流体力学

余志豪　王彦昌　编著

气象出版社

内 容 简 介

本书是适用于大气科学的流体力学，其内容包括了一般流体力学的理论基础以及有关地球物理流体力学的部分。对流体动力学方程组（粘性、湍流及边界层等）作了详细推导，并以小雷诺数流动为例介绍了理论求解的情况，适当叙述了流体力学实验的相似性和量纲分析。另外，考虑到本书作为大气科学入门性的流体力学，也特别对流体涡旋和波动、层结和热对流、旋转效应以及流体动力不稳定性等方面作了简要的概念性的介绍。

本书可供广大气象业务、科研和教学人员参考之用，也可作为高等院校有关大气科学专业流体力学的教材或教学参考书籍。

流 体 力 学

余志豪 王彦昌 编著

气象出版社 出版

（北京西郊白石桥路46号）

北京印刷一厂印刷

新华书店北京发行所发行 全国各地新华书店经售

开本 850×1168 1/32 印张：12.125 印数：10,000 字数：297千字

1982年2月第1版 1982年2月第1次印刷

科技新书目：13—79 统一书号：13194·0051

定价：1.95元

前　　言

流体力学是经典力学中的一个重要分支，是研究流体宏观运动规律的基础学科。它历史悠久，应用广泛。随着现代工农业生产和科学技术的飞速发展，流体力学领域中已出现许多新兴的分支学科。地球上的大气和海洋是最常见的自然流体，因而，相应地形成了地球物理流体力学。如进一步考虑地球大气和海洋的各自特征，则又构成了大气动力学和海洋动力学，或称动力气象学和动力海洋学。而所有这些学科都以流体力学为共同基础。从这个意义上讲，流体力学是大气科学的重要理论基础之一。

把流体力学应用于气象科学，已有近百年的历史，本世纪初有皮叶克尼斯（V. Bjerknes）的斜压环流定理作为先驱性的开拓工作，其后经历了四十年代初大气长波理论的问世以及五十年代以来流体力学方法的数值天气预报的发展等重要阶段，这仅是一个方面的例子，流体力学已从许多方面渗透到大气科学的各个领域，显示出它在大气科学中与日俱增的重要性。因此，广大气象工作者，包括业务、科研和教学人员，经常需要有一本适用的流体力学参考书籍，以便在工作或学习中查阅。并且，高等学校大气科学有关专业也很需要一本合用的教学参考书。基于这些原因，我们依据在南京大学气象系多年执教的点滴经验，参阅国内外经典的及近期的流体力学有关著作，编著此书。

由于大气动力学本身就是斜压、层结和旋转流体力学，因此对气象工作者而言，本书只是一本流体力学入门书籍，宜着重于基本概念、基本方法和基础理论等方面的阐述。全书共十一章，分三大部分，前四章为基本概念和基本方程等，这是最基础的内容；五、六、八、九章中既有一般的流体力学基础知识，又有结合大气科学

特点的专题内容；七、十和十一章是流体力学结合大气科学较为专门的内容，在一般的流体力学书籍中很少介绍。根据我们长期在教学、科研中的体会，在浩瀚精深的流体力学中选取这三部分作为基本内容，其目的是希望本书能成为内容简洁、基础扎实、概念清晰和方法较多且具有适用于大气科学特点的流体力学书籍。但是，限于我们的学识水平和编写经验不足，上述要求恐难实现，缺点和错误也在所难免，热诚希望广大读者批评指正。

本书第八、九章以及第二章的§4—§5和第三章的§5由王彦昌同志执笔，其余均由余志豪同志编写。南京气象学院顾钧禧教授审阅全书，并提出了宝贵的修改意见，谨致深切谢意。南京大学气象系“统体力学教学小组”的同志们，在教学过程中曾提出许多有益的意见，石宗祥同志为本书绘制了全部插图，一并在此致谢。

