张效先　主编

# 解读中学微积分

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

# 解读中学微积分

# 解读中学微积分

张效先　主编

山东科学技术出版社

**解读中学微积分**

张效先　主编

**出版者：山东科学技术出版社**

地址:济南市玉函路16号

邮编:250002　电话:(0531)2065109

网址: www.lkj.com.cn

电子邮件:sdkj@jn-public.sd.cninfo.net

**发行者：山东科学技术出版社**

地址:济南市玉函路16号

邮编:250002　电话:(0531)2020432

**印刷者：山东新华印刷厂潍坊厂**

地址:潍坊市潍州路753号

邮编:261008　电话:(0536)8236911

**开本**：787mm×1092mm　1/32

**印张**：10

**字数**：205千

**版次**：2001年8月第1版第1次印刷

**印数**：1-3000

**ISBN 7-5331-2919-9　O·92**

**定价**：16.00元

**图书在版编目(CIP)数据**

解读中学微积分/张效先主编.—济南:山东科学技术出版社,2001

ISBN 7—5331—2919—9

Ⅰ.解… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.663

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第040500号

**主　　编:** 张效先

**编　　者:** 张效先　张　燕　续铁权　姜曰华

# 引　言

在世纪之交，我国进行中学的教材改革，新的高中数学教材中增加的微积分，见参考书［1］的第三章与第四章。为了介绍微积分，［1］中还必然地增加了“连续函数”的内容，见参考书［1］的第二章2—6；这是因为微分学的主要概念“导数”就是连续函数的变化率，积分学的主要概念则是连续函数的“定积分”。

函数的连续性、以及导数与定积分三者的共同基础是极限。函数在一点连续，就是在这点的极限值等于函数值；导数是两个无穷小量（即极限为0）的比值，是“比式”的极限：定积分是无穷多个无穷小量的和，是“和式”的极限。

本书作为解读中学微积分，是对高中数学教材中增加的连续函数与微积分内容做两项工作：一是对其中的概念与定理（性质）给出阐述与证明，为此，必须比较深入地介绍极限理论，这就形成了本书的第二章§1—§4的内容。(高中数学新教材和前教材中极限部分的内容远不能满足解读中学微积分的需要）二是对［1］的第二章极限（含连续函数）

及第三、四章微积分的习题与复习题给出较为仔细的解答，供教学中参考：

在极限理论中，数列极限是基础（参考书［1］也是这样）。学好了数列极限的概念和性质，再来学习函数极限理论时，就会觉得轻松易学，顺理成章了。在函数极限的基础上讨论连续函数，将不会遇到太大的困难。本书的第二章（是解读参考书［1］的第二章极限），在介绍极限时，把重点放在数列极限，见第二章§1—§3。在数列极限的基础上引入函数极限（见第二章§4)。第二章§5是连续函数的概念与性质，其中不得不引入一致连续性，以便证明定积分存在定理。

阅读了本书，可以驾驭高中数学中的极限、连续与微积分教材（即［1］的第二、三、四章），以便在教学中心中有数、灵活自如。但本书不涉及教学方法；再者，本书关于概念与理论的阐述，绝大部分不宜直接进入中学课堂。

# 前　言

21 世纪的第一个春天，迎来了高级中学数学教材的改革，新教材在高中三年级增加了微积分，这是我国数学界近 20 年来酝酿、期盼增加的内容。人民教育出版社 1999 年出版印刷、由人民教育出版社中学数学室编著的《全日制高级中学教科书（试验本）数学第三册（限选理科）》（以下简称［1］）的第二章极限，新增加了函数的连续性与闭区间上连续函数的性质；［1］的第三章 导数与微分（即微分学部分），比旧教科书仅仅介绍函数的改变量是明显的改革；［1］的第四章 积分，是旧教科书所没有的。该书是根据原国家教育委员会颁布的《全日制普通高级中学课程计划（试验）》与《全日制普通高级中学数学教学大纲》编写的。对微积分删繁就简，取材得当，煞费苦心。经过试用，获得了较满意的效果。

