从单位圆谈起

华罗庚

科学出版社

从单位圆谈起

华 罗 庚

科 学 出 版 社

1 9 7 7

内 容 简 介

本书叙述了若干数学分支的某些简单而基本的内容。想法比较深入，有一定的启发性，不作复杂的推广，可作为学习和研究的引导。文中绝大部分都是从物理模型中抽象出来的。

读者对象为高等学校数学系师生与数学工作者。

从 单 位 圆 谈 起

华 罗 庚

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

北 京 印 刷 二 厂 印 刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1977 年 2 月第 一 版　　开本：787×1092　1/32

1977 年 2 月第一次印刷　印张：6 1/2

印数：0001—76,200　　字数：146,000

统一书号：13031・521

本社书号：763・13—1

定价： 0.52 元

说　　明

这本讲义是根据华罗庚同志1962年在中国科学技术大学及中山大学的讲稿由我们整理而成的，由于我们水平有限，在整理过程中难免有不妥及错误之处，望读者指正。

吴兹潜　林　伟　龚　升

1975年10月

目　　录

第一讲　调和函数的几何理论 …………………………… 1

第二讲　Fourier 分析与调和函数的展开式 ……………… 35

第三讲　扩充空间与球几何 …………………………… 59

第四讲　Lorentz 群…………………………………… 76

第五讲　球几何的基本定理 ……………………………103

第六讲　非欧几何学 …………………………………129

第七讲　混合型偏微分方程 ……………………………137

第八讲　形式 Fourier 级数与广义函数 ………………177

第一讲　调和函数的几何理论

§1. 旧事重提

在复平面上变形[1)]

$$w=\frac{z-a}{1-\bar{a}z},\quad |a|<1 \tag{1}$$

及

$$w=e^{i\theta}z. \tag{2}$$

由 (1) 推得

$$\begin{aligned}1-|w|^2&=1-\frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})}\\&=\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-a\bar{z}|^2}.\end{aligned} \tag{3}$$

因此(1)把单位圆 $|z|=1$ 变为单位圆 $|w|=1$，单位圆内部变为单位圆内部．变形(2)也有此性质．并且(1)把 $z=a$ 变为 $w=0$．

微分 (1) 式得

$$dw=\frac{dz}{1-\bar{a}z}+\frac{(z-a)\bar{a}dz}{(1-\bar{a}z)^2}=\frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2}dz. \tag{4}$$

(3)、(4) 相除，取绝对值的平方得出经过 (1)、(2) 不变的微分型

$$\frac{|dw|^2}{(1-|w|^2)^2}=\frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}. \tag{5}$$

与此微分二次型相对应的有不变的微分算子

---

1) 这儿 $\bar{a}$ 代表 a 的共轭虚数．

$$(1-|w|^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial w\partial\bar{w}}=(1-|z|^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}}. \qquad (6)$$

这就是 Laplace 算子

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial\bar{z}}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}.$$

(1)既然把单位圆变为单位圆,则当 $z=e^{i\tau}(0\leqslant\tau\leqslant 2\pi)$时,$w=e^{i\psi}$,即

$$e^{i\psi}=\frac{e^{i\tau}-a}{1-\bar{a}e^{i\tau}}=\frac{1-ae^{-i\tau}}{1-\bar{a}e^{i\tau}}e^{i\tau}.$$

这代表变形(1)在单位圆圆周上所引起的变化. 而(4)式变为

$$e^{i\psi}d\psi=\frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}e^{i\tau})^2}e^{i\tau}d\tau.$$

两者相除得出

$$d\psi=\frac{1-a\bar{a}}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2}d\tau. \qquad (7)$$

命

$$a=\rho e^{i\theta},\quad \rho<1$$

及

$$P(\rho,\theta-\tau)=\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2}=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\tau)+\rho^2}. \qquad (8)$$

这个函数称为 Poisson 核,因此, Poisson 核是单位圆经(1)变为自己所得出的函数行列式. Poisson 核有以下的特点:

(i) 定正性. 当 $\rho<1$ 时, $P(\rho,\theta-\tau)>0$.

(ii) $\lim\limits_{\rho\to 1}P(\rho,\theta-\tau)=\begin{cases}0, & 若\quad \theta\neq\tau,\\ \infty, & 若\quad \theta=\tau.\end{cases}$

(iii) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}P(\rho,\theta-\tau)d\tau=1.$

这结果也是显然的,其理由是,由(7)得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(\rho,\theta-\tau)d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\psi=1.$$

性质(ii)与(iii)合并称为"δ函数的性质".