作者

1980 年 2 月

目　录

第一章　基础概念

在人类日常生活和生产活动中，经常要遇到象水、空气之类的流体。人们需要掌握它们的运动规律，例如河道中的水或者地球上的空气是怎样运动的。另外，也常常需要知道流体在运动时将会对处于其中的其他物体产生什么影响和作用，例如海流和海浪对于堤岸的冲击有多大，飞机、导弹飞行器飞行时或者船舶航行时空气或水对它们的阻力等等。类似这些问题的研究和解决，均属于流体力学的基本内容。概括地讲，流体力学就是研究流体运动规律，以及流体和固体之间相互作用等方面的一门学科。在这一章中，将首先引入有关流体力学的基础概念，主要介绍如何描述流体运动。

§1　流体的物理性质和宏观模型

在普通物理的质点力学中，牛顿运动定律不但表述了物体受力和运动状态变化的关系，即 $\vec{F}=m\vec{a}$，而且认为该物体的运动状态变化或加速度 $\vec{a}$，可以视作某一点（例如物体质量中心点）位置矢 $\vec{r}$ 随时间的变化率，确切地讲是二次变化率 $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$。所以，质点力学中的任何物体运动，均可当作一个点的运动，而且这个点具有与该物体相同的质量 m，故称作质点。这就是说，在一定的允许条件下（例如物体自身大小与运动规模相比小得多，以及不讨论物体自身的转动和形变等等），质点力学就把任何物体抽象概括为“质点”这样一个理论模型，在不失问题本质的情况下较简便地研究和讨论它的运动规律。流体力学也需要完全相类似地把实际流体抽象概括为一个宏观理论模型，再来讨论它的运动规律。这个理论模型不是质点力学中的“质点”，而是下文所要介绍的连续介质。

在引入连续介质概念之前，先简单地说明流体的一些物理性质。自然界的物质按其凝聚态，或者以分子平均间距的不同，可分为三类——固体、液体和气体，其中液体和气体又统称为流体。流体跟固体不同，它没有相对固定的形状，而具有极易形变和流动的性质。这是由于分子平均间距和相互作用力的不同所决定的。倘若取常温常压条件下液体分子间平均距离为 d_0，则气体分子间的平均距离的量级为 $10d_0$，相反，固体分子间的平均距离则远小于 d_0。对简单分子情况，d_0 的量值约为 10^{-8} 厘米，并且如图 1.1 所示，当分子间距小于 d_0 时为"近距斥力"，大于 d_0 时为"远距吸力"。由此可见，气体分子间相距甚远，彼此间以微弱的吸引力凝聚在一起，或者说气体分子在邻近分子力场中的位能远小于其自身的动能，所以气体中每一个分子都可以跟其邻近分子无关地自由运动，除非它们发生偶然的碰撞，这就是通常所称的"理想气体"。而液体和固体分子，任何时候均处于邻近分子的强力场之中，分子间在斥力允许的范围内尽可能紧密地挤在一起。尤其在固体中，分子排列不仅紧密，而且位于大致有周期性变动的恒定晶体结构上，它们只能在各自的平衡位置附近振荡。液体分子虽不能象气体分子那样自由运动，但也不如固体分子那样被紧密限定在晶格附近振荡。它介于两者之间，呈部分有序的排列，亦即作为整体流动性的分子群，有时进入到另一群分子的规则排列中，有时分裂为另一小群分子。此种部分有序排列是呈连续变化的，因而作用于流体的任何一种力，都会使流体产生形变，只要作用力继续维持，形变就不断增加。表 1.1 给出了液体

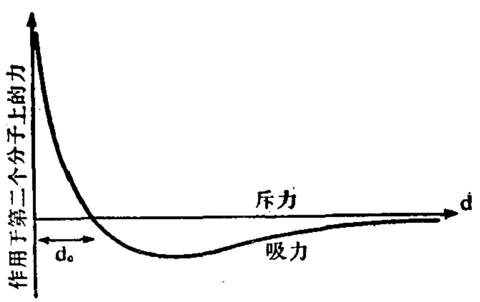

图 1.1 一个分子对另一个分子的作用力与分子间距离的关系

分子性状介于固体和气体之间的这些情况。就某些简单的微观量（如密度）而言，液体似乎近于固体；而从流动性方面讲，液体简直跟气体一样，于是两者可统称为流体。

由上述分子运动论的微观现象可知，尽管流体分子间的平均间距 d'_0 很小，只有 10^{-7}—10^{-8} 厘米，但仍超过近距斥力的范围，因而流体分子总是尽可能紧挨着的。由于 d'_0 比之分子自身线度要大得多，因此实际流体是由无数流体分子彼此间以比其自身线

