，可以表示成

$$f_s=a_0+2\sum_{n=1}^{N/2-1}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{N}s+b_n\sin\frac{2\pi n}{N}s\right)+a_{N/2}\cos\pi s, \tag{1.14}$$

当N是奇数时，可以表示成

$$f_s=a_0+2\sum_{n=1}^{(N-1)/2}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{N}s+b_n\sin\frac{2\pi n}{N}s\right). \tag{1.15}$$

例如$N=4$时，由(1.12)式得

$$a_0=\frac{1}{4}(f_0+f_1+f_2+f_3),$$

$$a_1=\frac{1}{4}\left(f_0+f_1\cos\frac{\pi}{2}+f_2\cos\frac{2\pi}{2}+f_3\cos\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(f_0-f_2),$$

$$a_2=\frac{1}{4}(f_0-f_1+f_2-f_3),$$

$$b_1=\frac{1}{4}(f_1-f_3).$$

因此，如果设$f_0=1.5$，$f_1=2.0$，$f_2=0.5$，$f_3=-1.0$，则$a_0=3/4$，$a_1=1/4$，$a_2=1/4$，$b_1=3/4$，

$$f_s=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}s+\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{2}s+\frac{1}{4}\cos\pi s.$$

将上述结果画在图 1.1 中，此曲线通过所有给定的点。从此意义上讲，有限 Fourier 级数也能够用来对某一组给定的数据进行插值。

1.3 Fourier 积分

所谓将某一函数$f(x)$在某一区间内展开成 Fourier 级数，实

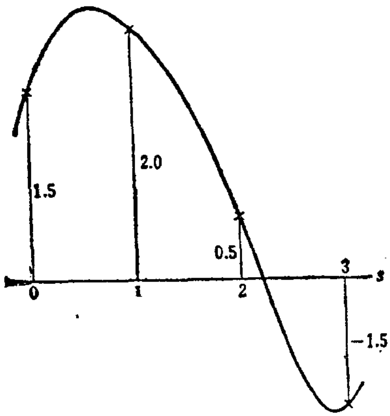

图 1.1 用 Fourier 级数作展开

际上隐含地假定了在此区间外，以给定区间为周期，并以同样的形状无限地延拓。例如，(1.10)式是将 $f(x)=x/L$ 在区间 $-L\leqslant x\leqslant L$ 中展开，如果将它看成无限区间中展开，就得

$$f(x)=\frac{1}{L}(x-2\,nL),(2\,n+1)L\geqslant x\geqslant(2\,n-1)L,$$

$$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

即变成了象锯齿一样无限延续。因此，对于无限区间内的非周期函数就不能使用 Fourier 级数，而是用 Fourier 积分或Fourier变换来表示。

让我们从 Fourier 级数来推导 Fourier 积分公式。现在，若将 $f(x)$在区间 $-L/2\leqslant x\leqslant L/2$ 内展开成 Fourier 级数，则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\,n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{2\,n\pi}{L}x\right),\quad(1.16)$$

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}f(x')\cos\left(\frac{2\,n\pi}{L}x'\right)dx',\\ b_n&=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}f(x')\sin\left(\frac{2\,n\pi}{L}x'\right)dx'.\end{aligned}\right\}\quad(1.17)$$