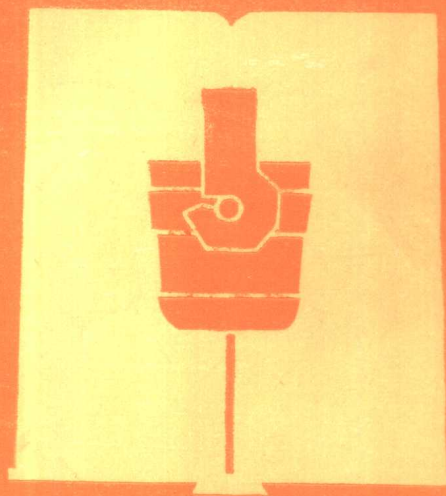


• 高等学校教学用书 •

金属的晶体缺陷 与力学性质

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU



冶金工业出版社

高等学校教学用书

金属的晶体缺陷 与力学性质

东北工学院 赖祖涵 主编

冶金工业出版社

高等学校教学用书
金属的晶体缺陷与力学性质
东北工学院 赖祖涵 主编

冶金工业出版社 出版

(北京北河沿大街嵩祝院北巷39号)

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

787×1092 1/16印张 21 3/4 字数 514 千字

1988年5月第一版 1988年5月第一次印刷

印数00,001~3,000册

ISBN 7-5024-0172-5

TG·22(课) 定价3.60元



序

这本教材是冶金院校金属物理专业试用教材。主要内容是金属材料的力学性质及其微观理论。

按照传统,金属力学性质是指结构敏感的性质,即与材料中晶体缺陷状态有密切关系的力学性质,例如:屈服强度、断裂强度与疲劳强度等等。但是,要讲清结构敏感的力学性质,必须对金属的弹性行为和金属晶体中的缺陷及其理论有一定的了解,尤其是晶体缺陷的系统知识更是必需。讨论缺陷性质以及金属强度和断裂的问题,仍然需要联系到金属的弹性性质。因此,本书内容包含三部分:(一)金属的弹性,(二)金属晶体的缺陷及其理论,(三)金属的力学性质。我国过去已出版的金属物理教材均未系统地介绍弹性性质,我们的教学实践表明有必要对弹性做必要的介绍,这是本书编写不同之处。

本书的理论体系是:由金属的弹性性质开始,经过论述滞弹性和微塑性,进入阐述塑性变形和断裂,包括蠕变和疲劳。在多数章节中讨论了缺陷随形变增加而增多的效应,用一章专门讨论形变后进行退火所发生的回复、再结晶及晶粒长大的现象与规律。由于时数限制,没有编写金属腐蚀的内容。

为了学习方便,各部分均从宏观现象的描述开始,在一定的深度上向各自的微观理论方面展开。这里所指的微观理论绝大部分限于晶格和原子尺度。为了适当地反映新成就,本书编入了物理冶金的一些新内容,或参考新文献改进了对某些问题的处理方法。

教材的对象是学生,如何处理数学模型是一个要加以考虑的问题。多数这类书籍都以叙述现象和物理图像为主,而将繁重的数学推导列于附录,以供学生自读或参考。这大概是唯一可行的方法。本书也采用这种办法,将纯粹数学推导,列于附录。但是,根据编者的经验,在教材中如果定量处理过于简略,或者跳跃过大,教与学均有不便之处,影响效果。因此,在本书中凡是必需弄清和深入理解的部分均力求逻辑完整,推导齐全,使学生可以少花时间寻找其它参考书,教师也能节省时间,指明思路,让学生自读。对于只求一般了解的部分,就不一定做到详细推导。本书在这方面做了初步尝试。

编者认为金属物理的各种课题均是由实际中提炼出来的。只要学生通过教材学习和实验技能训练,学会思考方法以及解决问题的方法,可以在实践中运用所学知识去解决各种问题。为此,本书对于所涉及的各种问题力图引导学生分析并掌握前人的工作,吸取其解决问题的经验。

