



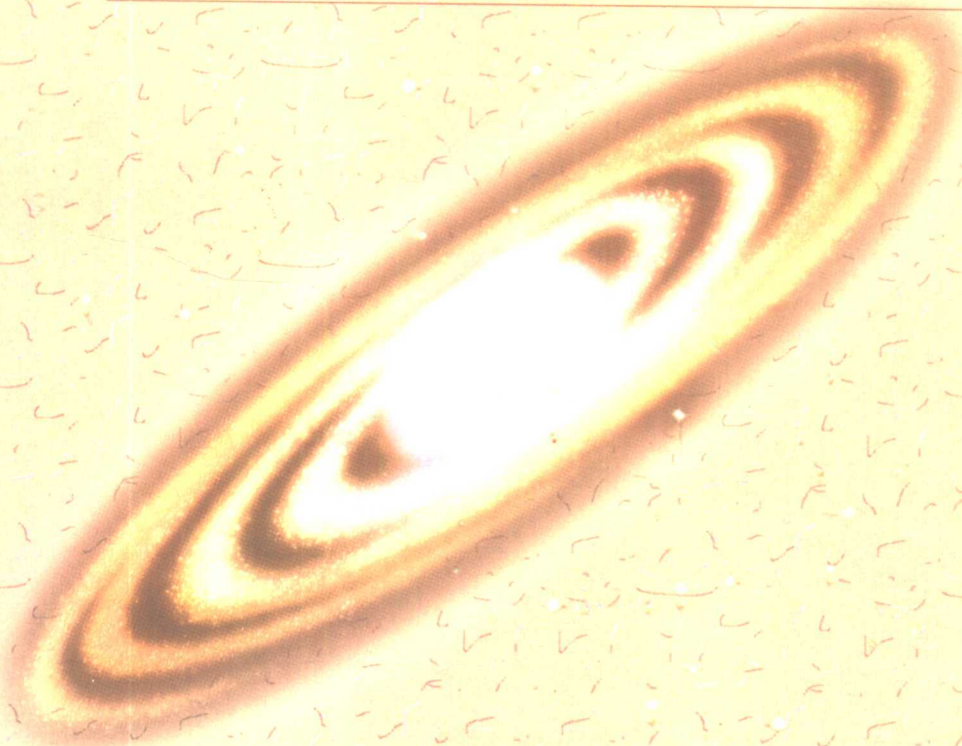
面向21世纪课程教材

基 / 础 / 物 / 理 / 教 / 程

R E X U E

热 学

王楚 李椿 徐安士 编



北京大学出版社

PEKING
UNIVERSITY
PRESS

图书在版编目(CIP)数据

热学/王楚,李椿,徐安士编. —北京:北京大学出版社,2000
基础物理教程:面向 21 世纪课程教材
ISBN 7-301-04585-9

I. 热… II. ①王… ②李… ③徐… III. 热学-高等学校-教材
IV. O551

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 81477 号

书 名: 热学

著作责任者: 王 楚 李 椿 徐安士

责任编辑: 李采华

标准书号: ISBN 7-301-04585-9/O · 472

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 编辑室 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

排 版 者: 北京因温特有限公司

印 刷 者: 北京大学印刷厂印刷

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787×1092 18 开本 9 印张 174 千字

2000 年 12 月第一版 2000 年 12 月第一次印刷

印 数: 0001—3000 册

定 价: 15.00 元

内 容 提 要

本书是《基础物理教程》丛书的第四卷,该教材丛书为教育部批准的面向 21 世纪课程教材。

本书着重阐述了宏观热现象(物质的基本状态和相变)的基本规律,讨论了经典的统计物理的基本概念与有关的应用技术.在内容的选择上,本书以传统的“热学”为主,但注意引进现代物理知识和物理进展.本书有 5 篇附录和大量思考题,读者可以从中了解相关的背景知识,体会到联系实际、思索问题、解决问题的乐趣.本书的第一章和第四章,分别介绍了随机现象与概率以及连续随机变量与概率密度的有关概念,给出了必要的数学知识,也为后续课程《光学》和《原子物理》作了准备.