(iv) 当 $\rho<1$ 时，它适合于 Laplace 方程（极座标形式）

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0. \tag{9}$$

要证明这一点也是十分容易的，因为

$$P(\rho,\theta-\tau)=1+\frac{\rho e^{i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{i(\theta-\tau)}}+\frac{\rho e^{-i(\theta-\tau)}}{1-\rho e^{-i(\theta-\tau)}}$$
$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta-\tau),$$

而 $\rho^n\cos n(\theta-\tau)$ 显然适合于(9)，因而 $P(\rho,\theta-\tau)$ 也适合于(9).

解单位圆的 Dirichlet 问题.

给一个以 2π 为周期的连续函数 $\varphi(\theta)$，求一函数 $u(\rho e^{i\theta})$ 在圆内适合于 Laplace 方程[1]，且

$$\lim_{\rho\to 1}u(\rho e^{i\theta})=\varphi(\theta). \tag{10}$$

这就是有名的 Dirichlet 问题.

我们分以下几个步骤来解决这一问题：

(1) 先证"均值公式"：如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 在圆内有二阶连续偏微商，而且适合 Laplace 方程(9)，在圆内及圆周上连续，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta=u(0),\quad 0\leqslant\rho\leqslant 1. \tag{11}$$

证法是：由 Laplace 方程知

$$\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho e^{i\theta})d\theta\right)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}u(\rho e^{i\theta})d\theta$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}u(\rho e^{i\theta})\Big|_0^{2\pi}=0.$$

求积分得

---

1) 适合 Laplace 方程的函数称为调和函数.

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta}) d\theta = k.$$

当 $\rho = 0$ 时，可见 $k = 0$. 再积分，得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\theta}) d\theta = c,$$

是一与 ρ 无关的常数，再取 $\rho = 0$，得 (11) 式.

(2) 依 (1) 换变数，命

$$v(z) = u(w),$$

则

$$v(e^{i\tau}) = u(e^{i\phi}), \quad v(a) = u(0).$$

(11) 式变为 ($\rho = 1$)

$$v(a) = u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\phi}) d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{i\tau}) \frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a} e^{i\tau}|^2} d\tau.$$

命 $a = \rho e^{i\theta}$ 及换符号则得 Poisson 公式

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\tau}) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \tau) + \rho^2} d\tau. \quad (12)$$

换言之，如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 是一个调和函数，则有以上的公式.

(3) 最大 (最小) 值原理. 一个单位圆内的调和函数，如果不是常数，则一定在圆周上取最大(最小)值.

如果 $u(\rho e^{i\theta})$ 最大，由 (12) 可知

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\tau}) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\theta - \tau) + \rho^2} d\tau$$

$$\leqslant u(\rho e^{i\theta}) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \rho^2) d\tau}{1 - 2\rho \cos(\theta - \tau) + \rho^2} = u(\rho e^{i\theta})$$

并且仅当 u 是常数时取等号，不然，总有一段弧，其中 $u(e^{i\tau}) < u(\rho e^{i\theta})$，因而上式取不等号.

同样最小值也在圆周上取.

（4）Dirichlet，问题解答的唯一性.

如果有两个解 $u(\rho e^{i\theta})$，$v(\rho e^{i\theta})$ 适合于（10），则

$$w(\rho e^{i\theta}) = u(\rho e^{i\theta}) - v(\rho e^{i\theta})$$

也是调和函数，在圆周上这函数等于0，即 $w(e^{i\theta}) = 0$. 由（3）可知在闭圆 $|z| \leqslant 1$ 上，$w(\rho e^{i\theta})$ 的最大值 $\leqslant 0$，最小值 $\geqslant 0$，因而 $w \equiv 0$. 因而解答是唯一的.

（5）解答的存在性.