教材中带星号的内容做为参考阅读的资料,可以不必讲授。

本教材由赖祖涵主编,王继尧编写第1章金属与合金的弹性及第3章单晶体的范性形变基础,孙福成编写第10章晶界与相界,其余各章由赖祖涵编写。

编 者

一九八七年四月

目 录

1	金属与合金的弹性	1
1.1	应力	1
1.2	应变	2
1.3	弹性系数	5
1.4	应力、应变及弹性系数的坐标变换	7
1.5	各向同性介质的弹性系数及一些基本方程	9
1.6	晶体的弹性柔度	11
1.7	金属晶体的压缩率和体积弹性模量	12
★1.8	金属弹性模量的理论模型	13
1.9	固溶体的弹性模量	24
1.10	共价键化合物的 K 和 C_{44}	25
★1.11	超弹性	25
2	金属的滞弹性与内耗	28
2.1	标准线性固体	28
2.2	内耗, 葛氏扭摆法	33
2.3	填隙式固溶体的弛豫型内耗——应力感生有序	35
2.4	置换式固溶体的应力感生有序及内耗	39
2.5	界面内耗	40
2.6	低温位错弛豫型内耗	42
2.7	钉扎位错弦振动产生的内耗	45
2.8	位错内耗的气团模型	46
3	单晶体的范性变形基础	49
3.1	滑移变形与滑移要素	49
3.2	临界切应力定律	51
3.3	滑移切应变	53
3.4	孪生变形	55
3.5	孪生变形的几何学	56
3.6	hcp晶体中的孪晶	58
3.7	形变带与扭折带	59
4	晶体的缺陷	62
4.1	概述	62
4.2	点缺陷的几何形态	63
4.3	空位的形成能	66
4.4	热平衡状态的空位数	74
4.5	空位的移动	76
4.6	空位形成能与空位移动激活能的实验测定	78
5	位错的基本概念	80
5.1	线缺陷——刃型位错与螺型位错	80

5.2	位错的普遍形式	83
5.3	柏氏矢量的一般定义和它的性质	84
5.4	混合位错	86
5.5	单晶体理论切变强度	87
5.6	位错的滑移与宏观应变	88
5.7	棱柱位错的滑移	91
5.8	螺型位错的交滑移	91
5.9	刃型位错的攀移	92
6	位错的弹性性质	96
6.1	Volterra 位错	96
6.2	刃型位错的应力场	98
6.3	螺型位错的应力场	102
6.4	位错的应变能	104
6.5	位错的线张力	106
6.6	应力场对位错的作用力	106
6.7	平行位错之间的相互作用力	108
6.8	位错像力	110
6.9	位错集群的平衡与位错塞积	112
6.10	位错的点阵模型	116
6.11	位错与溶质原子的交互作用	124
附录6-1	验证式 (6-80) 是式 (6-79) 的解	130
附录6-2	求式 (6-84) 的和	131
7	在各种金属晶体中的位错	133
7.1	fcc晶体中的单位位错	133
7.2	fcc和hcp结构的堆垛序和堆垛层错	134
7.3	fcc晶体中的不全位错和扩展位错	135
7.4	fcc晶体扩展位错的宽度	137
7.5	螺型位错的交滑移	138
7.6	Thompson记号	139
7.7	Frank 不全位错	140
7.8	Lomer-Cottrell锁	141
7.9	hcp 结构中的单位位错, 不全位错和层错	142
7.10	bcc结构中的不全位错和层错	145
7.11	bcc结构中的位错塞积	147
7.12	在超点阵中的位错	148
8	位错交割与割阶	150
8.1	位错的交割	150
8.2	含有无割阶的位错的运动	151
8.3	长割阶	153
8.4	fcc晶体中的扩展割阶	154
8.5	fcc晶体中的位错反应	159
9	位错的增殖	161
9.1	位错的均匀生核	161