本书可作为综合大学理工科的基础物理教材,也可作为其他高等院校和中学物理教师的教学或自学参考读物.

《基础物理教程》总序

物理学是其他各自然学科和技术学科的基础,在过去几十年中物理学日益成为新技术的一个重要的支柱,因而《基础物理》已成为大学理、工、农、医各专业重要的基础课,而且各国的高等学校都为改进物理教学作了长期的探索.新技术的飞速发展,要求学生较全面地掌握物理学的基本知识,并在思维方法方面得到锻炼,从而能适应他们一生在事业中将遇到的不断变化和发展的情况.然而,要把近代物理学的成就和应用,组织成基础课的教学体系,并不单纯是材料的取舍和拼接,而是一个知识再加工的研究课题,需要经过长期持之以恒的研究和实践,才可能逐步有所改进.课程改革是一个永无止境的难题.

在写这套书时,我们着重考虑了以下三个问题:

1. 按基本原理组织内容,适当调整某些素材的区划范围

对于教学改革的一个共识是如何精选内容,使教材不至过分庞杂.经过考虑,我们认为宜以物理学的基本概念与基本规律为主题,并应联系现代的应用实例.由于物理学的基本规律具有普遍性,所以在论述上和素材的选取上与传统的区划范围可以有所不同.例如,在力学中可以涉及洛伦兹力;在分子运动论中可以讨论带电粒子的随机运动.这样做有助于阐明基本规律的意义,并使线索更加明晰.

2. 注重论述的科学性并加强思维能力训练

对于物理课程改革的另一个共识,就是应提高学生的理解能力和理论联系实际的能力.这是又一个难题.我们认为在过去的教材中,某些命题的论述欠深入;对实际应用的介绍未能着重于体现基本原理,而是较多地描述具体的技术过程;习题偏重于“代公式型”或“技巧型”.这些急于求成的做法,往往使学生不自觉地养成注重记忆结论、但是忽视理解和思考的习惯.在这套书中,我们力图使论述比较深入,体现物理学的思辨,用基本原理来概括各种可能的应用.我们认为习题是课程教学的一个重要环节,习题能引导学生运用基本原理分析和解决实际问题.这套书中除习题外,每一章还编入能引导学生深入思考的思考题.

习题和思考题数量较多,不可能要求学生全做.有些习题涉及较深入的课题,可作为课堂讨论或课外研究的命题.学生即使不做,只要看一遍

并略加思索,作为自我检查的“镜子”也是有益的。

3. 《基础物理》是供学生反复阅读的书

物理课的教学环节,包括讲授、实验、自习、习题、复习考试等。许多教学组织者,常希望教师能把学生“讲明白”,但往往是事与愿违。困难在于任何课程和教材,都只能按“直线式”的顺序来安排内容。但在一门课中介绍的概念或规律,又必须综合其他课程的内容才能理解。真正的理解和消化有赖于学生的反复钻研。我们不希望这套书,是一套学生在考试后可永不再翻阅的书。因此,书中的材料可能比授课时的教学要求高一些,有些论点也比教学基本要求深入一些。总之,对大学的主要课程,学生不能只学教师的讲稿内容,也不宜只看一本教材。学生应通过对几本教材的比较,通过自己的研究,才能做到逐步消化和理解。

本书是参照理工科大学的教学基本要求编写的,但又不局限于此。希望对学生的钻研和进取,有一定的引导作用。为了便于使用,本书将有关内容分为若干层次。打“*”号的章节可有选择地讲授或不讲;有些为扩展知识面的或常识性的材料则写在附录中。

《基础物理教程》包括《力学》、《电磁学》、《光学》、《热学》、《原子物理》五本书。本书所需的数学知识是矢量代数、空间解析几何及简单的微积分运算,这些都是中学毕业生可以掌握的知识。鉴于当前一些中学的教学受“应试教育”的影响,不少中学生未能系统地掌握应具备的知识,尤其缺乏思辨能力和通过自学进取的意识。为弥补中学生数学知识的不足,作者还编写了《基础物理中的数学方法》,这本书可作为大学一年级学生的参考书。

《基础物理教程》是作者长期从事教学研究和实践的总结,也是一次教学改革的大胆试验。作者欢迎广大教师和读者提出自己的见解、指出本书的缺点和错误,以期进一步改进。

王 楚

序

《热学》是理工科大学学生的一门基础课,它可以包含非常广泛的内容.本书是为学分较少的《热学》课程编写的一本参考书,因而不可能面面俱到.依据对理工科大学学生的基本教学要求,本书只是扼要地介绍宏观热现象(物质的基本状态与相变),着重讨论经典的统计物理的基本概念与有关的应用技术.在用本书作教材时,教师可依据各校的要求授课,不必全讲,也不必局限于本书讨论的命题与材料.

本书的一个目的,就是希望学生对物体中分子(粒子)的随机运动,有初步的理解,并能与宏观物理现象联系起来.为达这一目的,应要求学生掌握概率论的入门知识.由于许多中学在数学教学中,已删除了关于概率的教学,本书在第一章介绍关于随机现象与概率的基本概念.这一章是准备知识,也可以只作为自学资料用.在第四章,又扼要地介绍连续随机变量与概率密度的概念.作者认为掌握必要的数学知识,并能与物理现象联系,不仅是为《热学》作准备,也是为《光学》和《原子物理》作准备.

《热学》的基本规律是具有普遍意义的基本规律,对不同的技术科学均有实际意义.本书不可能讨论关于《热学》的各种命题,只是结合介绍热学的基本规律,侧重于讨论载流子的运动、电噪声、pn结的形成等与带电粒子的随机运动有关的问题.其目的只是说明《热学》的普遍意义.教师在授课时,也可以讨论其他命题,本书的有关章节可以只作为阅读资料.

本书是以北京大学电子学系近十年用的讲义为基础,经过几次修改写成的.周乐柱教授为本书的出版作了大量工作.奚中和教授和张肇祥教授长期从事《热学》教学,本书吸取了他们的经验.在写作的过程中,南开大学常树人教授提供了她的论文,作者特在此致谢.

王 楚

目 录

第一章 随机事件与概率	(1)
§ 1.1 概率的基本性质	(1)
1.1.1 概率的统计意义	(1)
1.1.2 概率的基本性质	(2)
1.1.3 概率的古典定义	(3)
§ 1.2 事件组的概率	(5)
1.2.1 相关事件的概率	(5)
1.2.2 独立试验序列问题	(7)
§ 1.3 宏观物理量的统计意义	(8)
1.3.1 统计平均值(期望值)	(8)
1.3.2 相对于统计平均值的涨落	(9)
*1.3.3 几条运算规则	(11)
思考题	(11)
习 题	(12)
第二章 物体的三种基本状态	(13)
§ 2.1 物体的状态	(13)
2.1.1 物质的聚集态	(13)
2.1.2 相	(14)
2.1.3 平衡态与温度	(14)
2.1.4 阿伏伽德罗常量与宏观物理量	(16)
§ 2.2 气体中的分子运动	(17)
2.2.1 理想气体的状态方程	(17)
2.2.2 理想气体的动能	(18)
§ 2.3 热力学第一定律	(20)
2.3.1 焦耳实验与热力学第一定律	(20)
2.3.2 气体的摩尔热容量	(22)
2.3.3 气体的内能	(24)
§ 2.4 晶体	(26)
2.4.1 晶体的结构	(26)

2.4.2 晶体中粒子的结合力	(29)
2.4.3 晶体的摩尔热容量	(30)
2.4.4 晶体的表面层	(32)
§ 2.5 液体	(34)
2.5.1 液体中的分子运动	(34)
* 2.5.2 液晶	(35)
2.5.3 液体的表面层	(37)
* 2.5.4 液体与固体在界面上的相互作用	(40)
思考题	(43)
习 题	(44)
第三章 相变	(47)
§ 3.1 相变	(47)
3.1.1 升华与凝华	(47)
3.1.2 熔解与凝固	(49)
3.1.3 汽化与凝结	(51)
3.1.4 三相点	(54)
* § 3.2 范德瓦耳斯方程	(54)
3.2.1 等温相变	(54)
3.2.2 范德瓦耳斯方程	(56)
* § 3.3 同素异晶相变	(57)
3.3.1 同素异晶相变	(57)
3.3.2 形状记忆金属	(58)
附录 A 温标	(60)
附表 IPTS-68[75]和 EPT-76 的定义固定点和 部分第二类参考点	(63)
思考题	(64)
习 题	(64)
第四章 似独立粒子系的统计分布	(66)
§ 4.1 连续随机变量的概率密度	(66)
4.1.1 概率密度	(66)
4.1.2 例——粒子的自由程	(67)
4.1.3 多元随机变量的概率密度	(70)
§ 4.2 麦克斯韦分布律	(71)
4.2.1 理想气体分子的速度分布律	(71)

