

数学名著译丛

数学与猜想

第一卷

数学中的归纳和类比

[美] G.波利亚 著

科学出版社

数学史话丛书

数学与猜想

第一讲

数学中的证明和猜想

陈维炯 讲 陈维炯 记

科学出版社

数学名著译丛

数 学 与 猜 想

第 一 卷

数学中的归纳和类比

〔美〕G. 波利亚 著

李心灿 王日爽 李志尧 译

张理京 杨禄荣 校

科 学 出 版 社

1 9 8 4

内 容 简 介

本书是著名数学家 G. 波利亚撰写的一部经典名著。本书所讨论的是自然科学、特别是数学领域中与严密的论证推理完全不同的一种推理方法——合情推理（即猜想）。自然科学、特别是数学中的新发现大都是从猜想、估计开始的，这些猜想经过大量实践验证，再经过严密的论证推理，获得定律、定理等结论。但在一般的教科书中只写已经过严密论证的结论，并不写这些结论产生的渊源及过程。本书通过许多古代著名的猜想，讨论了论证方法，阐述了作者的观点：不但要学习论证推理，也要学习合情推理，以丰富人们的科学思想，提高辩证思维能力。本书的例子涉及数学各学科，也涉及到物理学。本书内容丰富，谈古论今，叙述生动，能使人看到数学中真正的奥妙。

本书共分两卷，第一卷主要是数学中各种合情推理的实例。第二卷论述合情推理的模式。

本书可供大学数学系师生，中学数学教师，数学研究人员及数学爱好者阅读。

G. Polya

MATHEMATICS AND PLAUSIBLE REASONING

Vol. 1. Induction and Analogy in Mathematics

Princeton University Press 1954

数学名著译丛

数 学 与 猜 想

第 一 卷

数学中的归纳和类比

〔美〕G. 波利亚 著

李心灿 王日爽 李志尧 译

张理京 杨禄荣 校

责任编辑 张鸿林 杜小杨

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1984 年 3 月 第 一 版 开本：850×1168 1/32

1984 年 3 月 第一次印刷 印张：10 3/8

精 1—6,100 插页：精 2

印数：平 1—13,700 字数：261,000

统一书号：13031·2477

本社书号：3403·13—1

定价：布脊精装 2.65 元

平 装 1.95 元

译 者 的 话

G. 波利亚是当今在世年事最高、深孚众望的数学家、教育家。他 1888 年生于匈牙利，青年时期曾在布达佩斯、维也纳、哥廷根、巴黎等地攻读数学、物理学和哲学，获博士学位。1914 年曾在苏黎世著名的瑞士联邦理工学院任教。1940 年移居美国，1942 年起任美国斯坦福大学教授。他一生发表过二百多篇论文和许多专著。他在数学的广阔领域里有极精深的造诣，不愧为一位杰出的数学家；而且他还热心于教育，十分重视从小培养学生思考问题、分析问题的能力，他善于把抽象的数学研究与教学实践结合起来，也不愧为一位优秀的教育家。我国老一辈著名数学家中有人曾聆听过他的讲课，对他的数学教学艺术十分赞赏。

他写过一套提高与普及相结合的书，其中影响较大的有《怎样解题》^{*)}、《数学的发现》(一、二卷)^{**)}、《数学与猜想》等。这些堪称姊妹篇的著作相继出版后，曾在美国风靡一时，受到广泛的欢迎和推崇。此后被译成多种文字，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。

这本《数学与猜想》，早在六十年代初期我国就有人想把它译成中文，由于种种原因未能实现。今天把它翻译出版了，遂了人们的心愿。在这次翻译中尚得到我国一些著名数学家的关注和支持。这是一本谈古论今、内容丰富多采、启发读者去提炼问题、研究问题、讨论问题、直至检验问题的书。读起来使人感到妙趣横生、引人入胜，能使人看到数学中真正的内在美。作者写这套书的一个直接动机，就是为了改善当时美国中学的数学教学水平，他想对学习数学的学生和从事数学工作的教师在一个重要的、但通常

