确定性动态系统

经济控制论

张金水 编

清华大学出版社

确定性动态系统

经济控制论

张金水 编

清华大学出版社

内 容 简 介

本书系经济与管理专业的教材。书中第一、四、五、六章通过经济系统的例子讲述控制理论；如状态空间、运动分析、稳定性分析、能控能观测性、稳定预测、极点配置、鲁棒调节、最优控制。第二、三、七、八章讲述微观、宏观数理经济学、经济系统的基本理论、国民经济体制结构调整、各部门最优比例、各产品最优价格以及最快增长速度的计算方法。

确定性动态系统经济控制论

张 金 水 编

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

☆

开本：787×1092 1/16 印张：29.5 字数：714 千字

1989 年 2 月第 1 版 1989 年 2 月第 1 次印刷

印数：0001--4000 定价：6.15 元

ISBN 7-302-00302-5/F·18(课)

序　　言

本书是为经济与管理各专业的本科生和研究生编写的经济控制论教材。它是近几年来为清华大学经管学院本科生、研究生、北方交通大学研究生和中国矿业学院研究生院的研究生所开课程的讲义基础上整理而成的。学习本书不必有控制理论的预备知识，只须具备高等数学和线性代数的知识即可。若已有西方经济学的基本概念对理解书中内容将有益处。

什么叫经济控制论？作者在导论中谈了粗浅的看法。

在第一、四、五、六章中，主要用经济系统的例子来讲述控制理论的基本知识，如：状态空间、运动分析、稳定性分析、能控能观测性、稳态预测、极点配置、鲁棒调节、最优控制等内容。对连续时间系统和离散时间系统同时予以讲述，并指出它们的联系和相互转化。这部分内容曾作为清华大学本科生的课程讲授60学时。

在第二、三、七、八章讲述微观、宏观数理经济学和经济系统的基本理论，以及国民经济体制结构调整、各部门最优比例、各产品最优价格以及最快增长速度的计算方法等内容。这部分内容曾作为清华大学及校外研究生的课程讲授40学时。

作者在近几年学习经济理论的过程中，特别感谢中国社会科学院茅于轼研究员给予的启发和帮助。同时，十分感谢清华大学卢开澄教授给予的许多关心和指导。

本书内容经清华大学郑大钟副教授认真审阅并提出许多宝贵意见，谨表谢意。

作者感谢清华大学出版社许多同志，特别是高云鹏副教授的指导、帮助和支持。

感谢经管学院有关领导赵家和副教授、黎诣远副教授、侯炳辉副教授的热情推荐。还要感谢许多同学在教学过程中提出的各种有益的意见。

由于作者水平有限，错误之处不可避免，敬请读者不吝赐教。

张 金 水

1987年6月

目　　录

导　　论

近年来，从事经济与管理工作的人越来越多。下面我们通过一个例子来分析在解决具体经济与管理问题时常用的一些步骤。

第一步：目标的提出。当我们从事一项具体的经济与管理工作时，首先应当明确要达到什么目的，也就是要提出目标。例如，一个国家的目标可以是尽快实现经济建设现代化。当然，这只是一个定性目标，我们应当把这个定性目标定量化，也就是说应当找出一个量来衡量现代化的程度，这样才能进一步深入进行数量经济分析。因此，一个国家可以有如下定量目标：国民总产值增长率最大，或人均国民总产值增长率最大，等等。再如，企业的定性目标可以是：企业要为国家多做贡献。同样，我们应当用一个量来衡量贡献的大小。因此，企业的定量目标可以是：企业在合法途径下获得的利润最大，等等。当然利润与贡献有时不能等同，这里不深入研究。

下面举一例子，例如某一地区商业部门的定量目标是：该地区猪肉供给量 S 等于猪肉需求量 D. 要达到这个目标就要进行下一步。

第二步：定性因果关系分析。在本例中，首先要明确供给量 S 和需求量 D 都和什么变量有关系，先要把这些关系理顺。

可以用图 0.1 来表示猪肉需求量和商品价格以及工资水平等因素之间的因果关系。

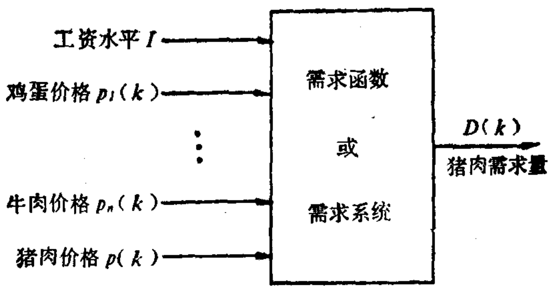

图 0.1　需求系统

从上图可知，第 k 年猪肉需求量 $D(k)$ 与当年猪肉价格 $p(k)$，鸡蛋价格 $p_1(k),\cdots$，牛肉价格 $p_n(k)$ 以及工资水平 I 等因素有关。猪肉需求量 $D(k)$ 由哪些因素决定要依经济理论和实践确定。