考虑 Poisson 积分

$$u(\rho e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau)\varphi(\tau)d\tau. \tag{13}$$

这函数有以下的一些性质：首先由性质（iv）可知 $u(\rho e^{i\theta})$ 在圆内适合 Laplace 方程，其次由"δ 函数"性质可以证明（10）式. 由性质（iii）

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau)\varphi(\theta)d\tau.$$

因为 $\varphi(\theta)$ 是连续函数，给了 ε，存在 δ 使 $|\theta - \tau| < \delta$ 时，

$$|\varphi(\theta) - \varphi(\tau)| < \varepsilon. \tag{14}$$

把积分

$$u(\rho e^{i\theta}) - \varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho, \theta - \tau)(\varphi(\tau) - \varphi(\theta))d\tau$$

分为两部分，由（14）可知

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|<\delta} P(\rho,\theta - \tau)(\varphi(\tau) - \varphi(\theta))d\tau\right|$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho,\theta - \tau)d\tau = \varepsilon.$$

另一方面，当 $|\theta - \tau| \geqslant \delta$ 时，可以取 ρ 充分接近于 1 使

$$P(\rho, \theta - \tau) < \varepsilon/2M,$$

这儿 M 是 $|\varphi(\tau)|$ 的上界. 于是

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|\theta-\tau|\geqslant\delta}P(\rho,\theta-\tau)(\varphi(\tau)-\varphi(\theta))d\tau\right|<2M\cdot$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon}{2M}d\tau=\varepsilon.$$

合并之，得出当 ρ 充分接近于 1 时，

$$|u(\rho e^{i\theta})-\varphi(\theta)|<2\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\rho\to 1}u(\rho e^{i\theta})=\varphi(\theta).$$

因而公式 (13) 解决了单位圆的 Dirichlet 问题的存在性部分.

§2. 实数形式

为了看出推广的可能性，先看 §1 的结果的实数形式，先看变形 (1.1) 的实数形式：

$$w=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}=\frac{(z-a)(1-a\bar{z})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})}=\frac{z-a-az\bar{z}+a^2\bar{z}}{1-\bar{a}z-a\bar{z}+a\bar{a}z\bar{z}}.$$

把复数 v 写成为 $\xi+i\eta$，而以 v^* 代表矢量 (ξ,η)，显然有

$$a\bar{b}+\bar{a}b=2a^*b^{*\prime}.$$

又由于

$$a^2\bar{z}=(b^2-c^2+2bci)(x-iy),\quad (a=b+ic)$$

所以

$$\begin{aligned}(a^2\bar{z})^*&=[(b^2-c^2)x+2bcy,\ 2bcx-(b^2-c^2)y]\\&=(x,y)\begin{pmatrix}b^2-c^2, & 2bc\\ 2bc, & -b^2+c^2\end{pmatrix}\\&=(x,y)[2(b,c)'(b,c)-(b,c)(b,c)'I]\\&=z^*(2a^{*\prime}a^*-a^*a^{*\prime}I),\end{aligned}$$

这儿依照矩阵相乘的法则办事，因此得

$$w^*=\frac{z^*-a^*-z^*z^{*\prime}a^*+z^*(2a^{*\prime}a^*-a^*a^{*\prime}I)}{1-2a^*z^{*\prime}+a^*a^{*\prime}z^*z^{*\prime}}.$$

§ 3. 单位球的几何学

以上的实形式建议以下的可能推广：

命 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 代表一 n 维矢量，而

$$xx'<1 \tag{1}$$

代表一单位球，以上建议

$$y=\frac{x-a-xx'a+x(2a'a-aa'I)}{1-2ax'+aa'xx'},\quad aa'<1 \tag{2}$$

可能是一个变形把单位球一对一地变为其自己，而且把 $x=a$ 变为 $y=0$。

先把 y 写成为

$$y=\frac{(1-aa')(x-a)-a(x-a)(x-a)'}{1-2ax'+aa'xx'},\quad aa'<1. \tag{3}$$

作内积

$$\begin{aligned}yy'&=\frac{(1-aa')^2(x-a)(x-a)'}{(1-2ax'+aa'xx')^2}\\&\quad-\frac{2(1-aa')(x-a)(x-a')a(x-a)'}{(1-2ax'+aa'xx')^2}\\&\quad+\frac{aa'[(x-a)(x-a)']^2}{(1-2ax'+aa'xx')^2}\\&=\frac{(x-a)(x-a)'}{(1-2ax'+aa'xx')^2}[(1-aa')^2\\&\quad-2(1-aa')(x-a)a'+aa'(x-a)(x-a)']\\&=\frac{(x-a)(x-a)'}{1-2ax'+aa'xx'}.\end{aligned} \tag{4}$$