^{*)} 中译本，阎育苏译，科学出版社，1982。——译者注

^{**)} 中译本，刘景麟，曹之江，邹清莲译，内蒙人民出版社，1979。——译者注

被忽视的方面提供一些帮助。而这些我们认为也适合我国今天的某些实际情况。因此本书对我国的中学生、中学数学教师、大学生乃至大学数学教师、专业数学研究工作者和对数学有兴趣的人们都会有所裨益。正如作者所指出的：“一个认真想把数学作为他终身事业的学生必须学习论证推理；这是他的专业也是他那门学科的特殊标志。然而为了取得真正的成就他还必须学习合情推理；这是他的创造性工作赖以进行的那种推理。”“要成为一个好的数学家，…，你必须首先是一个好的猜想家。”牛顿也曾说过：“没有大胆的猜想，就做不出伟大的发现。”

学习数学和研究数学令人最感到困惑也是最引人入胜的环节之一，就是如何发现定理及怎样证明定理。特别是对初学者来说尤其如此。数学上的发现及证明不仅要数学本身，而且要从数学以外的有关知识和实践得到启发，这是很重要的。这种启发往往是发现及证明的前导，波利亚还把“从最简单的做起”当作座右铭，这又为启发性的前导提供了立足点。这大概就是所谓“合情推理”的模式。而猜想又是合情推理的最普遍、最重要的一种，归纳也好，类比也好都包含有猜想的成份。然而猜想可以打开人们思想的闸门，从物理的、生物的、天文的、地理的乃至大自然的以及数学本身的等等……，总之根据人们的日常生活、经验、实践及各方面的知识对要进行科学论证的问题加以“去粗取精，去伪存真，由此及彼，由表及里的改造和制作”，以期获得欲达之目的。说得直接了当一点，合情推理就是猜想，因此我们没有把本书书名《Mathematics and plausible reasoning》译作《数学与合情推理》而径直译作《数学与猜想》，以便更通俗醒目一些。

阅读本书并不需要高深的数学基础，只要有初等代数和几何以及不多的微积分知识就能够读懂绝大部分，个别需要微积分以上知识的部分，作者都提出了学习方法和参考文献。本书其它方面的特点和阅读时应该注意的问题，作者大都在“序言”及“对读者的提示”中谈及，兹不赘述。

在此应该说明的一点是，本书中有关译名均采用《英汉数学词

汇》(科学出版社, 1978)一书中的规范化译法, 有关人名, 则在书中第一次出现时注出了原文. 故我们没有在书后再编录人名和名词索引.

也应该指出, 本书所引用的名人语录, 有些观点是值得商榷的, 但我们相信读者会正确地去分析对待它.

最后, 我们诚恳地感谢南开大学王梓坤教授对译稿的审阅.

译 者

1981 年夏于北京航空学院

序 言

本书有彼此紧密联系的各种目的。首先，想给学习数学的学生和从事数学工作的教师在一个重要的但却通常被忽视的方面提供一些帮助。然而，在某种意义上说本书也是一种哲学论述。本书又是一部续篇，而且它本身也还要有续篇。我将逐一地谈到上述各点。

1. 严格地说，除数学和论证逻辑（其实它也是数学的一个分支）外，我们所有的知识都是由一些猜想所构成的。当然，有种种猜想。有表述成物理科学中某些一般定律的非常可贵而又可靠的猜想。也有另外一些既不可靠又不可贵的猜想，其中有一些当你在报纸上读到它时不禁会使你愤怒。而介于上述两种猜想之间还有各种各样的猜想、预感和推测。

我们借论证推理来肯定我们的数学知识，而借合情推理来为我们的猜想提供依据。一个数学上的证明是论证推理，而物理学家的归纳论证，律师的案情论证，历史学家的史料论证和经济学家的统计论证都属于合情推理之列。