在图 0.1 中，我们把具有因果关系的事物称为系统。物价 p，$p_1,\cdots$，p_n 以及工资水平 I 是事物运动的起因，它们被称为系统的输入，在数学上称之为自变量。需求量 $D(k)$ 反映事物运动的结果，它被称为系统的输出，在数学上称之为应变量。

可以认为猪肉供给量 $S(k)$ 与总成本 $C(k)$ 以及猪肉价格 $p(k)$ 有关。如果成本很低而猪肉价 $p(k)$ 很高，那么猪肉供给量就较多。用图 0.2 表示这种因果关系。

仅仅分析出变量之间定性的因果关系是不够的。下面要进一步确定定量的因果关系。

图 0.2　供给系统

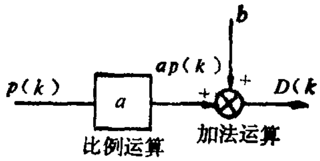

图 0.3　需求系统

第三步：模型结构的确定。确定模型结构是因果关系定量化的第一步也是关键的一步，它要依经济学基本理论和人们长期实践经验来进行。

对图 0.1 的系统，我们很自然想到用最简单的线性关系来表示定量因果关系：

$$D(k)=ap(k)+a_1p_1(k)+\cdots+a_np_n(k)+a_{n+1}I \tag{0.1}$$

式中，a，a_1，$\cdots$，a_{n+1} 是待定常数。当工资水平变化不大，其它价格变化对猪肉需求量 $D(k)$ 影响不大时，上式可简化为：

$$D(k)=ap(k)+b \tag{0.2}$$

式中，a，b 为常数。

式 (0.2) 称为需求系统的数学表示，也可以用图 0.3 表示这种数学关系。

下面推导图 0.2 所示系统的数学表示。

在饲料等要素价格不变情况下，我们可以认为成本与产出量 $S(k)$ 有关：

$$C(k)=f(S(k)) \tag{0.3}$$

在 S_0 处对上式用台劳级数展开：

$$C(k)=f(S_0)+f'(S_0)(S(k)-S_0)+1/2f''(S_0)(S(k)-S_0)^2+\cdots$$

取前三项得：

$$C(k)=\alpha+\beta S(k)+\gamma S^2(k) \tag{0.4}$$

式中：

$$\alpha=f(S_0)-f'(S_0)S_0+\frac{1}{2}f''(S_0)S_0^2$$

$$\beta=f'(S_0)-f''(S_0)S_0$$

$$\gamma=\frac{1}{2}f''(S_0)$$

猪肉产出量为 $S(k)$ 时可获利润是：

$$\begin{aligned}\Pi&=\text{收入}-\text{成本}=pS(k)-C(k)\\&=pS(k)-\alpha-\beta S(k)-\gamma S^2(k)\end{aligned} \tag{0.5}$$

生产者要求利润最大：

$$\frac{\partial\Pi}{\partial S}=0=p-\beta-2\gamma S(k)$$

得：

$$S(k)=\frac{1}{2\gamma}p(k)-\frac{\beta}{2\gamma} \tag{0.6}$$

这样，对供给系统来讲，我们认为猪肉供给量仅仅是猪肉价格的线性函数。把式 (0.6) 简记为

$$S(k)=c+dp(k) \tag{0.7}$$

式中，$e=-\beta/2\gamma$，$d=1/2\gamma$ 为常数。

式 (0.7) 称为供给系统的数学表示，也可以用如下框图 0.4 来表示这种关系。

应当指出，如上所述的 $S(k)$ 只是猪肉生产者愿意提供的猪肉量，也就是在 k 时期猪肉价格为 $p(k)$，生产者根据它算出应生产多少才能使利润最大。当我们考虑了生产延迟之后，在猪肉愿意提供的生产量 $S(k)$ 与实际上市量 $G(k)$ 之间有一滞后关系。如果