由(3)可知 $$y+yy'a=\frac{(1-aa')(x-a)}{1-2ax'+aa'xx'}, \tag{5}$$

再作内积

$$(y+yy'a)(y+yy'a)'=\frac{(1-aa')^2(x-a)(x-a)'}{(1-2ax'+aa'xx')^2}.$$

由 (4) 得 $\quad yy'(1+2ay'+aa'yy')=\dfrac{(1-aa')^2yy'}{1+2ax'+aa'xx'}.$

如果 $yy'=0$, 则 $y=0$, 由(4)得 $x=a$. 如果 $yy'\neq 0$, 则得等式

$$1+2ay'+aa'yy'=\frac{(1-aa')^2}{1-2ax'+aa'xx'} \tag{6}$$

(这对 $y=0$, $x=a$ 也对). 代入 (5) 式得

$$x=a+\frac{(y+yy'a)(1-aa')}{1+2ay'+aa'yy'},$$

即

$$x=\frac{y+a+ayy'+y(2a'a-aa'I)}{1+2ay'+aa'yy'}. \tag{7}$$

这与 (2) 的形式完全相同, 只不过把 a 换成 $-a$ 而已. 因此 (2) 的确是一个一对一的变形 (对整个空间都如此,除去分母为 0 的情况,不难证明,例外仅有 $y=-a/(aa')$ 一点而已).

再由 (4) 可知

$$\begin{aligned}1-yy'&=\frac{1-2ax'+aa'xx'-(x-a)(x-a)'}{1-2ax'+aa'xx'}\\&=\frac{(1-aa')(1-xx')}{1-2ax'+aa'xx'}.\end{aligned} \tag{8}$$

由 Schwarz 不等式可知,分母

$$1-2ax'-aa'xx'=(1-ax')^2+aa'xx'-(ax')^2>0,$$

这又证明了 (2) 把单位球变为其自己.

除形式 (2) 的变形以外,变形

$$y=x\Gamma,\quad \Gamma\Gamma'=I \tag{9}$$

也显然把单位球变为其自己.

(2) 与 (9) 所演出的群就是我们所要讨论的群. 我们现在是研究在此群下,单位球内点所成的空间的几何学.

这个空间称为双曲空间，由(2)和(9)所演出的群称为非欧运动群.

在此群下，球内任一点可以变为原点，而且任意相互正交的 n 个方向可以变为 n 个坐标轴的正向.

§4. 微分度量

求变形

$$y = \frac{(1 - aa')(x - a) - (x - a)(x - a)'a}{1 - 2ax' + aa'xx'}$$

的微分，有

$$\begin{aligned}(1 - 2ax' + aa'xx')^2 dy = (1 - 2ax' + aa'xx') \\ \times [(1 - aa')dx - 2dx(x - a)'a] \\ - [-2dxa' + 2aa'dxx'][(1 - aa')(x - a) \\ - (x - a)(x - a)'a] = (1 - aa')dx \\ \times \{(1 - 2ax' + aa'xx')I - 2(1 - 2ax')x'a \\ + 2a'x - 2xx'a'a - 2aa'x'x\} \\ = (1 - aa')dx\{(1 - 2ax' + aa'xx')I - 2(1 - ax') \\ \times (x'a - a'x) + 2(x'a - a'x)^2\}.\end{aligned}$$

命

$$\begin{aligned}P = (1 - 2ax' + aa'xx')I - 2(1 - ax')(x'a - a'x) \\ + 2(x'a - a'x)^2\end{aligned}$$

及

$$M = x'a - a'x, \quad \lambda = 1 - 2ax' + aa'xx', \tag{1}$$

则

$$P = \lambda I - 2(1 - ax')M + 2M^2 \tag{2}$$

及

$$dy = \frac{1 - aa'}{(1 - 2ax' + aa'xx')^2} dxP. \tag{3}$$

易证:

$$
\begin{aligned}
xM^2 &= [(ax')^2 - aa'xx']x, \\
aM^2 &= [(ax')^2 - aa'xx']a, \\
M^3 &= [(ax')^2 - aa'xx']M.
\end{aligned} \tag{4}
$$

因此得出

$$
\begin{aligned}
PP' &= (\lambda I - 2(1 - ax')M + 2M^2) \\
&\quad \times (\lambda I + 2(1 - ax')M + 2M^2) \\
&= (\lambda I + 2M^2)^2 - 4(1 - ax')^2 M^2 \\
&= \lambda^2 I + 4(\lambda - (1 - ax')^2)M^2 + 4M^4 \\
&= \lambda^2 I + 4M\{[aa'xx' - (ax')^2]M + M^3\} \\
&= \lambda^2 I.
\end{aligned} \tag{5}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
dydy' &= \frac{(1 - aa')^2}{(1 - 2ax' + aa'xx')^4} dxPP'dx' \\
&= \frac{(1 - aa')^2}{(1 - 2ax' + aa'xx')^2} dxdx'.
\end{aligned} \tag{6}
$$

与(3.8)联立,立刻推得

$$
\frac{dydy'}{(1 - yy')^2} = \frac{dxdx'}{(1 - xx')^2}. \tag{7}
$$

这关系也是经过(3.9)而不变的,因此(7)是一个不变的微分二次型.