这两种推理之间的差异相当大而且是多方面的。无疑，论证推理是可靠的、无可置辩的和终决的。合情推理是冒风险的、有争议的和暂时的。论证推理在科学中的渗透深度恰好和数学在科学中的渗透深度一样，但是论证推理本身（如数学本身那样）并不能产生关于我们周围世界本质上的新知识。我们所学到的关于世界的任何新东西都包含着合情推理，它是我们日常事务中所关心的仅有的一种推理。论证推理有被逻辑（形式逻辑或论证逻辑）所制定和阐明的严格标准，而逻辑则是论证推理的一种理论。合情推理的标准是不固定的，并且这种推理在清晰程度上不能与论证逻辑相比或能博得相似的公认。

2. 关于这两种推理还有一点也是值得我们注意的。众所周知,数学提供了一个学习论证推理的极好机会,但是我还要着重指出,在学校惯常的课程中,还没有一门能提供类似的机会来学习合情推理。现在,我要向各年级所有对数学有兴趣的学生提出:的确,我们应该学习证明法,但我们也要学习猜测法。

这听起来似乎有点矛盾,因此我必须强调说明几点以免发生误会。

数学被人看作是一门论证科学。然而这仅仅是它的一个方面。以最后确定的形式出现的定型的数学,好像是仅含证明的纯论证性的材料,然而,数学的创造过程是与任何其它知识的创造过程一样的。在证明一个数学定理之前,你先得猜测这个定理的内容,在你完全作出详细证明之前,你先得推测证明的思路。你先得把观察到的结果加以综合然后加以类比。你得一次又一次地进行尝试。数学家的创造性工作成果是论证推理,即证明;但是这个证明是通过合情推理,通过猜想而发现的。只要数学的学习过程稍能反映出数学的发明过程的话,那么就应当让猜测、合情推理占有适当的位置。

正如我们说过的,有两种推理:论证推理和合情推理。在我看来它们互相之间并不矛盾,相反地,它们是互相补充的。在严格的推理之中,首要的事情是区别证明与推测,区别正确的论证与不正确的尝试。而在合情推理之中,首要的事情是区别一种推测与另一种推测,区别理由较多的推测与理由较少的推测。如果你把注意力引导到这两种区别上来,那么就会对这两者有更清楚的认识。

一个认真想把数学作为他终身事业的学生必须学习论证推理;这是他的专业也是他那门科学的特殊标志。然而为了取得真正的成就他还必须学习合情推理;这是他的创造性工作所赖以进行的那种推理。一般的或者对数学有业余爱好的学生也应该体验一下论证推理:虽然他不会有机会去直接应用它,但是他应该获得一种标准,依此他能把现代生活中所碰到的各种所谓证据进行

比较。然而在他的所有工作之中他必将需要合情推理。总之，一个对数学有抱负的学生，不管他将来的兴趣如何，他应该力求学习两种推理：论证推理和合情推理。

3. 我不相信有十拿九稳的方法，用它可以学会猜测。不管怎么说，即使有这样一种方法，我至少也是没有听说过，而且我肯定不自命为能在下文中提出这种方法。有效地应用合情推理是一种实际技能，并且像任何其它实际技能一样，要通过模仿和练习来学会它。我将为渴望学习合情推理的读者尽最大努力，然而我所能提供的也仅仅是供模仿的例子和练习的机会。

在本书中，我将时常讨论数学里大大小小的发现。我不可能讲怎样得出这些发现的真实过程，因为没有人真正知道它。然而我将力求写出一个发现可能是如何产生的过程来。我还想强调指出获得发现的动机，导致发现的合情推理，总之，想强调指出值得模仿的任何事情。当然，我力求把内容讲得生动些使读者留下印象；这是我作为教师和作者的义务。然而我将在关系重大之处对读者完全诚实：我只是想把看来是真实的并且是对我有帮助的东西讲得能使读者留下印象。