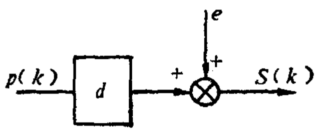

图 0.4　供给系统

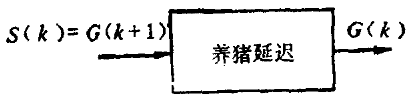

图 0.5　延迟环节

养猪生产周期为一年，那么今年上市量 $G(k)$ 等于去年人们愿意提供的供给量 $S(k-1)$，即：

$$G(k+1)=S(k) \tag{0.8}$$

我们用图 0.5 来表示式 (0.8) 的数量关系。

结合图 0.3，图 0.4，图 0.5 可得到图 0.6 所示的供需系统。

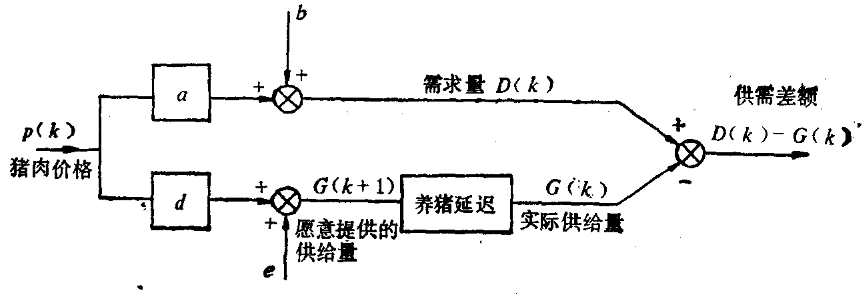

图 0.6　供需系统

我们已经指出重要的一点，就是模型结构的确定应符合经济学的理论与实践。例如，我们用式 (0.1) 的线性关系来表示需求函数，这仅仅是假设。如果我们假设的这种线性函数与实际数据拟合得比较好，那它便经受了实践的初步考验。同时这种假设还应符合经济理论。考察式 (0.1)，不难发现它的应用范围的局限性。不难想象，如果所有价格上涨 σ 倍而工资也增加 σ 倍，这对现实生活并没有影响，如同解放初一万元钞票变为现在的一元那样。变化后的需求量 $\tilde{D}(k)$ 应等于变化前的需求量 $D(k)$。由于：$\tilde{p}(k)=\sigma p(k)$，$\tilde{p}_1(k)=\sigma\tilde{p}_1(k),\cdots$，$\tilde{p}_n(k)=\sigma p_n(k)$，$\tilde{I}(k)=\sigma I(k)$；则：

$$\begin{aligned}\tilde{D}(k)&=a\tilde{p}(k)+a_1\tilde{p}_1(k)+\cdots+a_n\tilde{p}_n(k)+a_{n+1}\tilde{I}(k)\\&=\sigma(ap(k)+a_1p_1(k)+\cdots+a_np_n(k)+a_{n+1}I(k))\\&=\sigma D(k)\end{aligned}$$

这表明式 (0.1) 与经济知识矛盾。因此式 (0.1) 本质上不能用作需求函数。仅仅在物价和工资变化不大时，可以用它来近似需求函数。所以，我们不能随便用一个式子来表示事物之间定量因果关系，如果模型结构确定的不合适，那么其后的工作便成了数学游戏了。

要进一步确定图 0.6 中系统的参数，还应进行下一步工作。

第四步：数据的采集与参数估计。它是因果关系定量化的第二、第三步。由于经济系统变化缓慢，因此数据的采集要花许多人力和时间，它是经济系统建模过程中工作量最大的一步。一般有现成的通用软件可用来进行系统的参数估计。