本书是为解读［1］的第二、三、四章而编写的教师教学参考书，也可以作为高中学有余力的高才生的课外补充读物。本书注重于基本概念与基础知识的阐发，在这方面，特别适宜于大专院校理科

（含数学专业）学生阅读参考。

本书的第一章是预备知识。其中在§1 介绍阿基米德性质时，就引入了逻辑符号∀与∃，并给出初步的解释，在§2 又多次使用，是为第二章介绍数列极限的 $\varepsilon$—$N$ 定义预作准备。对函数定义的叙述，不同于传统的方法，摆脱了“对应”、“法则”、“规律”等模糊术语的牵绊。

本书的第二章极限。直接目的是解读［1］的第二章，同时为解读［1］的第三、四章微积分部分奠定理论基础。其中在介绍极限时，与［1］一样，把重点放在数列极限，不惜篇幅，仔细剖析；对数列极限的性质（定理），都有详细的阐述与严谨的证明。在引入无穷小数列之后，给出了无穷个无穷小数列的和（积）不是无穷小数列的具体例子，藉以强调由有限进入无限时必须谨慎，不能“想当然”。在数列极限的基础上，首先自然地引入 $x\to+\infty$ 时的函数极限，而后循序渐进，完成了全部函数极限的论述，安排较为紧凑。对［1］的“函数的连续性”一节有较多的补充，以满足解读［1］的第四章的需要。此外，关于初等函数连续性的论述，由于引入了函数在其定义域的孤立点连续的概念。这样，根据现有知识，就可以得出初等函数在其定义域处处连续的结论。本书注意区分局部（邻域）性质与整体（区间）性质，为此，构造了一个在一点连续

且有反函数的函数，它的反函数在相应点却不连续。

省略了关于实数完备性的诸多定理的介绍，降低了难度，节省了篇幅。但为了需要，仅列出了“单调有界数列极限存在定理”而不予证明。之所以从实数完备性诸定理中选中这个定理，是因为单调数列与有界数列都是熟知的概念，不需要为这个定理而介绍新的知识，并且，在直观上它也是比较容易接受的。

对概念的反叙述，是适可而止的。尽管概念的反叙述对理解概念颇有裨益。

本书的第三章，是对［1］的第三章的解读；其中，微分学中值定理部分有较多的补充。本书的第四章是解读［1］的第四章；特别是，针对其中的定积分定义的特殊形式（一是被积函数连续，二是等份分割积分区间），证明了这定积分的存在性（即积分存在定理）。

［1］在这三章中提出的公式、定理与性质，本书都给出了严谨的证明；这三章的全部习题与复习参考题都给出了详尽的解答（其中有些答案，与人民教育出版社出版、人民教育出版社中学数学室编著的《教师教学用书》中的答案不同），对可能的题目给出了一题多解，供参考。

本书编者分工如下：张效先写第一、二章初稿，张燕写第三、四章初稿及全书的习题解答，续铁权

与姜曰华交叉通编全书，张效先最后定稿。

感谢山东省教学研究室殷建中、韩际清教研员对编写本书给予的鼓励与支持。

本书编写仓促，特别是囿于编者的水平，欠当与错误在所难免，敬请不吝指正。

**编 者**

# 目　录

# 第一章　预备知识

## (一)实　数

实数是我们讨论问题的范围。以后凡提到数,说的就是实数。实数是由有理数和无理数两大类数组成的。有理数是由分数和整数两大类组成的。整数是由正整数(即自然数)、负整数和零组成的。