§5. 微 分 算 子

今往证明偏微分方程

$$
(1 - yy')^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} + 2(n - 2)(1 - yy') \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial u}{\partial y_i} = 0. \tag{1}
$$

经变形(3.2)而不变,(1)可以改写为

$$
(1 - yy')^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left[(1 - yy')^{2-n} \frac{\partial u}{\partial y_i} \right] = 0,
$$

即待证

$$(1-yy')^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left[(1-yy')^{2-n}\frac{\partial u}{\partial y_i}\right]$$

$$=(1-xx')^n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[(1-xx')^{2-n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]. \tag{2}$$

在证明 (2) 成立前,先证明以下的一些结果.

引理 1 命 $\mu=1+2ay'+aa'yy'$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{\mu^{n-2}}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)=0. \tag{3}$$

证 由 (3.7) 已知

$$x_k=a_k+\frac{(1-aa')(y_k+yy'a_k)}{1+2ay'+aa'yy'},$$

即待证

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{\mu^{n-2}}\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{y_k+yy'a_k}{\mu}=0. \tag{4}$$

左边等于

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{\mu^n}\Big[(\delta_{ik}+2y_ia_k)(1+2ay'+aa'yy')$$

$$-2(y_k+yy'a_k)(a_i+aa'y_i)\Big]=\frac{1}{\mu^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}$$

$$\times\{[2a_k(1+2ay'+aa'yy')+2(\delta_{ik}+2y_ia_k)$$

$$\times(a_i+aa'y_i)-2(\delta_{ik}+2y_ia_k)(a_i+aa'y_i)$$

$$-2(y_k+yy'a_k)aa'](1+2ay'+aa'yy')$$

$$-2n[(\delta_{ik}+2y_ia_k)(1+2ay'+aa'yy')$$

$$-2(y_k+yy'a_k)(a_i+aa'y_i)](a_i+aa'y_i)\}$$

$$=\frac{1}{\mu^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\{[2a_k(1+2ay')-2y_kaa'](1+2ay'$$

$$+aa'yy')-2n(\delta_{ik}+2y_ia_k)(a_i+aa'y_i)$$

$$\times (1 + 2ay' + aa'yy') + 4n(y_k + yy'a_k)$$

$$\times (a_i + aa'y_i)(a_i + aa'y_i)\}$$

$$= \frac{1}{\mu^n}\{n[2a_k(1 + 2ay') - 2y_k aa'] - 2n(a_k + aa'y_k$$

$$+ 2ay'a_k + 2aa'yy'a_k) + 4n(y_k + yy'a_k)aa'\} = 0.$$

引理 2

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = \frac{\lambda^2}{(1 - aa')^2}\delta_{jk}.$$

这是极易从

$$dydy' = \frac{(1 - aa')^2}{\lambda^2} dxdx'$$

推得的.

现在往证 (2) 式.

由 (3.8) 立刻推出

$$\left(\frac{(1 - aa')(1 - xx')}{\lambda(x)}\right)^n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{(1-aa')(1-xx')}{\lambda(x)}\right)^{2-n}\right.$$

$$\left.\times \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right]\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = (1 - aa')^2\left(\frac{1 - xx'}{\lambda(x)}\right)^n$$

$$\times \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(1 - xx')^{2-n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right]\lambda^{n-2}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}$$

$$+ (1 - aa')^2\left(\frac{1 - xx'}{\lambda(x)}\right)^n \sum_{i,j,k}(1 - xx')^{2-n}\frac{\partial u}{\partial x_k}$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda^{n-2}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = s_1 + s_2.$$

由引理 2, s_1 就是 (2) 式的右边, 因此待证 $s_2 = 0$. 也就是要证明

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\lambda^{n-2}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)\frac{\partial x_j}{\partial y_i} = 0.$$

这等式显然易由下面的等式推出: