



面向 21 世纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

数 学 分 析

简 明 教 程

下 册

邓东皋 尹小玲 编著



高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数学分析简明教程

下 册

邓东皋 尹小玲 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析简明教程 下册 / 邓东皋,尹小玲编著. —北京:高等教育出版社,1999(2001重印)
面向21世纪课程教材
ISBN 7-04-006960-1

I. 数… II. ①邓… ②尹… III. 数学分析-高等学校-教材 IV. 017

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第23129号

数学分析简明教程(下册)
邓东皋 尹小玲 编著

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街55号

邮政编码 100009

电 话 010—64054588

传 真 010—64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16

版 次 1999年6月第1版

印 张 26.25

印 次 2001年4月第3次印刷

字 数 470 000

定 价 23.10元

凡购买高等教育出版社图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

内 容 简 介

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材.教程用“连续量的演算体系及其数学理论”的全新观点统率全书,在保留传统数学分析基本内容的前提下,比较好地处理极限与微积分演算及应用的关系,建立了一个既循序渐进、生动直观,又保持了严密性的系统,与传统的教程十分不同.本教程对概念、方法的来源与实质,有许多独到的、精辟的见解.教程分上、下两册,本书为下册,主要内容包括数项级数、广义积分、函数项级数、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限与连续性、偏导数与全微分、隐函数存在定理、极值与条件极值、含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分、各种积分间的联系与场论初步等.本书是作者集几十年教学与教改经验之力作,在教学改革实践中取得较好的效果.

本书可作为高等学校理科及师范学校数学学科各专业的教科书,也可供计算机学科、力学、物理学科各专业选用及社会读者阅读.

责任编辑 徐 刚
封面设计 张 楠
责任绘图 尹文君
责任校对 徐 刚
责任印制 杨 明

目 录

第十章 数项级数	1
§ 1 级数问题的提出	1
§ 2 数项级数的收敛性及其基本性质	4
§ 3 正项级数	10
§ 4 一般项级数	24
§ 5 无穷级数与代数运算	36
第十一章 广义积分	44
§ 1 无穷限广义积分	44
§ 2 瑕积分	59
第十二章 函数项级数	67
§ 1 函数序列的一致收敛概念	67
§ 2 函数项级数的一致收敛性及其判别法	78
§ 3 和函数的分析性质	88
第十三章 幂级数	94
§ 1 幂级数的收敛半径与收敛区域	94
§ 2 幂级数的性质	99
§ 3 函数的幂级数展开	103
第十四章 傅里叶级数	112
§ 1 三角级数与傅里叶级数	112
§ 2 傅里叶级数的收敛性	119
§ 3 任意区间上的傅里叶级数	141
§ 4 傅里叶级数的平均收敛性	147
第十五章 多元函数的极限与连续性	156
§ 1 平面点集	156
§ 2 多元函数的极限与连续性	165
第十六章 偏导数与全微分	180
§ 1 偏导数与全微分的概念	180
§ 2 复合函数与隐函数微分法	195
§ 3 几何应用	211
§ 4 方向导数	217

§ 5 泰勒公式	221
第十七章 隐函数存在定理	225
§ 1 单个方程的情形	225
§ 2 方程组的情形	231
第十八章 极值与条件极值	241
§ 1 极值与最小二乘法	241
§ 2 条件极值与拉格朗日乘法	250
第十九章 含参变量的积分	260
§ 1 含参变量的正常积分	260
§ 2 含参变量的广义积分	271
§ 3 欧拉积分	284
第二十章 重积分	292
§ 1 重积分的概念	292
§ 2 重积分化累次积分	300
§ 3 重积分的变量代换	314
§ 4 曲面面积	333
§ 5 重积分的物理应用	339
第二十一章 曲线积分与曲面积分	346
§ 1 第一型曲线积分与曲面积分	346
§ 2 第二型曲线积分与曲面积分	358
第二十二章 各种积分间的联系与场论初步	379
§ 1 各种积分间的联系	379
§ 2 积分与路径无关	395
§ 3 场论初步	404

第十章 数项级数

本章是无穷级数理论的第一章,讲述无穷级数理论的基本概念与基本知识,是无穷级数理论的基础.直观地说,无穷级数就是无穷个数相加,能加出一个数来的级数叫收敛级数,加不出一个数来的级数叫发散级数.因此,收敛与发散是两个最基本的概念.如何判定一个级数收敛或发散是本章的主要内容.无穷级数是无穷项的和,比较有限和与无限和的共同点与差异,是级数理论研究的基本问题,在整个级数理论的学习过程中都应注意到这一点.