表 1.1 各类物质的分子性状

	分子间作用力	无规热运动振辐与 d_0 之比	分子排列	所需用的统计类型
固体	强	$\ll 1$	有序	量子
液体	中	一个量级	部分有序	量子+经典
气体	弱	$\gg 1$	无序	经典

尺度大得多的空隙分离间隔而构成的。对于这种由离散分子构成的真实流体，该如何研究它的运动呢？由于日常生产和生活中所指的流体运动，皆属于经典力学范畴的宏观运动，它并不要求涉及分子运动和分子的微观结构。所以，为了简化流体运动的数学分析，就可以不考虑流体的离散分子结构状态，而把流体当作连续介质来处理，也就是说把离散分子构成的实际流体，看作是由无数流体质点没有空隙连续分布而构成的，这就称作连续介质假设。取此假设后，流体质点即是连续分布的，其上的物理量（如密度、流速和压力等等）也都是连续分布的，从而构成了各种物理量场，这样就能利用数学分析工具从理论上解决流体力学的问题，所以连续介质假设是必要的，下面还要说明取此种假设实际上也是可能的。

连续介质假设中的流体质点，是一个重要的新概念，它表示的不再是个别流体分子，而是大量流体分子的集合。为了进一步阐明这一概念，我们先来分析一下流体中各种物理量的测量值。譬

如测量流速，用通常的流速仪例如热线风速仪等，如果希望测得流体中各点的流速基本上都是连续而光滑地分布的，则流速仪的感应部分或感应体积($\delta\tau$)必须首先要求取得充分地小，小到相对于流体运动的规模可看作一个点，这样测得的流速才是流体中某一点的流速。其次，它又要足够地大，使得在相当于 $\delta\tau$ 的流体点域中含有相当多的分子数目，以确保该点流速具有宏观确定的值，因为宏观物理量必须是大量分子的平均效应(见本节最后说明)。当感应体积减少到如此地步，以致测量中所感应的只有少量几个分子时，则由于分子不规则运动而使物理量产生涨落现象，其平均值或平均效应将会发生随时间的不规则变化。图 1.2 表明了流体密度测量值 ρ 是如何随 $\delta\tau$ 变化的。当 $\delta\tau$ 太小时，即会由于 $\delta\tau$ 内的分子数目太少，变动又多而引起 ρ 的剧烈变化；又当 $\delta\tau$ 太大时，则会出现由于物理量在空间分布不均匀而引起 ρ 的变化（见曲线右端部分）。当 $\delta\tau$ 取适当确定值 $\delta\tau_0$ 时，才能测得该点确定的密度值。从这种测量流体密度以及测量其他物理量的过程中不难看出，感应体积 $\delta\tau$ 其实就相当于一个流体质点的大小。也就是说，连续介质假设中的流体质点既要充分小，以使它在流动中可当作一个点，同时又要足够大，能保持大量分子具有确定的平均效应值——各种宏观物理量值。这种既大又小的流体质点，有时也称作流体微团或流体体素，一般则简称为流点。

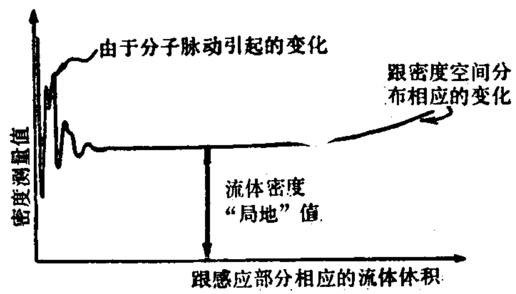

图 1.2 密度测量值 ρ 与感应体积 $\delta\tau$ 的关系

引入既足够大又充分小的这种流点概念，对于讨论流动问题及简化数学分析是必要的，并且在实际上又是可能的。例如，在通常条件下，一个立方厘米的空气中含有 2.7×10^{19} 个分子。因此，

取10^{-3}厘米为边长的立方体作为流点，它对于一般流动规模已是充分地小到可当作一点，而它还含有2.7×10^{10}个分子，这就可认为它仍相当大，足够能具有确定的平均效应。现在，以流体密度ρ这个宏观物理量为例，来说明流点或者流体中某一空间点(即流点所占的位置)上的密度是如何定义的。如图 1.3 所示，在流体中取某一点$P(x,y,z)$，并取P点周围小体积$\delta\tau$(这相当于数学中P点的邻域)，其中包含流体质量δm。在此小体积中，流体密度定义为$\rho=\delta m/\delta\tau$。当体积无限缩小到P点（数学上的几何点），则如图 1.1 所示，ρ将会发生由于分子不规则运动而引起的变化，结果就

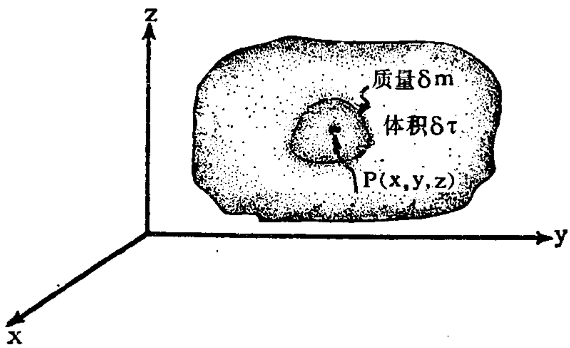

图 1.3　流点P及其质量δm和体积$\delta\tau$示意图

无法决定P点密度的确切值。实际上，在连续介质假设中确定P点密度时，并不要求$\delta\tau$无限缩小到P点，而只要$\delta\tau\to\delta\tau_0$，即缩小到流点大小就可以了。于是，$P$点的流体密度定义为

$$\rho\equiv\lim_{\delta\tau\to\delta\tau_0}\frac{\delta m}{\delta\tau} \tag{1.1}$$

由于$P(x,y,z)$点是任定的，所以对不同的时刻，流体密度分布或密度场写为

$$\rho=\rho(x,y,z,t).$$

这样，流体中各点各时刻的密度，就是空间(x,y,z)和时间(t)的连续函数，显然它是一个标量场。同样，还可以定义其他一些物理量场，如温度标量场，流速矢量场以及应力张量场等等。因此，取

连续介质假设后，描述流体运动动力学性质的各物理量均可表示为相应的连续函数——物理量场，这样就有可能用数学分析工具来讨论和解决各种流体力学问题。

对于大多数情况的流体，一般均可以当作连续介质来考虑，但在某些特殊场合下连续介质假设并不适用。例如，稀薄气体运动或者空气动力学中的激波区就无法取定合适的既大又小的流点。对于前者，流点必须取得很大，这就会失去点的意义。对于后者，由于在激波区宏观物理量在非常小的线尺度内就有剧烈的变化（即图 1.2 中的曲线几乎没有中间平直段），因而流点只能相应地取得很小，结果无法包含大量分子来确定该点的物理量，所以这个假设也不适用。但是在一般情况下，如对激波考虑成物理量场的间断面或不连续面，则仍可以保持取连续介质的假设。对于气象学或者大气科学，它的一个重要内容就是探索地球大气的运动规律，这实际上也是一个流体力学问题。所以除高层稀薄大气外，大气也是当作连续介质来考虑的，并且对于地球范围的大气运动而言，测风气球就相当于那种既大又小的流点。至于到什么高度大气才算是稀薄气体呢？我们引入分子自由程 l 和物体特征长度（如测速感应体的线尺度）L 之比数 l/L，称作努森(Knudson)数。当 $l/L \ll 1$ 时才适用连续介质假设。表 1.2 给出了各高度上大气的努森数，由该表可见，在 50 公里左右的高空大气，仍然可以作为连续介质。在更高的地方，大气就不能看作连续介质，而是非连续的稀薄气体。在本书后文中，除特殊说明外，一般都把流体当作连续介质来处理。