4.2.2 理想气体分子的速率分布律	(73)
* 4.2.3 理想气体的压强	(75)
§ 4.3 玻尔兹曼分布律	(76)
4.3.1 玻尔兹曼分布律简介	(76)
4.3.2 重力场中微粒按高度分布	(77)
4.3.3 麦克斯韦-玻尔兹曼统计理论的实验验证	(78)
§ 4.4 涨落现象	(80)
4.4.1 气体分子数密度的涨落	(80)
4.4.2 布朗运动	(82)
4.4.3 电路中的热噪声	(84)
附录 B 误差函数	(86)
附录 C 正态分布(高斯分布)	(87)
思考题	(88)
习 题	(89)
第五章 输运过程——非平衡过程	(92)
§ 5.1 引言	(92)
5.1.1 非平衡过程的分析方法	(92)
5.1.2 碰撞与平均自由程	(93)
* 5.1.3 一维输运过程的分析方法	(95)
§ 5.2 气体的输运过程	(96)
5.2.1 扩散——质量迁移	(96)
5.2.2 粘滞现象——动量迁移	(98)
5.2.3 热传导——能量迁移	(100)
§ 5.3 金属中自由电子的输运	(104)
5.3.1 导体与非导体的能带模型	(104)
5.3.2 热电子发射与散粒噪声	(106)
5.3.3 珀尔帖效应——接触电势差	(108)
5.3.4 温差电效应	(111)
§ 5.4 半导体中载流子的输运	(113)
5.4.1 半导体材料中的载流子	(113)
5.4.2 pn 结与金属-半导体结	(115)
* 5.4.3 半导体热电偶与光电池	(118)
附录 D 关于非平衡过程的分析方法的说明	(119)
附录 E 热管	(121)
思考题	(121)

习 题	(123)
第六章 热力学第二定律与第三定律	(125)
§ 6.1 引言	(125)
6.1.1 热力学与统计物理	(125)
6.1.2 热力学过程的可逆性	(126)
6.1.3 等温过程与绝热过程	(127)
§ 6.2 热力学第二定律	(129)
6.2.1 热机与致冷机	(129)
6.2.2 卡诺循环	(130)
6.2.3 热力学第二定律	(132)
§ 6.3 熵增加原理	(134)
6.3.1 克劳修斯熵公式	(134)
6.3.2 熵是态函数	(135)
6.3.3 熵增加原理	(137)
* 6.3.4 熵的函数式	(138)
* 6.3.5 统计物理的熵增加原理	(139)
* § 6.4 麦克斯韦-玻尔兹曼统计法	(141)
6.4.1 似独立粒子系的热力学概率	(141)
6.4.2 最概然分布	(142)
* § 6.5 热力学第三定律	(143)
附录 F 汽油机与压缩式致冷机	(145)
附录 G 绝对热力学温标	(147)
思考题	(148)
习 题	(149)

第一章 随机事件与概率

物体中的分子运动是随机运动,它遵循统计规律.这种运动形态体现了微观运动的一个重要属性.本课程通过分子的运动及其相互作用,介绍微观物理的入门知识,以及微观现象与宏观现象之间的关系.为使读者能理解分子运动的特点及其描述方法,本章介绍“概率”的基本概念与运算规则,作为本课程的准备知识.

在学习本章以前,最好先复习中学数学中关于“排列组合”的部分.如有可能,还应复习关于“集合”的基本概念.