假设该地区收集到的猪肉各年销售量如表 0.1 所示。

表 0.1　数据采集

第 k 年	猪肉价格 $p(k)$，元/斤	年销售量 $D(k)$ 万斤
1	0.8	9.0
2	1.0	7.8
3	2.0	3.78
⋮	⋮	⋮

这里我们认为销售量就是需求量，实际上在供不应求时，销售量小于需求量。假设依上述数据用最小二乘法回归出如下的需求方程：

$$D(k) = 12.28 - 4.25p(k) \tag{0.9}$$

又假设该地区收集到的猪肉各年供应量 $S(k)$ 的数据如表 0.2 所示。

表 0.2　数据采集

第 k 年	本年度猪肉价 $p(k)$	次年猪肉上市量 $S(k)$
1	0.8 元/斤	2.70万斤
2	1.0	3.01
3	2.0	3.68
⋮	⋮	⋮

假设依上述数据用最小二乘法回归出来的供给方程是：

$$S(k) = 2.13 + 0.80p(k) \tag{0.10}$$

到此为止，我们完全确定了模型的结构并估计出其中参数，也就是建立了系统的模型。下面利用这个模型进行经济预测与决策。

第五步：经济系统运动分析与预测。考察图 0.6 所示的系统。猪肉价格 $p(k)$ 是系统输入，它是系统运动的起因。所谓预测指的是系统输入变化之后，系统内部状态将会怎样变化。例如，在本例开始时，猪肉价格长期以来一直是 1.2 元/斤，处于供不应求状态。现在要把价格提至 2.2 元/斤，问市场供需情况将如何变化？当猪肉价格为 1.2 元/斤时，依式 (0.9) 计算出需求量 $D(k) = 7.18$ 万斤，同时依式 (0.10) 计算出供应量 $S(k) = 3.09$ 万斤。第 k 年的上市量 $G(k)$ 也是 3.09 万斤，整个系统处于供不应求状态。在第 $k+1$ 年，价格上升到 2.2 元/斤，这时需求量 $D(k+1) = 2.93$ 万斤，愿意提供的供给量 $S(k+1) = 3.89$ 万斤，而实际上市量 $G(k+1) = S(k)$ 仍为 3.09 万斤，由于 3.09 约等于 2.93，故在这一年供需基本均衡。 再下一年，即第 $k+2$ 年，需求量 $D(k+2) = 2.93$

万斤，愿意提供的供给量 $S(k+2)=3.89$ 万斤，而实际上市量 $G(k+2)=S(k+1)=3.89$ 万斤，由于 3.89 大于 2.93，故在这一年及其后各年系统处于积压滞销状态。通过这个例子，可对系统运动分析或预测作一简要定义：

系统在某种	起因 输入 自变量 外生变量	之下，会有什么样的	结果（哲学术语） 输出（控制论术语） 应变量（数学术语） 内生变量（经济术语）

系统运动分析或预测在哲学意义上属于认识世界的范畴。它只是解释了事物在某种原因之下会有什么样的运动结果。在人们实践活动当中，更重要的是去变革事物运动的起因，让事物的运动符合人的目标，从而达到改造世界的目的。在本例中，我们要解决如何定价才能使供需均衡的目标成为现实。

第六步：经济系统的决策与计划经济。在图 0.6 所示的系统中，价格 $p(k)$ 称为输入，假设该地区价格变化由地区物价局来掌握，那么 $p(k)$ 称为决策输入或控制输入。不能由决策者掌握的量称为扰动输入。例如，在本例中 b 和 d 也是输入，它们与工资水平及技术水平等有关，当工资水平或技术水平变化之后，它的大小也会发生变化。显然，它们的改变不能由地区物价局掌握，因此称之为扰动输入。

在本例中，目标是要达到供需平衡。决策者应怎样定价才能达到这个目标呢？这很容易由式 (0.9) 和式 (0.10) 来解出最优价格 $p^*(k)$：

$$\begin{cases} D(k) = 12.28 - 4.25\, p(k) \\ S(k) = 2.13 + 0.8\, p(k) \\ D(k) = S(k) \end{cases} \tag{0.11}$$

解出的最优价格是：$p^* = 2.01$ 元/斤。

最优决策过程一般是根据目标及系统运动方程的约束并利用数学方法找出决策变量的最优值。本例的决策是简单的，一般情况下可利用线性、非线性规划或极大值原理等来求解。

以上的方法可以称为计划经济的方法。决策者收集实际数据并用它回归出系统参数，从而完全确定了系统的定量数学表示，再依已知参数值的系统方程确定出明确的最优决策值。这种纯粹的计划经济有哪些缺点呢？它有两个明显的缺点。第一，由于原始数据收集不全，或模型结构本身是对复杂现实的一种近似，因此系统的参数计算值不会太准。第二，外界情况不断变化，系统参数值也会发生变化。比如在本例中，由于工资长了一级，那么 b 值将会大于原来的 12.28。由于这些原因，算出来的最优值并不就是实际的最优值。