§ 1 级数问题的提出

在本教程的上册中,读者学习了一元函数的微积分,但落实下来能计算的,只是初等函数.我们已能计算一切初等函数的微分,也能计算很多初等函数的积分.对非初等函数,我们只接触过分段函数,这只是很少一部分非初等函数.而实际问题中大量存在着的现象,却要用更一般的非初等函数才能描述,这就需要我们提供一个表示非初等函数的工具.依靠这个工具,我们不仅能够计算它的函数值,至少还能计算它的微商与积分,以及研究它的各种性质.无穷多个函数相加,是一种最容易想到的表示函数的工具.例如

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots,$$

$$\text{或} \quad \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} + \cdots.$$

这是用无穷个初等函数相加表示的函数.下面我们再从一个简单的例子,说明这种表示的好处.

有许多实际问题都可化成求解下面的微分方程:

$$xy'' + y' + xy = 0,$$

其中 x 是自变量, y 是未知函数, $y' = \frac{dy}{dx}$. 这是一个二阶变系数的微分方程.用大家过去学过的方法是很难求解的.现在,我们试用待定系数法求这方程的解.

假设它的解是一个待定系数的多项式

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n.$$

经过简单的计算就可知道(留作习题),除了得到所有的系数 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 必须为 0 外,即 $y = 0$ 的显然解外,得不到任何结果.

现在我们设想方程的解不是这样的多项式,而是无限项相加的“无穷级

数”:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 是待定的系数. 结果会是怎样的呢? 我们试着去计算一下.

对 y 进行微分:

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 + \cdots +$$

$$n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots.$$

把它们代入方程

$$\begin{array}{r} xy'' = \quad 2a_2x + \quad 3 \cdot 2a_3x^2 + \quad 4 \cdot 3a_4x^3 + \quad 5 \cdot 4a_5x^4 + \quad \cdots \\ y' = \quad a_1 + 2a_2x + \quad 3a_3x^2 + \quad 4a_4x^3 + \quad 5a_5x^4 + \quad \cdots \\ +) \quad xy = \quad a_0x + \quad a_1x^2 + \quad a_2x^3 + \quad a_3x^4 + \quad \cdots \\ \hline 0 = \quad a_1 + (a_0 + 4a_2)x + (a_1 + 9a_3)x^2 + (a_2 + 16a_4)x^3 + \cdots \end{array}$$

比较系数得到递推公式如下:

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_0 + 4a_2 = 0, \\ a_1 + 9a_3 = 0, \\ a_2 + 16a_4 = 0, \\ \cdots \cdots \\ a_{2k-1} + (2k+1)^2 a_{2k+1} = 0, \\ a_{2k} + (2k+2)^2 a_{2k+2} = 0, \\ \cdots \cdots. \end{cases}$$

由此解得

$$a_1 = 0, a_3 = 0, a_5 = 0, \cdots, a_{2k+1} = 0, \cdots.$$

设 $a_0 = c$ (常数), 则

$$a_2 = -\frac{c}{4}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{16} = \frac{c}{16 \cdot 4}, \cdots,$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{c}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k))^2} = \frac{(-1)^k c}{2^{2k} (k!)^2}, \cdots.$$

结果得到

$$y = c \left[1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^4 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^6 + \cdots + \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} + \cdots \right],$$

这就是方程的一个解. 它不是一个初等函数. 但是, 现在用无穷级数把它表示

出来了. 我们由此就可计算它的函数值, 并研究其性质. 以后我们会知道, 它是一种称为贝塞尔(Bessel, 1784 — 1846) 函数中的一员(0 阶贝塞尔函数). 还有许多类似的函数, 如拉盖尔(Laguerre) 函数、勒让德(Legendre, 1752 — 1833) 函数、高斯(Gauss, 1777 — 1855) 几何函数等等, 它们和初等函数一起, 构成人们描述世界的“函数库”.

对上述的演算过程, 很自然会提出下面的问题:

(1) 无穷多项相加究竟是什么意思? 加得起来吗?

(2) 对这种无穷项相加的“无穷级数”, 它的运算规律与“有限和”有什么异同?

我们在演算中, 没有理会这两个问题, 而把“无穷和”完全看成与“有限和”一样地进行运算(并项、求微分等), 这种运算通常叫做形式运算.

无穷级数的历史, 和微积分的历史一样长, 甚至更长一些. 早期微积分的结果, 很多是依赖无穷级数的形式运算得到的(例如推导 $(x^a)' = ax^{a-1}$). 微积分在应用到力学、天文、物理等方面时, 无穷级数更是常用的工具. 由于当时所解决的问题比较直观, 许多结果可以直接检验, 所以人们一直停留在这种形式运算的水平上, 而不去深究无穷级数的概念与理论. 直到 19 世纪初, 由于应用的深入与广泛, 得到的结果也不是那样直观和容易验证, 同时在形式运算中还出现了许多矛盾, 使得前面提到的两个问题变得尖锐起来了. 形式运算中出现的矛盾, 可以举一个简单的例子说明如下:

无穷项相加所成的无穷级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

如果把它写成

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots,$$

则其和为 0. 如果把它写成

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots,$$

则其和为 1.