最后，再说明一下流体中各点的宏观物理量和微观分子物理量间的一些关系。例如，前述流体中某点的密度为

$$\rho \equiv \lim_{\delta\tau \to \delta\tau_0} \frac{\delta m}{\delta\tau} \tag{1.2}$$

实际上，上式中的流体质量 δm，应是体素 $\delta\tau$ 内所含流体分子的质

表 1.2 各高度上大气的努森数

拔海高度(千米)	分子自由程 l(大约)	努森数 $\left(\frac{l}{L}\right)^*$
0	$<10^{-4}$厘米	$<10^{-5}$
50	~ 0.1 厘米	$\sim 10^{-2}$
100	~ 1 分米	~ 1
150	100 米	$\sim 10^{3}$
200	100 千米	$\sim 10^{6}$

* 此处 L 取为 10 厘米

量。若该流体是由 n 种物质所组成，则

$$\delta m=\sum_{i=1}^{n} N_i m_i \tag{1.3}$$

其中 N_i 是第 i 种物质在体素 $\delta\tau$ 中的分子数，m_i 是第 i 种物质的分子质量。又如流体中某点的流速实为体素 $\delta\tau$ 内流体分子的平均宏观速度，即

$$\vec{V}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{V}(j) \tag{1.4}$$

其中 $N=\sum_{i=1}^{n} N_i$，而 $\vec{V}(j)$ 是第 j 个分子的速度。此外，流体中某点的温度就是体素 $\delta\tau$ 内流体分子的平均动能，流体中某点的压力就是体素 $\delta\tau$ 内流体分子对接触面元的平均碰撞，流体粘性应力就是体素 $\delta\tau$ 内的流体分子动量跟接触面元另一侧流体分子间的交换等等。

§ 2 流体速度和加速度

上节已说明，实际流体可当作连续介质这样一个理论模型来处理，也就是说，流体可视为连续分布的流点系。倘若在某确定的

参考系中取流点位置的矢径 $\vec{r}$，例如在正交坐标系(图 1.4)中为

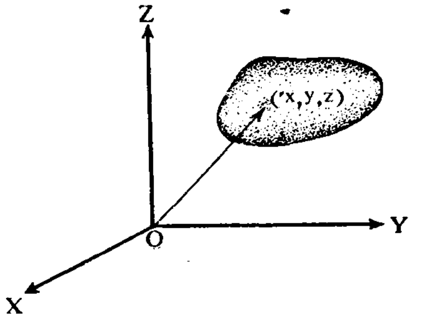

图 1.4　流点(x,y,z)及矢径$\vec{r}$示意图

$$\vec{r}=\vec{i}x+\vec{j}y+\vec{k}z \tag{1.5}$$

其中$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$分别为三个坐标轴上的单位方向矢。当$(x,y,z)$在如图 1.4 所示的流体块区域中连续取值，则(1.5)式即描述了流体域内所有流点的位置。由于流体运动时流点位置将随时间变化，因而流点位置矢径 $\vec{r}$ 应是时间 t 的连续函数，其时间变率即为该流点的运动速度$\vec{V}$，即

$$\vec{V}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial t} \tag{1.6}$$

其中$\vec{V}$是某流点的速度，简称流速。不同流点的速度可以不同。一般以某一确定时间(例如 $t=t_0$) 的流点位置 $\vec{r}_0$，或者以 $t=t_0$时的$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)$作为参数来区别各流点，于是

$$\vec{V}(x_0,y_0,z_0,t)=\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}(x_0,y_0,z_0,t) \tag{1.7}$$

表明了 t_0 时刻位于(x_0,y_0,z_0)的流点在 t 时刻的流速为上式所示的$\vec{V}$，并且此刻它已位于

$$\vec{r}=\vec{r}(x_0,y_0,z_0,t)$$

或

$$\begin{cases} x=x(x_0,y_0,z_0,t) \\ y=y(x_0,y_0,z_0,t) \\ z=z(x_0,y_0,z_0,t) \end{cases} \tag{1.8}$$

显然，在(1.7)和(1.8)式中，取定(x_0,y_0,z_0)保持不变来讨论$\vec{V}$和$\vec{r}$随t的变化情况，则就是讨论某一确定的流点在不同时刻的速度和位置。反之，把某一确定时间 t 保持不变，而在流体域中视

(x_0, y_0, z_0)为变数，则(1.7)和(1.8)式分别描述了该瞬间流体中各点的速度分布，以及 t_0 时刻按(x_0, y_0, z_0)分布的流点，由于流体运动后它们的位置作了重新分布的情况。(1.8) 式通常称作拉格朗日 (Lagrange) 变量。这种变量的本质内容就是它着眼于个别流点，来讨论个别流点在各时刻的位置和运动情况。如果在流体域中，每一个流点在各时刻的位置和运动情况都弄清楚了，整个流体的运动情况也就掌握了。此种研究和讨论流动的观点和方法非常类似于质点和质点组力学中的情况。

但是，在一般流体力学中拉格朗日变量（或方法）却应用得不多，而较广泛使用的就是所谓欧拉(Euler)变量或方法。欧拉变量跟拉格朗日变量的观点不同，它不考察个别流点的运动情况，而研究流体中确定空间点上的流动情况。例如，河道中的水流，可用某种浮标作为流点的示踪物，测出各时刻的浮标位置即是 (1.8) 式，再计算其时间变率就是该流点的速度(1.7)式。因此，用浮标测河道水流速即为拉格朗日观点，并且当 (x_0, y_0, z_0) 在流体域中取不同值时即相当于整个河流中撒遍了浮标。倘若采用流速仪测水流速，通常总是将流速仪固定于河流中某一空间点(x, y, z)上，测定各时刻的流速，所得的值为

$$\vec{V}=\vec{V}(x, y, z, t)$$

或

$$\begin{cases} u=u(x, y, z, t) \\ v=v(x, y, z, t) \\ w=w(x, y, z, t) \end{cases} \tag{1.9}$$

式中 u, v 和 w 分别为流速矢 $\vec{V}$ 在 x, y 和 z 三个坐标轴上的分量。值得指出的是，(1.9)式中的(x, y, z)是空间点的坐标，它们不随时间 t 变化，或者它们与 t 是互为独立的变量，并且当(x, y, z)在流体域中取不同值时，就相当于流速仪遍布整个河流中的情况。在流体力学中，称 (1.9) 式为欧拉变量。采用欧拉变量的好

处，是把流体运动视作流场随时间的变化，即流速空间分布的时间变化。这也是流体力学跟一般质点和质点组力学的根本区别，结果所用的数学工具也不同，前者主要是矢量场论和偏微分方程（或方程组），而后者多数是矢量代数和常微分方程（或方程组）。

采用欧拉变量描述流体运动，不如拉格朗日变量直观明瞭，但是真正理解了欧拉变量的涵意并且习惯了此种观点处理问题，同样可明白它是如何刻划流动情况的。因为，这两种变量仅仅是从不同的角度，即着眼于流点还是空间点来讨论流体运动，其结论应该是一致的。或者说，这两种变量应该是可以互相转换的。例如，在拉格朗日变量中，把(1.8)式左端的(x, y, z)当作t时刻流点所占的空间点位置（注意：这就转换了观点），于是在(1.8)和(1.7)式中消去参数(x_0, y_0, z_0)，即可得到描述流场随时间变化的欧拉变量(1.9)式。同样，在(1.9)式中把所含的(x, y, z)看作t时刻某流点到达该空间点的位置坐标（注意：这时观点已经转换），它们应该随t变化，其变率就是流速。因此有

$$\begin{cases} u = u[x(t), y(t), z(t), t] \\ v = v[x(t), y(t), z(t), t] \\ w = w[x(t), y(t), z(t), t] \end{cases} \tag{1.9'}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u \\ \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{dz}{dt} = w \end{cases} \tag{1.10}$$

把(1.9′)式代入(1.10)式，即得到含三个方程的一阶常微方程组。求积分后，得到含有三个积分常数的解案