例如，在本例中按历史数据算出最优定价 $p^* = 2.01$ 元/斤。但后来普遍调了工资使 b 值从 12.28 上升到 14.0，同时由于技术进步使 e 值从 2.13 上升到 2.50，那么需求量与供给量分别为：

$$D = -4.25 \times 2.01 + 14.0 = 5.46$$

$$S = 2.50 + 0.8 \times 2.01 = 4.108$$

这时属于供不应求的情况，因此 2.01 元/斤不再是最优价格了。

俗话说："计划赶不上变化。"正是反映了人们难以掌握万变的实际情况。我们能否制定一个不变的策略来应付这种万变的形势呢？在许多情况下回答是肯定的。

第七步：经济策略的制定与经济系统的调节。在本例中，如果我们采取供需定价的策略，当供不应求，即 $D-G>0$ 时，让物价适当上升；当供过于求，即 $D-G<0$ 时，让物价适当下降；当供求平衡时，即 $D-G=0$ 时，让物价维持不变。可以用如下的数学式子表示这种定价策略：

$$今年价格\ p(k+1) = 去年价格\ p(k) + \alpha(D(k) - G(k)) \tag{0.12}$$

式中，$D(k)-G(k)$ 反映去年市场供需情况，$k+1$ 表示今年度，α 是适当常数，它的大小依控制论知识选取，本例取 $\alpha = 0.546$。当采用式 (0.12) 的定价策略之后，可把图 0.6 的系统扩充为如图 0.7 所示的闭环系统。

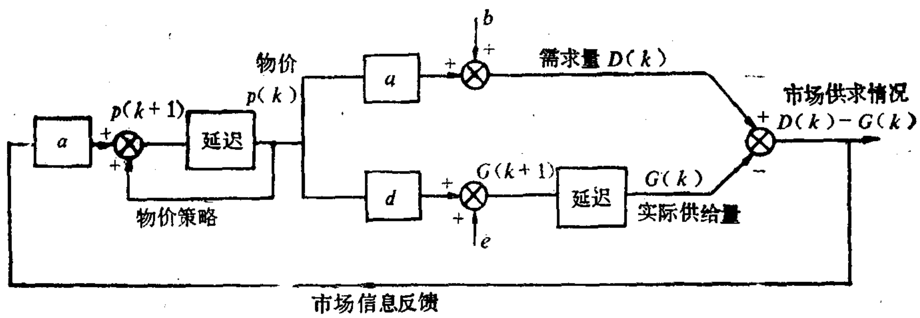

图 0.7 闭环策略与市场调节

应当指出，初学者对系统框图表示往往难以透彻掌握，而系统框图的表示实际上只不过是数学公式的直观表达，从框图上很容易看出各变量之间的因果关系。图 0.7 与如下数学公式等价：

$$\begin{cases} p(k+1) = (1+\alpha a)p(k) - \alpha G(k) + \alpha b \\ G(k+1) = dp(k) + e \end{cases} \tag{0.13}$$

式 (0.13) 可从图 0.7 直接推导出来，也可以从式 (0.2)，式 (0.7)，式 (0.8)，式 (0.12) 来推出。

把式 (0.13) 写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} p(k+1) \\ G(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha a & -\alpha \\ d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(k) \\ G(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha b \\ e \end{bmatrix} \tag{0.14}$$

它称为系统的状态方程。$p(k)$，$G(k)$ 称为闭环系统的状态，它的值反映系统运动处于什么状态。由本书第一章知识可以证明，只要矩阵：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1+\alpha a & -\alpha \\ d & 0 \end{bmatrix}$$

的特征值模小于 1，那么当 k 足够大之后，$p(k)$ 和 $G(k)$ 趋向常数。

$$\lim_{k\to\infty} p(k) = p^*, \quad \lim_{k\to\infty} G(k) = G^* \tag{0.15}$$

p^* 和 G^* 为常数。把式(0.15)代入式(0.13)，得：

$$\begin{cases} p^* = (1 + \alpha a)p^* - \alpha G^* + \alpha b \\ G^* = dp^* + e \end{cases} \tag{0.16}$$

解出得：

$$\begin{cases} p^* = \dfrac{b-e}{d-a} \\ G^* = d\dfrac{b-e}{d-a} + e \end{cases} \tag{0.17}$$

在价格 p^* 之下的需求量 $D^* = b + ap^*$，不难知道这时 $D^* = G^*$：

$$\begin{aligned} D^* &= a\frac{b-e}{d-a} + b = \frac{ab - ae + bd - ab}{d-a} = \frac{bd - ae}{d-a} \\ &= \frac{db - de + de - ae}{d-a} = d\frac{b-e}{d-a} + e \\ &= G^* \end{aligned} \tag{0.18}$$

这表明了一个重要的事实，我们不必去准确知道 a，b，d，e 的值，只要我们采取了式(0.12)所示的供需定价策略，在经过一定时间 k 之后，都将使得市场达到供需平衡：

$$\lim_{k\to\infty}(D(k) - G(k)) = D^* - G^* = 0 \tag{0.19}$$

当外界环境发生变化之后，即参数 a，b，d，e 发生了变化，只要状态矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值模小于1，采用式(0.12)的物价策略都能使市场最终达到供需均衡状态。在本例中，$a = -4.25$，$d = 0.8$，$\alpha = 0.546$，则：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 - 0.546 \times 4.25 & -0.546 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.32 & -0.546 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程为：

$$|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^2 + 1.32\lambda + 0.437$$

特征根为：

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -0.66 \tag{0.20}$$

显然，b 和 e 的值无论如何变化并不影响系统特征值，而 d 和 a 值变化不大时也能使特征根 λ_1，λ_2 的模不大于1，从而使市场自动达到供需平衡。

以上我们分析了经济系统达到目标的两种基本途径。第一种不妨称之为纯粹的计划经济。它要求人们采集数据并准确估计出系统参数值，然后制定最优策略。第二种不妨称之为纯粹的市场调节经济。人们只要制定出一套正确的经济策略，便能对付万变的客观情况，从而使实际系统按人的意愿运动。

我们通过例子初步分析了纯粹的计划经济的缺点，同样，纯粹的市场调节也存在缺点。例如在本例中，设开始时物价处于供需平衡点上，而在某一年度，比如第5个年度开始，由于增加工资等外界因素变化使系统参数变化，这时系统实际供需平衡价格变为p^{**}。若我们采用式(0.12)的定价策略，系统终将自动调节到 $p(k) = p^{**}$ 处。但是采用纯粹市场调节时，这种过程可能较长并且波动较大。如果我们采用市场调节与计划经济相结

合的办法，即先根据历史数据和历史经验预测新的情况下的新的均衡价格 $\tilde{p}$，预测值 $\tilde{p}$ 可能不等于 p^{**}，但只要计划工作作得好，那么 $\tilde{p}$ 将会比较接近 p^{**}，然后令第 5 年度价格为 $\tilde{p}$，而以后的物价变化再通过市场调节去调整。采用这种计划经济与市场调节相结合的办法之后，价格波动将比较少，供需差额的波动也较少，从而经济损失也比较小。可用图 0.8 来示意。

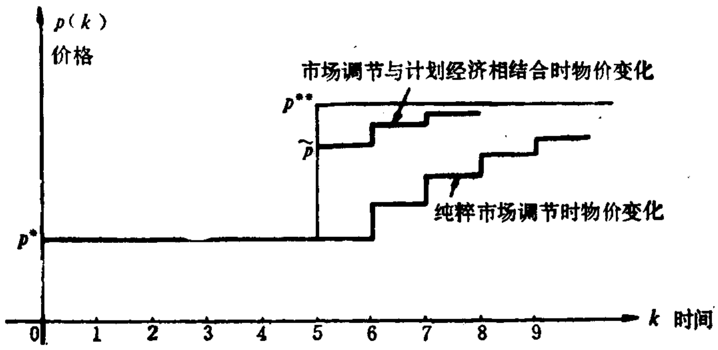

图 0.8 不同策略物价波动比较

从上分析可知，在控制实际的经济系统时，应当采用计划经济与市场调节相结合的办法。当然，这里仅仅是从一个例子来初步阐述相结合的优点。

以上我们通过一个例子阐述了从目标提出到目标实现全过程中所常用的方法和步骤。其实不仅在经济领域，在其它领域这些方法和步骤也是常用的，所差别的只是控制对象不同。控制对象的一个主要区别在于系统运动状态变化的快慢，微观世界系统变化最快，如电学系统，变化频率每秒几千周或更快。一般的机械力学系统次之。而经济管理系统变化更慢，变化频率以年、月、日为计量单位。宏观天体世界系统变化最慢。下面用图 0.9 概述以上的方法和步骤。