全体实数的集合记为 R,全体正整数的集合记为 N.全体整数的集合记为 Z

### 1-1-1

数轴是一条直线(通常是水平摆放),带有方向(通常是向右为正)、有原点(记为 0)、有单位(由原点向右记出一点 1,原点到这点的长度是 1 单位)。

数轴上的每一点都对应唯一的实数(就是这个点的坐标);反之,每一个实数都对应数轴上唯一的点(就是以这个数为坐标的点)。这样就建立了数轴上的所有点的集合与全体实数的集合 R 之间的一一对应关系。这个一一对应关系,把实数和数轴上的点统一起来了:这“点与数”的一一对应关系,是解析几何和数学分析作图的基础,是对数学中的抽象概念给出直观的图像解释的基础。以后,我们常把一个实数叫做

一个点，也把数轴上的一个点说成是一个实数；点与数混同了。

注1. 事实上，由坐标法建立的、数轴上点的集合与实数的集合R之间的一一对应关系，还是保持次序的，即较小的数对应的点总是位于较大的数对应的点的左侧。

注2. 一一对应的确切意义是：设有两个集合A、B，如果存在一个规律，使得A的任意一个元素，都对应B的唯一的元素；并且，B的任意一个元素，都有A的唯一元素与之对应，则称集合A与B具有一一对应关系，简称A与B一一对应。

由上面所说的点与数一一对应关系，把全体实数摆在数轴上，恰恰“布满数轴”，一个不多，一个不少。

有理数在数轴上是“稠密”的，也就是说，两个不同的有理数的平均数仍是有理数，平均数在数轴上的位置在原来两个有理数的正中间，并且这个在两个有理数正中插有一个有理数的过程是无止境继续下去的；所以，在数轴上任何两个不同的有理数之间都有无穷多个有理数，可见摆在数轴上的有理数是密密麻麻的。另一方面，将全体有理数摆在数轴上显然不能摆满数轴，因为数轴上还有无理数的位置。总之，全体有理数是“密布数轴，但密而不满”。

把全体正整数摆在数轴上，则是“稀疏”的。但是，正整数具有“相邻性”，即每一个正整数 $n$ 的后面总有第一个比它大的正整数（指 $n+1$），从第二个正整数开始，每一个正整数 $n$ 的前面总有第一个比它小的正整数（指 $n-1$）；或者说，每一个正整数都有比它大的最小的正整数，从第二个正整数开始的每一个正整数都有比它小的最大的正整数。全体整数在数轴上也是稀疏的，也具有相邻性（但全体正整数具有编号性，

即第一个、第二个、第三个、…，全体整数按大小排列时就没有这种编号性）。然而，有理数没有这种相邻性，即每一个有理数都没有比它大的最小的有理数和比它小的最大的有理数。实数也没有这种相邻性。

**1-1-2**

任何一个实数，都有比它大的正整数。

这个性质被称为 Archimedes（阿基米德）性质。

用"$\forall$"表示任意，"$\exists$"表示存在（$\forall$ 和 $\exists$ 是高等数学最为常用的两个逻辑符号）。则阿基米德性质可以简洁明了地表达如下：

$$\forall r \in \mathrm{R}, \exists n \in \mathrm{N}, \text{使得 } n > r.$$

**1-1-3**

在 1-1-2 介绍阿基米德性质时，连用了符号"$\forall$"和符号"$\exists$"。现在对它做些解释。

其中的"任意"是没有前提条件、没有例外的；$\forall r \in \mathrm{R}$，就是随便一个实数 $r$；具体在阿基米德性质中，也可以说是"对于任意一个不论多么大的实数 $r$"，但是这句话与"对于任意一个实数 $r$"具有同样的数学效果；我们宁愿去掉"不论多么大"5 个字。

其中的"存在"，是依照要求、以前面的"任意"为前提条件的。在阿基米德性质中，按照给定的 $r$，存在的是大于 $r$ 的正整数 $n$；具体的说，对于 $r = 10\sqrt{3}$，取 $n = 20$ 就可以了，当然，取 $n = 30$ 或 100 也是可以的。大于 $10\sqrt{3}$ 的最小的正整数是 18，我们可以选取 $n = 18$，但是取 $n = 18$ 和取 $n = 30$、$n = 100$