一个级数只能有一个“和”, 这就推出了 $0 = 1$ 的荒谬结论. 这个例子表明, “无穷和”与“有限和”有本质的区别. 把“有限和”的运算规律无条件地应用到“无穷和”上去, 有可能导致错误. 这就要求人们去搞清楚无穷级数“和”的概念, 以及在运算规律方面与有限和的异同. 这就是下面要讲述的级数的一般理论的内容.

习 题

1. 证明: 若微分方程 $xy'' + y' + xy = 0$ 有多项式解

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

则必有 $a_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$.

2. 试确定系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$, 使 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 满足勒让德方程

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0.$$

§ 2 数项级数的收敛性及其基本性质

无穷项函数相加, 对每一个固定的 x , 每一项便变成一个数. 因此, 我们从无穷个数相加谈起. 这种级数称为数项级数, 或简称为无穷级数. 下面先给出一个准确的定义.

设有数列

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots,$$

用加号把这一些数依次连接起来所得到的式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数, 简称级数. 上式也记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{或} \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_k,$$

其中 u_1, u_2, \cdots 分别称为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的第一项、第二项、 \cdots 、第 n 项, u_n 称为级数的通项或简称为项.

上面说的级数只是写成无穷个数相加的形式, 但究竟能否加得起来呢? 或者说, 能否加出一个“和数”来呢? 这个“和数”的确切意义又是什么呢?

无穷个数相加, 只能看成有限个数愈加愈多时的极限, 因此我们引入一个新的数列:

$$S_1 = u_1,$$

$$S_2 = u_1 + u_2,$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

.....

或简记为 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. S_n 称为级数的前 n 项部分和或简称为部分和, 数列 $\{S_n\}$ 称为级数的部分和数列.

定义 10.1 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限存在 (设为 S), 则称

级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛, S 称为级数的和, 记作

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S,$$

此时也称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛到 S . 若部分和数列 $\{S_n\}$ 没有极限存在, 则称该级数发散, 此时它没有和.

注意, 根据我们以前的约定, 数列极限存在是指极限为一个数. 因此当部分和数列趋于无穷 ($S_n \rightarrow \infty$) 时, 级数发散.

从定义看出, 研究无穷级数的收敛问题, 化成了研究部分和数列是否有极限存在的问题. 这样, 我们就可以用学过的数列极限的知识来研究无穷级数. 在进入一般讨论之前, 我们先来看几个例子.

例 1 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的收敛性.

解 前 n 项部分和为

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$,

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 其和为 1, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

例 2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 的收敛性.

解 前 n 项部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k] \\ &= \ln(n+1) \rightarrow \infty \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散.

例 3 (几何级数) 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

($a \neq 0$) 的收敛性, 其中 r 为公比.

当 $|r| \neq 1$ 时, 级数的前 n 项部分和为

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = a \frac{1-r^n}{1-r}.$$

当 $|r| < 1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \right) = \frac{a}{1-r}.$$

此时级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1-r}$, 即

$$a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}, \quad (|r| < 1),$$

这是中学学习过的.

当 $|r| > 1$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1-r} = \infty$, 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 级数发散.

当 $r = 1$ 时, $S_n = na \rightarrow \infty$ (当 $n \rightarrow \infty$), 级数发散.

当 $r = -1$ 时, $S_1 = a, S_2 = 0, S_3 = a, S_4 = 0, \cdots$,

当 $a \neq 0$ 时, 极限不存在, 这是因为 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = a$, 两个子数列的极限不相等. 因此级数发散.

特别地, 当 $a = 1$ 时, 级数就是

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.$$

这是 §1 中讨论过的级数, 它发散, 因此没有和. 故说它的和既等于 1 又等于 0 的推理, 前提是不正确的.

综合起来, 对几何级数, 得到的结论是: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 当 $|r| < 1$ 时收敛, 当 $|r| \geq 1$ 时发散.

例 4 在第八章 §1, 我们曾得到公式

$$e = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots + \frac{\theta^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!},$$

其中 $0 < \theta < 1$. 由

$$0 < \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{3}{n+1},$$

知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^\theta}{(n+1)!} = 0$, 故

$$e = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \cdots + \frac{\theta^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}$$

这样就把 e 用一个无穷级数表示出来.

从数列极限的理论, 很容易得到下列关于级数的简单性质.

定理 10.1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, c 为任一常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证明 设 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, 则由假设知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

S 为一有限数. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的前 n 项部分和为 σ_n , 则

$$\begin{aligned} \sigma_n &= cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n \\ &= c(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \rightarrow cS \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛, 且其和为 $cS = c \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

易知, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $c \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也发散.