§ 1.1 概率的基本性质

1.1.1 概率的统计意义

物理学中有两类不同的事件.众所周知,若已知一物体的质量、初速度和所受的外力,必能依据运动定律精确地确定其运动情况.这类事件叫做必然事件.力学、电磁学等讨论的都是必然事件的规律.

然而,自然界的过程是复杂的,存在诸多事先无法预计的情况.例如在室内以一定的速度抛出一个羽毛球,它会有确定的落地点吗?按抛体运动的公式计算,应能精确地确定它唯一的落地点.但实际情况并非如此,在羽毛球运行的过程中,气流的强度和方向都是无法预测的,因而在球落地以前落点是无法确定的.即使在同一位置,以相同的初始条件反复抛球,每次的落点也不会精确地重复.这类事件叫做随机事件.

随机事件也是有规律的事件,但描述的方法有所不同.以上述抛球事件为例,经过多次抛球之后,人们可以说不可能落到抛射的反方向,还可以说落在某一区域的可能性大.事实上,人们已经常用“可能性”来描述随机事件的发生.不仅如此,人们已用数值来度量可能性.例如,说某射击运动员命中飞碟有“九成把握”或“90%的命中率”,也就是说命中的可能性为0.9.在使用这样的语言时,人们或许没有认真思考过,但至少是经过长期观察后的直觉.如果教练员说“命中率为90%”,则是根据多次训练的记录算出来的.

概率是对“可能性”的定量表述.若一随机事件可能有 r 种互不相容的结果,在 n 次独立试验中,第 i 种结果出现 n_i 次.比值 n_i/n 反映了这一结果

出现的机会或可能性. 若在试验观测的次数增大时, n_i/n 趋于稳定值 p_i :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n} \longrightarrow p_i \quad (1.1)$$

p_i 就叫做第 i 种结果出现的概率. 概率曾叫或然率或几率.

上面所述的“独立试验”, 是指任一次试验的结果, 对其他各次试验产生何种结果没有任何影响. 以射击飞碟为例, 若前一发不论是否命中, 都不会因心理状态或环境变化影响运动员的下一次射击, 则这种射击就是独立试验; 否则是非独立的.

如上所述, 欲确定一事件的某种结果出现的概率, 要进行无穷多次试验, 这当然是不可能的. 但只要试验次数足够大, n 和 n_i 都是大数则

$$\frac{n_i}{n} \approx p_i \quad (1.2)$$

而且 n 和 n_i 越大, 上式也越准确. 在上面所述的例子中, 如果教练员记录每次练习的成绩, 根据长期的记录, 得出命中率为 90%, 就是该运动员每次射击命中的概率近似为 0.9.

如果概率已知, 现再做 n 次试验, 能否事先知道第 i 种结果出现的次数呢? 是否能由式(1.2)得

$$n_i = np_i \quad (1.3)$$

应该说 n_i 只是一种估计, 叫做期望值. 实际情况不一定如此, 人们不能事先准确地预言随机事件的结果. 但只要 n 足够大, 实际的记录就接近于式(1.3)中的 n_i . 若 n 可视为无穷大, 则式(1.3)就有足够的准确性.

上面所说的“可能的结果”, 也包括必然的结果. 若第 i 种结果必然出现, 则每次试验必得这种结果, 即 $n_i = n$, 故必有 $p_i = 1$. 即, 对于必然事件, 其相应的结果出现的概率为 1. 若第 i 种结果不可能出现, 在 n 次试验中 n_i 恒为零, 故必有 $p_i = 0$. 即: 若某种结果的出现是不可能的, 则它出现的概率为零. 从另一方面说, 不可能的结果不出现, 也是一种必然事件.

1.1.2 概率的基本性质

由于 n_i 是某种事件(结果)出现的次数, n_i 为非负数, 则 $0 \leq n_i \leq n$. 按式(1.1)必有

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad (1.4)$$

这是概率的一项基本性质, 它规定了概率的取值范围.

若一事件是若干互不相容的子事件的集合, 该事件就叫做这些子事件之和. 例如在打靶时, 命中 9 环或 10 环是两种互不相容的事件. 若规定

命中 9 环或 10 环皆为“优”，则命中 9 环或 10 环就是事件“优”的子事件，“优”是这两个子事件之和。

若一事件是第 i 种和第 j 种两子事件之和，在 n 次试验中，两子事件出现的次数分别为 n_i 和 n_j ，则两子事件出现的概率分别为

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}, \quad p_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_j}{n}$$

在 n 次试验中无论哪一子事件出现，都属于“和”事件出现，故“和”出现的次数为 $n_i + n_j$ 。根据式(1.1)，“和”出现的概率为

$$p_{i+j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i + n_j}{n} = p_i + p_j \quad (1.5)$$

由上式不难看出：子事件和的概率，等于各子事件的概率之和。这是概率运算的一项基本规则。

在 n 次试验中，各种可能的事件出现次数的总和必等于 n ：

$$\sum_{i=1}^r n_i = n$$

r 种事件的概率和为

$$\sum_{i=1}^r p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^r n_i}{n}$$

所以

$$\sum_{i=1}^r p_i = 1 \quad (1.6)$$

即：全部可能的事件的概率和必等于 1。这是概率的又一基本性质。

上面的命题也可表述为：若把各种可能的事件视为一个集合，则该集合为必然事件，其概率必为 1。以射击问题为例，若把所有的弹着点视为一个集合，该集合可称为“有弹着点”。显然，每次射击必“有弹着点”，这集合是必然事件。

若只研究第 i 种事件，其他各事件之和叫做逆事件，或第 i 种事件“不出现”。根据式(1.6)，若逆事件出现的概率为 q_i ，则必有

$$q_i = 1 - p_i \quad (1.7)$$

例如，若命中 10 环的概率为 0.7，则不命中 10 环的概率为

$$q_i = 1 - 0.7 = 0.3$$

1.1.3 概率的古典定义

上一节介绍了概率的统计意义，但人们实际上不能做到通过无穷多次试验来确定发生某一事件的概率。然而，人们可以依据经验和推理判断

两不同事件发生的可能性是否相等。“等可能性”的事件必以相等的概率发生. 这里说的经验, 是指人们对客观事物作了大量观测得到的结论. 如果一随机事件可划分为多个以等概率出现的子事件之和, 则就可以判断有关的事件发生的概率. 这种方法可表述为: 若一随机事件的全部可能的结果, 是 N 个互不相容的等可能性的子事件之和, 这种子事件叫做基本事件, 每一基本事件发生的概率必为 $1/N$. 若事件 A 是指定的 n_A 个基本事件之和, 则发生 A 事件的概率为

$$P(A) = \frac{n_A}{N} \quad (1.8)$$

这种说法叫做概率的古典定义.

用概率的古典定义研究随机事件, 首先要合理地划分基本事件. 例如

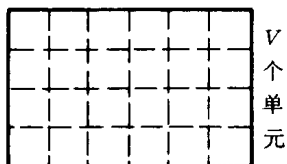


图 1-1 划分容器

在研究容器中低压强气体分子的空间分布时, 可以设想把容器划分为 V 个等体积的宏观单元(图 1-1), 把一个指定的分子出现在一个指定的单元中视为一种基本事件, 则这个分子出现在任一单元中是 V 个基本事件之和. 经过长期的观察, 容器中的气体分子总是趋向均匀

分布的. 人们有理由相信, 一个指定的分子以相等的概率出现在任一单元的概率皆为 $1/V$.

作出这种判断还在于低压强气体的分子密度是很小的, 且分子的体积很小. 不论指定单元中有多少分子, 都不会影响其他分子进入该单元或自该单元逸出, 并认为气体分子之间及分子与器壁之间, 除完全弹性碰撞之外没有其他相互作用. 气体分子因碰撞而作随机运动. 一个指定的分子可以出现在任何一个单元中, 任何一个单元对这个分子都没有特殊性. 因而出现在任何一个单元中的概率为 $1/V$.

可以设想, 若在容器中划出一个包含 V_n 个单元的空间区域(图 1-2), 按概率的古典定义一个指定的分子出现在该区域中的概率为

$$P(V_n) = \frac{V_n}{V}$$

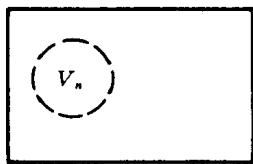


图 1-2 容器中的一个空间区域

上述的气体模型实际上就是理想气体模型. 实验证明, 低压强气体的分子运动状态, 很接近于由理想的独立分子(粒子)组成的、理想气体的运动状态.

例 1 在容器中有 N 个理想气体分子, 设想把容器划分为等容积的两部分

(图 1-3), 求有且仅有 μ 个分子出现在左边的概率.

解 因左、右两边容积相等, 每个分子以等可能性出现在左边或右边, 且不影响其他分子出现在哪一边. N 个分子的分布共有 2^N 种可能的组合. 每个分子对任何一种组合都没有特殊的选择性. 因此, 每一种组合都是等可能性的基本事件. 即: 基本事件的总数为 2^N .



图 1-3 均分的容器

本题讨论“ μ 个分子出现在左边”的情况, 是从 N 个分子中任选 μ 个分子置于左边. 这一事件包含了 C_N^μ 种基本事件:

$$C_N^\mu = \frac{N!}{(N-\mu)!\mu!}$$

根据概率的古典定义, μ 个分子出现在左边的概率为

$$P(\mu) = \frac{N!}{2^N(N-\mu)!\mu!} \quad (1.9)$$

§ 1.2 事件组的概率

1.2.1 相关事件的概率

在一种随机事件相继发生的过程中, A, B 两事件出现的概率, 可以与先发生 A 还是先发生 B 有关. 这种事件叫做相关事件. 若先发生 B 事件的概率为 $P(B)$, 在发生 B 事件后 A 事件可以发生也可以不发生. 在已发生 B 事件后, 再发生 A 事件的概率, 叫做在 B 事件已发生的条件下, A 事件发生的概率, 记为 $P(A|B)$. 可以证明: 出现先发生 B 事件再发生 A 事件这种事件组的概率为

$$P(B, A) = P(B)P(A|B) \quad (1.10a)$$

若先发生事件 A 的概率为 $P(A)$, 在 A 事件发生后发生 B 事件的概率为 $P(B|A)$, 则出现先发生 A 事件再发生 B 事件这种事件组的概率为

$$P(A, B) = P(A)P(B|A) \quad (1.10b)$$

应该注意, 在一个过程中间一个指定的事件出现的概率, 是可能与前面发生什么事件有关的. 这样两个前后发生的事件叫做相关事件. $P(A|B)$ 和 $P(B|A)$ 是在前面已发生事件 B 或 A 的条件下, 再发生事件 A 或 B 的概率, 叫做条件概率. $P(A|B)$ 或 $P(B|A)$ 与上面所说的 $P(A)$ 或 $P(B)$ 常是不同的, 二者之间的差异反映了前后两事件的某种内在联系. 下面举例说明这个概念.

例 2 在暗箱中有触觉不能分辨的红球 4 个和黑球 6 个. 现依次取出两球, 问: 先取出红球、后取出黑球这一事件组出现的概率是多少?

解 因 10 个球都是触觉不可分辨的, 每个球被取出的概率皆相等, 可以认为每一个球是一个基本事件. 现以 R 事件表示红球被取出, B 事件表示黑球被取出.

在第一次取球时, 基本事件总数为 10, 属于 R 事件的基本事件数为 4. 因此, 第一次取得红球的概率为

$$P(R) = 4/10 = 2/5$$

在取出一红球后, 基本事件数改变为 9, 属于 B 事件的基本事件数为 6. 因此, 在取出一红球的条件下, 再取得黑球的概率为

$$P(B|R) = 6/9 = 2/3$$

按照式(1.10)先取得红球后取得黑球这一事件组出现的概率为

$$P(R, B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

这个例题说明, 在取出一球后已改变了基本事件总数. 第一次取出的是红球还是黑球, 又改变了属于 R 和 B 的基本事件数. 因此, 第二次取得红球或黑球的概率, 与第一次取出什么球有关.