9.2	在应力集中的地方生成位错	162
9.3	通过不均匀变形产生位错	164
9.4	Frank-Read源	164
9.5	Koehler 和 Orowan 的双交滑移机制	165
9.6	位错通过攀移进行增殖的机制	166
10	晶界与相界	169
10.1	界面的定义与界面的分类	169
10.2	简单晶界模型	172
10.3	小角度晶界位错模型的Frank公式	174
10.4	位错晶界的能量	176
10.5	晶界的运动	178
10.6	大角度晶界	183
11	金属与合金的屈服和流变	193
11.1	拉伸曲线	193
11.2	微塑性(范性)变形	194
11.3	屈服强度和晶粒尺寸的关系——Hall-Petch关系	195
11.4	位错列的长程弹性作用	196
11.5	会合位错再分解的应力	197
11.6	和林位错交割所需的应力	198
11.7	用硬化观点来分析屈服强度	198
11.8	晶界位错源与屈服强度	199
★11.9	流变的位错机制的新发展	200
★11.10	Hall-Petch关系的新理论	203
11.11	低碳钢的明显屈服点现象	204
11.12	明显屈服点现象的理论	206
11.13	用平整法消除低碳钢板的屈服平台	209
11.14	应变时效	211
11.15	溶质原子在刃型位错周围的聚集——应变时效的理论	213
11.16	面心立方结构和六方结构合金的屈服现象	215
12	强化理论	217
12.1	固溶强化-无序固溶体	217
12.2	有序固溶体的强化	220
12.3	Suzuki (铃木) 气团的强化作用	223
12.4	Fleischer的强化理论	225
12.5	有序析出相的强化作用	227
12.6	共格强化	230
12.7	堆垛层错强化机制	231
★12.8	模量强化	231
12.9	相界面积增加产生的强化	232
12.10	局部力与漫散力	232
12.11	钢中碳化物对屈服强度的影响	235
12.12	铌、钒、钛微合金化钢的屈服强度	237

12.13	温度和形变速率对流变应力的影响	238
12.14	在高纯铁中氢和碳的固溶软化作用	240
	附录	241
13	金属晶体的范性形变、加工硬化与织构	243
13.1	单滑移和双滑移	243
13.2	fcc单晶体的加工硬化曲线	244
13.3	六方金属单晶体的形变	245
13.4	bcc结构的形变	245
13.5	单晶体的加工硬化理论	245
13.6	金属在形变中产生的孪晶	252
13.7	扭折带	253
13.8	多晶体的范性形变、硬化与软化	254
13.9	多晶体加工硬化的经验规律	257
13.10	多晶体的加工织构	257
13.11	六角密堆金属的加工织构, 应变比	260
13.12	织构强化	260
13.13	低碳钢板的织构和深冲性能	261
★13.14	薄饼形晶粒与深冲性能	263
13.15	具有难于变形的硬相的合金的加工硬化	264
13.16	动态应变时效——Portevin-Le Chatelier效应	266
13.17	Bauschinger效应	270
14	断裂	272
14.1	金属断裂的基本型式	272
14.2	断口的基本显微形态	272
14.3	理想断裂强度	274
14.4	Griffith理论和断裂韧性	275
14.5	Griffith裂纹的形核机制	277
14.6	韧性-脆性转变温度	280
14.7	铁和钢晶界偏析和脆性断裂	281
14.8	韧性(延性)断裂	283
14.9	断裂应变与夹杂物数量的关系	285
★14.10	断裂韧性与拉伸性能的关系	286
14.11	复合材料的强度	288
15	回复、再结晶与晶粒长大	292
15.1	回复	292
15.2	再结晶	294
15.3	再结晶的动力学	297
15.4	合金元素或杂质对再结晶的影响	299
15.5	晶界迁动的速度	300
15.6	晶粒长大	301
15.7	第二相对再结晶的影响	302
15.8	二次再结晶与晶粒的非正常长大	304

16	蠕变与超塑性流变	306
16.1	蠕变基本现象和规律	306
16.2	瞬态蠕变的耗竭理论	308
16.3	低温蠕变的林位错理论	309
16.4	Andrade型蠕变律的理论	310
16.5	稳态蠕变理论	310
16.6	扩散蠕变	313
16.7	晶界滑移与扩散蠕变	316
16.8	超塑性	318
16.9	合金化和析出相对蠕变的影响	320
16.10	蠕变断裂	321
17	金属的疲劳	323
17.1	金属疲劳的有关概念	323
17.2	平均应力对疲劳寿命的影响	325
17.3	抗张强度对疲劳强度的影响	326
17.4	疲劳硬化和疲劳软化	326
17.5	材料对疲劳的抗力	327
17.6	疲劳裂纹的形成	330
17.7	疲劳裂纹的扩展 (疲劳条纹, Paris定律及疲劳门坎值)	333
17.8	缺口试样的疲劳	335

1 金属与合金的弹性

弹性是金属与合金的一项基本性能,是研究金属与合金力学性能的基础。研究固体材料弹性的宏观规律及微观本质,对于掌握材料的力学行为与物理特性,研制具有优异综合性能的新材料,或者提高材料的质量,均具有实际意义。

研究固体材料的弹性由来以久,早在十七世纪对固体弹性理论就有深入的了解。虎克(Hook)定律揭示了在准静态下应力与应变之间的定量关系,在弹性理论的发展进程中是一个重大的突破,为后来弹性理论的发展与研究奠定了坚实的基础。在我国古代文献中,对于材料的力学行为也有过细腻和精辟地观察与记述。

固体弹性理论的发展演变有两个分支:一是从力学角度,以虎克定律为出发点,运用数学、力学的方法研究弹性行为的宏观规律,至今已经有了极丰富的理论储备及广泛的应用,形成了一门学科——《弹性学》。另一分支是从材料科学的角度,研究固体材料的弹性及其变化规律,联系到材料内部的组织结构,探讨弹性的微观本质。

本章从后一角度出发,围绕工程材料的弹性展开,阐述弹性的宏观规律与微观本质及其描述方法,金属弹性模量的理论模型,最后简介超弹性效应。

1.1 应力

外力作用在物体上不外乎两种方式:一种是直接作用在物体质点上的体积力,其数值与单元体积成正比;另一种是间接作用在物体上的表面力,其值与单元面积成正比,应力即为作用在单位面积上的力。欲研究某一点的应力状态,在 O 点沿 x_1, x_2, x_3 方向取一个微元六面体,每个面上的应力均可分解为应力分量,一点的应力状态由九个应力分量 $\sigma_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 来描述,如图1-1所示。

设立方体外的材料对立方体的作用包括:通过 δA_1 、 δA_2 及 δA_3 面积的正向作用力 δF_{11} 、 δF_{22} 及 δF_{33} ,则正应力分别为

$$\sigma_{11} = \lim_{\delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\delta F_{11}}{\delta A_1}, \quad \sigma_{22} = \lim_{\delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\delta F_{22}}{\delta A_2} \quad \text{及} \quad \sigma_{33} = \lim_{\delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\delta F_{33}}{\delta A_3}$$

通过三个面积元的切向作用力为 δF_{21} 、 δF_{23} 及 δF_{31} ,则切应力为 $\sigma_{21} = \lim_{\delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\delta F_{21}}{\delta A_2}$, $\sigma_{23} = \lim_{\delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\delta F_{23}}{\delta A_2}$ 及 $\sigma_{31} = \lim_{\delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\delta F_{31}}{\delta A_3}$ 。即立方体六个面积元上都有应力。当立方体为无限小时,则描写

O 点应力状态的应力由九个量组成了应力张量,可以写作

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

九个应力分量只有六个是独立的,因为应力张量是二阶对称张量。如图1-2我们取棱柱很小,则作用在 A 面上的力为 $\sigma_{ij} L_1 L_2$,与作用在 A' 面上大小相等方向相反的力形成力偶 $\sigma_{ij} L_1 L_2 L_3$ 。类似的对 σ_{ji} 有力偶 $\sigma_{ji} L_1 L_2 L_3$,两个力偶平衡。则有

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (1-1)$$

设有一个很小的六棱柱，边长如图1-3为 δx_i ，在力的作用下沿 x_1 方向的平衡条件：

$$A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + C_1 + C_2 = 0 \quad (1-2)$$

式中 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 为作用在表面上的力。

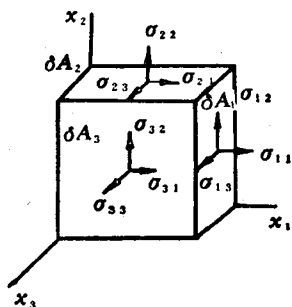


图 1-1 应力分量

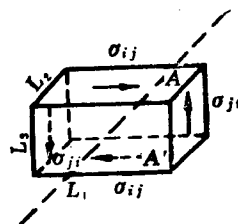


图 1-2 切应力平衡

若作用在 $x_1=0$ 面上法向应力分量为 σ_{11} ，则在 $x_1=\delta x_1$ 的面上的法向应力为

$$\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \delta x_1$$

所以 $A_1 + A_2 = -\sigma_{11} \delta x_2 \delta x_3 + \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \delta x_1 \right) \delta x_2 \delta x_3$

$$= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3$$

同理 $B_1 + B_2$ 、 $C_1 + C_2$ 也有与 $A_1 + A_2$ 类似的表达式。

今将 $A_1 + A_2$ 、 $B_1 + B_2$ 及 $C_1 + C_2$ 代入式(1-2)中，

$$\text{得到} \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad (1-3)$$

一般地写成

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad (1-4)$$

这给出了用应力表达的平衡方程式，注意我们在这里假定了无体积力的存在。

在直角坐标系中，平面应变问题的平衡方程式可以写成

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (1-5)$$

1.2 应变

研究金属与合金的弹性不能离开应力和应变两大要素。引入应变概念的目的在于单值地确定弹性体的微量变形。物体的应变是各个质点不同程度的由一个位置到达另一个位置

引起的。若 x_1, x_2, x_3 表示点的坐标，如图1-4所示物体内的 P 点由于形变而移到 P' 点， $u_i = (u_1, u_2, u_3)$ 表示 P 点的位移。对于所有的点，如果 u_i 均等于常数，则不产生应变。在一维形变问题中，沿轴线方向上点的简单位移若为 $u = ex$ ，其中 x 是沿轴线方向上点的初始坐标，则比例系数 e 就是拉伸应变。对于三维的形变问题， u_i 为点的坐标的函数， $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ ，对于小的变形可以记为

$$\begin{cases} u_1 = e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 \\ u_2 = e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + e_{23}x_3 \\ u_3 = e_{31}x_1 + e_{32}x_2 + e_{33}x_3 \end{cases} \quad (1-6)$$

简写为：

$$u_i = e_{ij}x_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1-7)$$

相同下标表示对它求和。

我们研究一个单元体的变形。变形前，单元体是一个以 dx_1 和 dx_2 为边长的微小矩形 $ABCD$ （如图1-5）。变形后，该单元体位移到新位置 $A'B'C'D'$ 上。其中，质点 A 的

位移为 u_1, u_2 ；质点 B 的位移为 $u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1, u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1$ ；质点 C 的位移为 $u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2, u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2$ ；质点 D 的位移为 $u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}dx_2, u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}dx_2$ 。

可见矩形 $ABCD$ 变形后成为平行四边形 $A'B'C'D'$ 。因此，表示单元体变形的基本量应是二个边的伸长量和二边夹角的改变量。从图1-5可见，边长 AB 的伸长量为

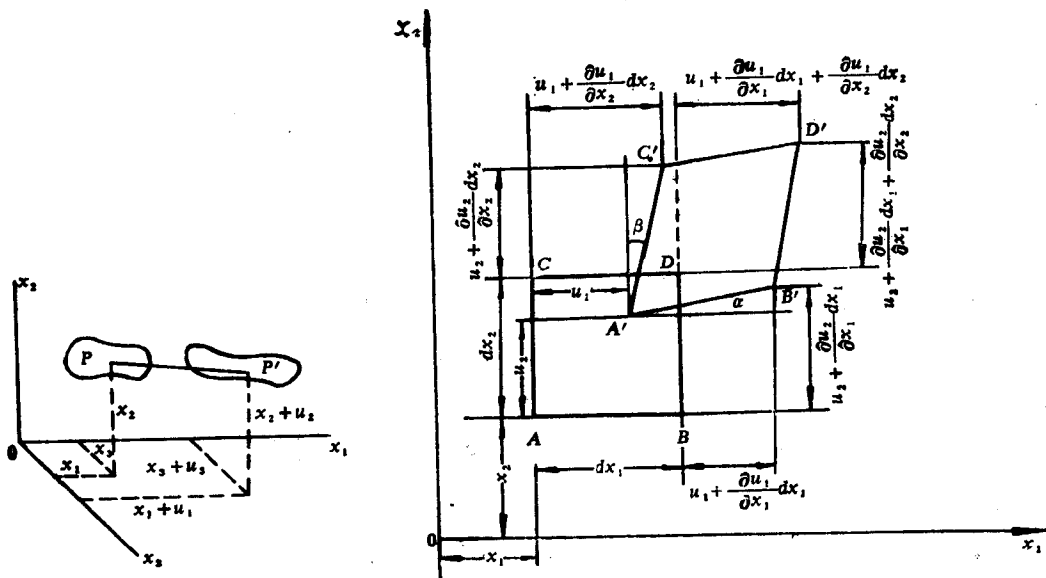


图 1-4 物体中 P 点的位移

图 1-5 矩形 $ABCD$ 变形后角度的变化

$$u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1 - u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1$$

所以体积元的正应变之一 $e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ 。同理, $e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, $e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ 。

e_{11} , e_{22} , e_{33} 代表小立方体边长的正应变, 立方体趋近于一点时, e_{ii} 就是点坐标的函数, 上述立方体变形后除了边长的正应变外, 还有形状的改变, 表现为角度的改变。现在, 我们来分析角度的改变 γ_{ij} 。

从图1-5看出, 边 AB 的微小转角

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 - u_2}{dx_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = e_{21}$$

同理, 边 AC 的微小转角

$$\beta = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = e_{12}$$

所以, 单元体的角应变定义为

$$\gamma_{12} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = e_{21} + e_{12} \quad (1-8)$$

γ_{12} 叫做工程切应变。如果 $e_{12} = e_{21}$, 称为纯切。一般 $e_{12} \neq e_{21}$, 不是纯切, 包括有转动 (见图1-6)。纯切产生形状变化, 而转动则不能。所以我们定义切应变分量如下:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (e_{ij} + e_{ji}) = e_{ji} \quad (1-9)$$

这是对称的应变张量。具体说,

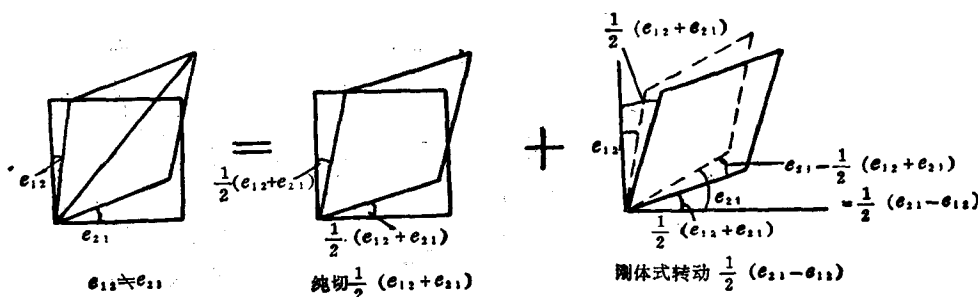


图 1-6 切变的分析

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = e_{11}, \quad e_{22} = e_{22}, \quad e_{33} = e_{33}, \quad e_{ij} \text{ (正应变)} i=j$$

$$\left. \begin{aligned} e_{12} = e_{21} &= \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}) = \frac{1}{2}\gamma_{12} \\ e_{13} = e_{31} &= \frac{1}{2}(e_{13} + e_{31}) = \frac{1}{2}\gamma_{13} \\ e_{23} = e_{32} &= \frac{1}{2}(e_{23} + e_{32}) = \frac{1}{2}\gamma_{23} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &e_{ij} \text{ (切应变)} i \neq j \\ &(\gamma_{ij} \text{ 为工程切应变}) \end{aligned}$$

工程切应变是应变张量相应分量的两倍。弹性体应变能密度的增量是

$$dW = \sigma_{ij} \cdot de_{ij} \quad (1-10)$$

积分一次, 并选取无应力、应变时的应变能为零, 则

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} \quad (1-11)$$

上式中出现 $\frac{1}{2}$ 是因为在弹性变形中, $\int \sigma_{ij} de_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \int de_{ij}$, $\frac{1}{2} \sigma_{ij}$ 代表平均应力。此处宜注意的是在积分符号下的 σ_{ij} 是一个变量, 而积分号外面的 σ_{ij} 则是应力的最后定值。

1.3 弹性系数

前已指出, 弹性固体 σ_{ij} 与 e_{ij} 之间呈线性关系, 广义虎克定律可以表示为:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot e_{kl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (1-12)$$

式中 C_{ijkl} 称为固体的弹性系数。

由 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 及 $e_{ij} = e_{ji}$, 可得:

$$C_{ijkl} = C_{jikh} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (1-13)$$

将式 (1-9)、(1-13) 代入式 (1-12) 中,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} = \frac{1}{2} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + C_{ijlk} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

括号内两项实际相同, 故

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \quad (1-14)$$

假如单位体积发生微小变形 de_{ij} , 应力做功等于应变能增量, 由式 (1-10) 得

$$dW = \sigma_{ij} de_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} de_{ij} \quad (1-15)$$

如果变形是在等温下进行, 而且肯定是可逆的, 则 dW 亦等于 Helmholtz 自由能的增量 dF_H

$$\begin{aligned} dF_H &= dW = C_{ijkl} e_{kl} de_{ij} \\ \frac{\partial^2 F_H}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} &= C_{ijkl} \end{aligned} \quad (1-16)$$

自由能 F_H 是状态函数, 上式中的微分次序无关紧要, 这表明

$$\frac{\partial^2 F_H}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = C_{ijkl} = \frac{\partial^2 F_H}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}} = C_{klij} \quad (1-17)$$

综合式 (1-13) 和式 (1-17), 我们得到

$$C_{ijkl} = C_{jikh} = C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{klij} \quad (1-18)$$

由式 (1-15), 应变能密度函数为:

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{kl} e_{ij} \quad (1-19)$$

通常我们常用矩阵形式写式 (1-12), 即

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} C_{ijkl} \\ \downarrow \\ k \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} e_{kl} \\ \downarrow \\ l \end{matrix} \right\} \quad (1-20)$$

其展开式为:

$$\begin{array}{c} (ij) \\ \downarrow \end{array} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{array}{c} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{31} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{13} \\ e_{21} \end{array} \begin{array}{c} (kl) \\ \downarrow \end{array}$$

由左边的 σ_{ij} 可以看出 (ij) 的次序, 由右边的 e_{kl} 可以看出 (kl) 的次序, 中间的矩阵纵向的列按 (ij) 的次序, 横向的行按 (kl) 的次序。

由式(1-18)所表示的对称性也可以看出 $\sigma_{31}=\sigma_{13}$, $\sigma_{12}=\sigma_{21}$, $\sigma_{23}=\sigma_{32}$ 。把重复除去, 上述的矩阵可以化为 6×6 矩阵。通常采用如下简化的记号:

$$\begin{array}{l} ij \text{ 或 } kl: 11 \quad 22 \quad 33 \quad 23 \quad 31 \quad 12 \quad 32 \quad 13 \quad 21 \\ \text{简化记号: } 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \end{array}$$

这样, $C_{1111}=C_{11}$, $C_{12}=C_{1122}$, $C_{44}=C_{2323}$, $C_{46}=C_{2312} \dots$ 。上面 6×6 矩阵中的元素都采用这种记号以后就可以写成:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

其中注意到式(1-18)的对称关系, $C_{21}=C_{12}$, $C_{41}=C_{14}$ 等等, 还有 $C_{44}=C_{2323}=C_{2332}=C_{47}$ 等等, 因此上面右端出现 γ_{23} , γ_{31} , γ_{12} 。

假如进一步考虑到立方晶体, 这种晶体的对称性可以保证 $C_{1111}=C_{11}$; $C_{1122}=C_{12}$, $i \neq j$; $C_{1123}=C_{44}$, $i \neq j$, 这是因为和晶体立方轴相重合的坐标轴没有区别。此外, σ_{ii} 中有 $C_{111j}e_{ij}$ 的项, $e_{ij}(i \neq j)$ 的符号由正变负不应该改变正应力 σ_{ii} , 这表明 $C_{111j}=0 (i \neq j)$, 因此, 对于立方晶体, $C_{22}=C_{33}=C_{11}$, $C_{13}=C_{1133}=C_{1122}=C_{12}$, $C_{14}=C_{1123}=C_{1112}=0$, $\dots$ 等等。还有 $C_{15}=C_{16}=0$, $\dots$ 。式(1-21)又可以简化为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{21} \end{bmatrix}$$

展开后，得：

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{12}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{33} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{11}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{23} &= 2C_{44}\varepsilon_{23} \\ \sigma_{31} &= 2C_{44}\varepsilon_{31} \\ \sigma_{12} &= 2C_{44}\varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (1-22)$$

到此，我们明确了立方晶体有三个弹性系数 C_{11} ， C_{12} ，和 C_{44} ，其值见表1-1。

立方晶体的对称性高，独立的弹性系数少。对称性低的晶体结构，独立的弹性系数多，见表1-2。

表 1-1 若干金属单晶体的弹性系数(单位: 10^{10}Pa)

晶 体	C_{11}	C_{12}	C_{44}	A	μ	λ	ν
Al	10.82	6.13	2.85	1.21	2.65	5.93	0.347
Ag	12.40	9.34	4.61	3.01	3.38	8.11	0.354
Au	18.60	15.7	4.20	2.9	3.10	14.6	0.412
Cr	35.0	5.78	10.1	0.69	12.10	7.78	0.13
Cu	16.84	12.14	7.54	3.21	5.46	10.06	0.324
Fe	24.2	14.65	11.2	2.36	8.6	12.1	0.291
Ge	12.89	4.83	6.71	1.66	5.64	3.76	0.200
K	0.457	0.374	0.263	6.35	0.174	0.285	0.312
Mo	46	17.6	11.0	0.775	12.3	18.9	0.305
Nb	24.6	13.4	2.87	0.51	3.96	14.5	0.392
Ni	24.65	14.73	12.47	2.52	9.47	11.7	0.276
Pb	4.66	3.92	1.44	3.90	1.01	3.48	0.387
Ta	26.7	16.1	8.25	1.56	7.07	14.9	0.339
Th	7.53	4.89	4.78	3.62	3.40	3.51	0.254
Si	16.57	6.39	7.96	1.74	6.41	4.84	0.215
V	22.8	11.9	4.26	0.78	4.73	12.4	0.352
W	52.1	20.1	16.0	1.00	16.0	20.1	0.278

1.4 应力、应变及弹性系数的坐标变换

我们需要知道当坐标变换时应力与应变如何转换。设一组直角坐标系转变为另一组直角坐标系，两组坐标轴 (x_1, x_2, x_3) 和 (x'_1, x'_2, x'_3) 的原点相合，其间有一个取向角。同一个点在两组坐标系的坐标之间的关系可以用矩阵表示：

$$x'_i = T_{ij}x_j \quad (1-23)$$

表 1-2 不同晶体的弹性系数数目

晶 体 结 构	弹性系数的数目
三斜晶系	21
单斜晶系	13
正交晶系	9
四方晶系	6
六方晶系	5
立方晶系	3
各向同性	2

$\{T\}$ 是一个单位正交矩阵, $T_{il} T_{jl} = \delta_{ij}$, T_{ij} 就是 x'_i 轴与 x_j 轴之间的方向角余弦。 $\{T\}$ 使 x_j 等转变为 x'_i , 其逆矩阵 $\{T^{-1}\}$ 则使 x'_i 等转变为 x_i 。这种逆矩阵的 ij 元素就是正矩阵的 ji 元素, 即 $\{T^{-1}\}_{ji} = \{T\}_{ij}$ 。使用逆矩阵, 可以写出和式(1-23)对应的方程:

$$x_i = T_{ij}^{-1} \cdot x'_j = T_{ji} x'_j \quad (1-24)$$

利用上式中 i, j 对换后微分, 得

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = T_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (1-25)$$

同理,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = T_{ji} \cdot \frac{\partial}{\partial x'_j} \quad (1-26)$$

$$\text{按着应变的定义, } e'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) \quad (1-27)$$

和式(1-23)相似, 位移也可以变换:

$$u'_i = T_{il} u_l \quad (1-28)$$

以式(1-25)、式(1-28)代入式(1-27), 得

$$e'_{ij} = \frac{1}{2} T_{jm} \frac{\partial}{\partial x_m} T_{il} u_l + \frac{1}{2} T_{il} \frac{\partial}{\partial x_l} T_{jm} u_m$$

$$\text{这就是} \quad e'_{ij} = T_{il} T_{jm} e_{lm} \quad (1-29)$$

上式表明用一个单位正交矩阵将 e_{lm} 变为 e'_{ij} 。

和式(1-29)对应的逆转变是

$$e_{ij} = T_{il}^{-1} T_{jm}^{-1} e'_{lm} = T_{li} T_{mj} e'_{lm} \quad (1-30)$$

其次, 看应力和弹性系数的坐标变换。式(1-30)可以写成:

$$e_{mn} = T_{km} T_{ln} e'_{kl} \quad (1-31)$$

而应力变换的规律与应变变换规律相似, 例如和式(1-29)相似,

$$\sigma'_{ij} = T_{ig} T_{jh} \sigma_{gh} \quad (1-32)$$

已知 $\sigma_{gh} = C_{ghmn} e_{mn}$, 因此,

$$\sigma'_{ij} = T_{ig} T_{jh} \sigma_{gh} = T_{ig} T_{jh} C_{ghmn} e_{mn}$$

用式(1-31)代入, 便得:

$$\sigma'_{ij} = T_{ig} T_{jh} C_{ghmn} \cdot T_{km} T_{ln} e'_{kl}$$

但是, $\sigma'_{ij} = C'_{ijkl} e'_{kl}$, 和上式对比即知

$$C'_{ijkl} = T_{ig} T_{jh} C_{ghmn} T_{km} T_{ln} \quad (1-33)$$