定理 10.2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

定理 10.2 可用数列极限的运算法则证明, 我们把它留给读者作为一个习题.

定理 10.3 任意改变级数有限项的数值, 不改变级数的收敛性.

证明 设原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 任意改变其有限项的数值后所得之新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. 因改变数值的只有有限项, 故存在 N , 使得当 $n > N$ 后, $u_n = v_n$. 记 $w_n = u_n - v_n$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} w_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) \\ &= (u_1 - v_1) + \cdots + (u_N - v_N) + 0 + 0 + 0 \cdots. \end{aligned}$$

显然这级数是收敛的. 因此, 根据

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n - (u_n - v_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - w_n)$$

与定理 10.2, 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛; 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散. 定理 10.3 证完.

定理 10.3 说明, 考虑一级数是否收敛, 可以不管它前面有限项的数值. 甚至把前面的有限项去掉(即把它们变成 0), 并不改变级数的敛散性.

定理 10.4(收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则一般项 u_n 趋向于 0, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, 其部分和为 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \\ &= S - S = 0.\end{aligned}$$

本定理可以用来判断级数的发散性. 例如级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散, 因为它的一般项 $u_n = (-1)^{n-1}$ 不趋向于 0. 又如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$$

发散, 因为一般项 $\frac{n}{n+1}$ 的极限是 1, 不为 0.

值得指出的是, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 仅仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要条件, 而不是充分条件. 换句话说, 从 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 不能断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛. 例如前面例 2 中的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

我们知道它是发散的, 但它的一般项趋向于 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

现在来看级数和数列的关系. 根据定义, 看一个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否收敛, 就看它的部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ 是否有极限. 这就把级数的问题完全化归数列来研究. 反过来, 任意给定一个数列 $\{S_n\}$, 我们也可以作出一个级数, 它的部分和数列恰恰就是 $\{S_n\}$. 实际上只要取

$$\begin{aligned}u_1 &= S_1, u_2 = S_2 - S_1, u_3 = S_3 - S_2, \cdots \\ u_n &= S_n - S_{n-1}, \cdots\end{aligned}$$

则级数

$$\begin{aligned}& S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) + \cdots \\ &= S_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (S_n - S_{n-1})\end{aligned}$$

的部分和数列就是 $\{S_n\}$, 这样, 也就把数列极限的问题化归级数来研究.

这样, 读者很自然会问, 既然两者等价, 为什么还要研究级数? 事实上, 在级数理论中, 我们看它有没有极限的这个数列 (部分和数列 $\{S_n\}$), 是有特殊构造的. 它是由一项一项加起来的. 因此, “项” 应该是级数理论的着眼点. 如果一个定理, 条件是加在部分和的, 那它是一个数列的定理. 而当定理的条件落实到项时 (例如前面的定理 10.4: 若级数的一般项不趋向于 0, 则级数发散), 就是一个级数的定理. 故我们后面研究的思路是: 从过去学过的数列极限理论出发, 从级数的部分和入手, 最后落实到项. 以后我们将会看到, 一些级数的项是十分简单的, 例如一般项为 $a_n x^n$ 或 $a_n \cos nx + b_n \sin nx$, 但它们加起来所表示的函数却可以极其复杂, 这就是级数的威力所在.

习 题

1. 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nx, \quad |r| < 1;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx, \quad |r| < 1.$$

2. 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2n+1};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}.$$

3. 证明定理 10.2.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 各项是正的, 把级数的项经过组合而得到新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$, 即 $U_{n+1} = u_{k_n+1} + u_{k_n+2} + \cdots + u_{k_{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, 其中 $k_0 = 0, k_0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ 收敛, 证明原来的级数也收敛.

§3 正项级数

“由简到繁”是研究问题的原则, 因此我们先从最简单的级数着手. 最简单的级数就是本节要讨论的正项级数.

定义 10.2 若级数的每一项都是非负的, 则称此级数为正项级数.

定理 10.5 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

证明 必要性. 按定义, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 部分和数列有极限存在, 因此必有上界.

充分性. 由 $u_n \geq 0$, 知部分和数列 $\{S_n\}$ 单调上升, 它有上界则必有极限存在, 因此级数收敛.

例 1 证明“ p 级数”

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

证明 先证明 $p = 1$ 时级数发散. 由定理 10.5, 只需证明部分和数列无上界. 对任意正整数 $n (\geq 2)$, 都有正整数 k , 使 $2^k \leq n < 2^{k+1}$. 这时把部分和的项从第二项起依次按 $1, 2, 4, 8, \cdots, 2^{k-1}$ 项组合起来, 使得

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \\ &\quad \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}+2^{k-1}} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \end{aligned}$$