当然, 也有另一种过程. 在过程中事件 A 出现的概率与前面是否发生事件 B 无关, 则有

$$P(A|B) = P(A) \quad (1.11a)$$

式(1.10a)变为

$$P(B, A) = P(B)P(A) \quad (1.11b)$$

若在过程中间, B 事件出现的概率, 也与前面是否发生 A 事件无关, 则有

$$P(B|A) = P(B) \quad (1.12a)$$

式(1.10b)变为

$$P(A, B) = P(A)P(B) \quad (1.12b)$$

在过程中, 若一事件发生的概率与前面发生的事件无关, 就叫做独立事件. 式(1.11b)和式(1.12b)是独立事件组成的事件组出现的概率.

例 3 对于例 2 的暗箱, 在取出一球作记录后放回箱中再取一球. 问: 依次取得红球和黑球这一事件组出现的概率是多少?

解 按规定的操作过程, 在每一次取球时, 箱中总有 4 个红球和 6 个黑球, 与上一次取得什么球无关. 无论取得红球还是黑球, 都是独立事件. 按命题所述的条件

$$P(R) = 4/10 = 2/5, \quad P(B) = 6/10 = 3/5$$

“先取得红球后取得黑球”是两独立事件组成的事件组. 出现这一事件的概率为

$$P(R, B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

例 4 若在真空容器中, 平行等距地设置多层栅网(图 1-4), 一个分子垂直地射向栅网. 已知分子在穿过某一层栅网时, 与栅网发生碰撞的概率为常数 p . 求分子能

不经过碰撞而穿过 μ 层栅网的概率.

解 分子与任一层栅网发生碰撞的概率为常数, 与以前不经碰撞而经过多少层栅网无关. 分子在经过第 i 层栅网时, 是否发生碰撞是一种独立的随机事件. 已知与任一层栅网碰撞的概率为 p , 则不经碰撞而穿过栅网的概率为

$$q = 1 - p$$

连续 μ 次不经碰撞而穿过栅网的概率为

$$P(\mu) = \underbrace{q \cdot q \cdots q}_{\mu \uparrow q} = q^\mu = e^{\mu \ln q} \quad (1.13)$$

多层栅网

分子



图 1-4 例 4

1.2.2 独立试验序列问题

“独立试验序列”是一种有普遍意义的物理问题的模型. 下面先通过一个例子, 说明何谓“独立试验序列”.

在图 1-5 中, 粒子(分子、原子)源不断向右发射粒子, 形成射向小孔的粒子束. 每一个粒子能否穿过小孔, 是独立的随机事件, 与其他粒子是否穿过小孔无关. 若源依次射出 n 个粒子, 每个粒子穿过小孔的概率为 p , 求有 μ 个粒子穿过小孔的概率.

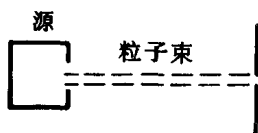


图 1-5 粒子束装置

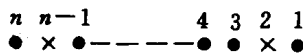


图 1-6 独立试验序列的图示

n 个粒子逐一穿过或不穿过小孔, 组成在一个过程中依次发生 n 次独立事件. 这种过程可以用图 1-6 表示, 图中用“ $\cdot$ ”表示穿过小孔的粒子, 用“ $\times$ ”表示不能穿过小孔的粒子. 每个粒子穿过小孔的概率为 p , 则不能穿过小孔的概率为 q :

$$q = 1 - p$$

有 μ 个粒子穿过小孔, 即在图 1-6 中的 n 个位置上有 μ 个“ $\cdot$ ”和 $(n-\mu)$ 个“ $\times$ ”. 这种事件组可以认为在 n 个位置上, 任选 μ 个规定为“ $\cdot$ ”, 都是满足命题规定的事件组. 因此, “ μ 个粒子穿过小孔”包含 C_n^μ 个事件组. 或者说命题规定的事件, 是 C_n^μ 个事件组之和.

按照事件组的概率计算方法, 出现一种 μ 个粒子穿过小孔的概率为

$$p(\mu) = p \cdot q \cdots p q p$$

不论出现哪一种情况, $P(\mu)$ 总是 μ 个 p 和 $(n-\mu)$ 个 q 之积. 即:

$$P(\mu) = p^\mu q^{(n-\mu)}$$