每章后面都有例题和注释。注释所阐述的内容相对正文来说是过于专门或者是太微细了，有的则是偏离了主题的一些东西。某些练习给读者以机会来重新细致地考虑在正文中只是概略地叙述过的内容。然而大多数练习使读者能得出他自己的合情结论。在着手解章末所提出的较为困难的问题之前，读者应该仔细地阅读这章的有关部分，并且也应该看一下邻近的问题，前者或后者之中可能包含着解决问题的线索。为了提供（或埋伏）这样的线索，使读者在学习上受益最大，我不仅在提出问题的内容和形式上，而且也在问题的先后次序安排上花了许多心思。事实上，我在仔细考虑这些问题的安排上所花的时间和心思，要比局外人所能想象的或认为必要的要多得多。

为了扩大读者的范围，我力求用尽可能初等的例子来说明每个重要的论点。然而在有些情况下我不得不举出不太初等的例子

以便使我的论点足以令人难忘。诚然，我觉得我也应该举出有历史价值的例子，有真正的数学美的例子，并举出在其它科学方法或日常生活中有类似做法的例子。

我应该再加一句，就许多所讲的发明过程而言，其最终形式是通过某种非正式的心理实验而得出的。我向不同班级的学生讲述同一内容，在讲课过程中常常向他们提出诸如这样的问题：“那么，你在这种情况下该怎么办？”下文中的有些段落是基于我的学生们的回答写成的，或者根据课堂上学生的反应以某种别的方式修改了我的原来的讲法。

简而言之，我想利用我在研究工作和教学工作上的全部经验，给读者以适当的机会，来作有意义的模仿和进行独立的工作。

4. 收集在本书中的合情推理的例题还有其它用处：它们可以帮助说明一个有很多争议的哲学问题：归纳法的问题。关键的问题是：归纳有没有一定的法则？有些哲学家说有，而多数科学家则认为没有。为使讨论能得出有益的结果，应该改变问题的提法。它应该作不同的处理，而且不那么依靠传统的语言或新奇的形式，但更紧密地与科学家的实践相联系。现在，我们要指出，归纳推理是合情推理的一种特殊情况，还要指出（现代作者几乎忘记了的，但是一些较老的作者，诸如欧拉和拉普拉斯都清楚地认识的）归纳论据在数学研究中的作用是与它在物理研究中的作用相类似的。然后，你会注意到，通过观察和比较数学中合情推理的例子，就有可能获得关于归纳推理的一些知识。因此，这就为归纳性地研究归纳法敞开了大门。

当生物学家想要研究某个一般性问题，譬如说，遗传学的问题时，最重要的是他应当选择某些特定品种的植物或动物，以便于对他的问题很好地进行实验研究。当化学家打算研究某个一般问题，譬如说，关于化学反应的速度问题时，最重要的是他应该选择某些特定的物质，使其便于用来做那种与他的问题有关的实验。在任何问题的归纳研究中，选用合适的实验材料是极为重要的。从各方面看来，我以为数学是研究归纳推理的最合适的实验材料。

这个研究包含着可以说是某种心理实验的东西：你必须体验各种不同的证据会怎样影响你对一个猜想的信念。多亏数学课题固有的简单性和明瞭性，使之比起任何其它领域的课题更宜于做这类心理实验。在下面的篇幅中读者能够找到使自己确信这一点的充分机会。

我认为考虑合情推理这个更一般的思想比考虑归纳推理的特殊情况更具有哲学意味。在我看来，本书所收集的例题能引导读者对合情推理有一个明确的、颇为令人满意的认识。然而我并不要强迫读者接受我的观点。其实，甚至在第一卷中我并没有叙述我的观点。我要让例子自己讲话。然而，第二卷的前四章则专用于合情推理的更明确的一般性讨论。在那里我将正式地叙述由前面例子所提示的合情推理的模式，并试图把这些模式系统化并评述它们彼此之间以及与概率思想的某些联系。

我不知道这四章的内容是否值得称作是哲学，如果这是哲学的话，那它当然是一种相当低级的哲学，因为它所关心的是解释具体例题和人的具体行为，而不是要说明一般性原理。当然，我更不知道我的观点最终会得到什么评价。然而我感到颇为自信的是我的例题对于学习归纳法或合情推理的任何有理智的但没有太大偏见的学生，对于凡是希望根据可密切观察的事实而形成自己观点的人，都会有用的。

5. 我总是把这部论述《数学与猜想》的著作当作一个整体，它自然地分成两部分：《数学中的归纳和类比》（第一卷）和《合情推理模式》（第二卷）。为了方便学生，本书分两卷发行。第一卷与第二卷完全无关，但是我想对许多学生来说在阅读第二卷之前还是应当细致地读完第一卷。本书的第一卷有更多的数学“内容”，它为第二卷中归纳法的归纳性研究提供了“依据”。一些在数学方面相当成熟和很有经验的读者可能想直接去读第二卷，因此分两卷将是方便的。为便于查阅，贯穿两卷的章号是连续编排的。我没有提供索引，因为，如有一份索引，就将会使术语变得严格生硬，本书这种无索引写法，会使术语的运用更灵活便当。我相信，对于本

书来说,目录将提供一个令人满意的导引。

本书是我较早的著作《怎样解题》的续篇。对这个课题感兴趣的读者应该读这两本书。但是先读哪一本并没有多大关系。本书是这样安排的,使得在阅读时无需先读以前的那本书。事实上,本书几乎没有直接参考以前的那本书,因此在第一次读时可以不接管这些。然而在几乎每一页上,甚至某些页上几乎每一句中,都间接地参考了以前的那一本书。事实上,本书提供了大量的练习,并且对以前的那本书提出了某些更高深的说明例子,而这对以前的那本书来说,就其篇幅和初浅性质来看,都是容纳不了的。

本书也是与斯盖和本作者所合写的《数学分析问题集》(见参考文献)有关联的。那本问题集中的问题在顺序上经过仔细安排,以使这些问题互相印证,彼此提供线索,共同涉及一定的主题,并且给读者一个机会去实践在解题时起重要作用的各种手法。在问题的处理上,本书沿用以前那本书所用的方法,而这个联系并非不重要。

在本书第二卷中有两章论述概率论。其中头一章与作者在几年前所写的《概率计算的初等解释》(见参考文献)有些联系。比如说,有关概率的基本观点和出发点同那本书所讲的是一样的,然而在其它方面却几乎没有联系。

本书所提出的某些观点已经在参考文献中所引用的我以前的论文中叙述过了。论文4,6,8,9和10中的大量段落已经被吸收进本书的正文。对《美国数学月刊》,《纪念 Ferdinand gonseth 科学哲学论文集》以及《1950年国际数学会议论文集》的编辑们致以深深的谢意,承他们欣然慨允重印这些段落。

本书的大部分是我在课堂上讲授过的,某些部分还讲授过多次。在某些部分和某些方面,我保留了口述的语气,一般地,我不认为这样一种语气在介绍数学的出版物中是适当的。但是在目前情况下这还是合适的,或者至少是可以原谅的。

6. 本书第二卷的最后一章讲发现与教学。这一章比较明确地联系到作者以前的那本书,并指出了一部可能出现的续篇。

有效地使用合情推理在解题过程中起着必不可少的作用。本书试图通过许多例题来解释这种作用，但是还留下了解题过程中的其它方面，这些方面需要作类似的解释。

这里所接触到的许多论点还需要有进一步的研究。我的关于合情推理的观点应该同其他作者的观点相比较，对历史上的例子应该作比较彻底的探查，关于发现与教学的观点应该尽可能用实验心理学的方法来研究¹⁾，等等。留下的有这样几个任务，但是其中有一些可能并不受人欢迎。

本书虽然不是一部教科书，然而我希望将来它会影响教科书的惯常叙述方式及习题的选择。循着这些线索重新编写普通课程的教科书是会受人欢迎的。

7. 我对普林斯顿大学印刷所的精心印刷表示谢意，特别地对所长小赫伯特·S·贝雷先生的几点明智的帮助表示谢意。我也对普里斯拉·费金夫人准备原稿以及朱利斯·G·巴隆博士审阅校样的恳切帮助表示谢意。

G. 波利亚

斯坦福大学

1953. 5.

1) 这方面的探索性工作已经由斯坦福大学心理学系在 O. N. R. 主持下在 E. R. 赫尔伽特 (Hilgard) 指导下的研究项目内承担了。

对读者的提示

若在第七章中引用第七章的第2节时我们记为§2,但在其它各章中引用此节时则记为§7.2.若在第十四章中引用第十四章第5节的小节(3)时,我们记为§5(3),但在其它各章引用此小节时则记为§14.5(3).当第十四章的例26在本章中引用时我们记为例26,但在其它各章中引用时则记为例14.26.

阅读本书的主要部分,只要具备初等代数和初等几何的一些知识就够了.若具有初等代数和初等几何的全部知识和解析几何以及极限、无穷级数、微积分的某些知识,则对于阅读差不多全书和大多数例题与注释是足够的.然而,本书中少量非主要的注释和某些问题的注释以及若干讨论,则是针对具有高水平的读者而写的.每当用到比较高深的知识时,通常都会声明.

具有高等水平的读者,若他跳过其自认为是太初等的东西不看的话,则他漏过的东西将比没有高等水平的读者要多,而后者往往只会跳过在他看来是太复杂的那些东西.

应该注意,(不很困难的)论证的某些细节,我们通常都不加提醒地省略了.希望素有严格证题习惯的读者,不致于因此而破坏了自己的良好习惯.

要求解答的问题,有些是很容易的,但有一小部分却相当困难.方括号[]内的提示可以使解答变得容易.难题周围的问题则可以起到解难题的提示作用.在某些章的例题之前或在第一部分或在第二部分之前所加的几行“开场白”,应该受到特别注意.

解答有时是很简短的:因为我们假定读者在查阅解答之前已用自己的方法实实在在地尝试过求解了.

一个读者,若在一个问题上真的下了功夫,即使他解题时没有成功,那他也可从中受到教益,例如经过一番努力之后,他可以去

查看一下解答,再把书放在旁边,思考一下关键在哪里,然后再试图去作出解答来。

在某些地方,本书不惜用大量的图示或详细的推导过程,目的是使读者看清图示或公式的演变过程,例如,可参看图16.1—16.5。然而任何一本书都不能说它已给出了足够的图形或公式。当读者读到某一段时,可能有两种态度:一种是粗略看看,一种是读深读透。如果想读深读透,那就应该手边有纸有笔,应该准备写下书上给出的公式,或画下书上给出的图形以及公式,看到演变过程的各种细节是如何影响最后的结果。这样作就会有助于记住全部东西。

目 录

(第 一 卷)

译者的话	i
序言	iv
对读者的提示	xi
第一章 归纳方法	1
引言	1
§ 1. 经验和信念	1
§ 2. 启发性联想	2
§ 3. 支持性联想	4
§ 4. 归纳的态度	6
第一章的例题和注释, 1—14. [12. 是与非, 13. 经验与行为, 14. 逻辑学家、数学家、物理学家和工程师.]	7
第二章 一般化、特殊化、类比	11
§ 1. 一般化、特殊化、类比和归纳	11
§ 2. 一般化	11
§ 3. 特殊化	12
§ 4. 类比	12
§ 5. 一般化、特殊化和类比	15
§ 6. 由类比作出的发现	17
§ 7. 类比和归纳	21
第二章的例题和注释, 1—46; [第一部分, 1—20; 第二部分, 21—46]. [1. 正确的推广, 5. 一个极端的特殊情形, 7. 起主导作用的特殊情形, 10. 有代表性的特殊情形, 11. 可类比的情形, 18. 伟大的类比, 19. 明确的类比, 20. 几位数学家的名句摘录, 21. 猜想 E, 44. 对猜想的一个疑问和证明的第一步尝试, 45. 证明的第二步尝试, 46. 类比的危险.]	23
第三章 立体几何中的归纳推理	36