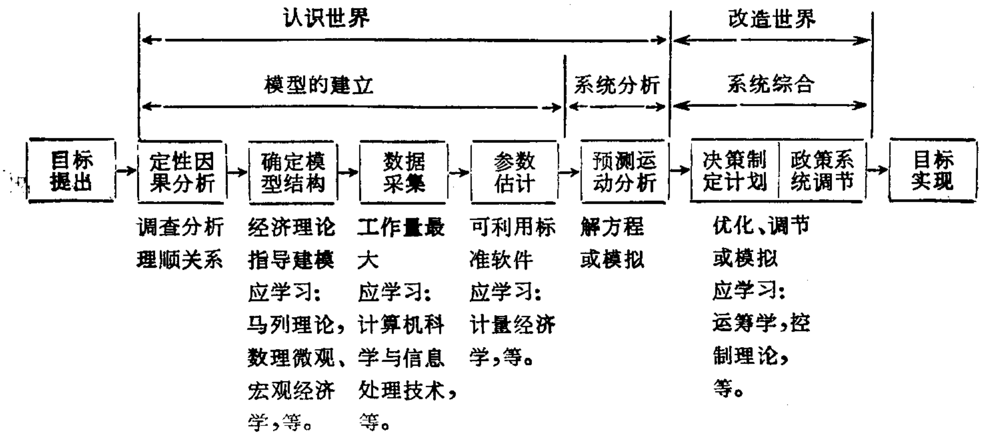

图 0.9

图 0.9 概述了常用的基本方法。我们知道人们的实践活动主要有两个方面，一是认识世界，二是改造世界。如图所示，模型的建立和系统分析属于认识世界的活动，而系统综合属于改造世界的活动。经济控制论是涉及面很广的一个学科，本书不可能全面讲述

图 0.9 所示的各门学科，也不打算仅仅讲述一些方法论的知识。本书是先从系统论的角度介绍数理微观和宏观经济基本理论，从而初态步明确经济系统模型应当具有什么样的结构。然后结合控制理论中确定性动态系统的基本知识来进行经济系统的分析与综合。上述知识应当说是掌握经济控制论所必备的最基本的知识。因此本书名为：“确定性动态经济系统控制论”。在学习本书之后，可再深入学习经济理论并结合随机动态系统和大系统等知识，以便进行更复杂的经济系统的分析与控制。

第一章　预备知识

本章介绍连续时间和离散时间动态系统的基本知识，这些知识对深入学习以后各章是必不可少的。

§1.1　连续时间动态系统

本节介绍由微分方程描述的线性连续时间动态系统的基本知识。我们知道拉氏变换是解微分方程的有力工具，因此它被广泛用来分析连续时间系统的运动过程。

§1.1.1　拉普拉斯变换

学过高等数学的同志都知道，解高阶微分方程或微分方程组是十分繁杂的。用拉氏变换解微分方程是人们长期解微分方程实践的总结。它把繁杂的微积分运算变为简单的代数运算。

定义 1.1.1　设 $f(t)$ 是时间 t 的函数，且当 $t<0$ 时，$f(t)=0$。则 $f(t)$ 的拉氏变换定义为：

$$f(s)=\int_0^{\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt \tag{1.1.1}$$

从定义可知，$f(t)$ 经式(1.1.1)运算之后得到一个新的关于 s 的函数 $f(s)$。s 可以取复数值，这样 $f(s)$ 便是一个复变函数。所谓复变函数指的是当自变量 s 取一个复数值时，应变量 $f(s)$ 便有另一个复数值与之对应。对没学过复变函数的读者不影响本书的学习。

应当指出，$f(s)$ 与 $f(t)$ 函数形式不同。如：当 $f(t)=\sin t\quad(t\geqslant 0)$ 时，$f(s)\neq\sin s$。以后可知 $f(s)=1/(s^2+1)$ 是不同形式的函数。有的书将 $f(s)$ 记为 $F(s)$ 以示区别。读者在以后学习中请不要混淆。

以后有时要用到如下的欧拉公式：

$$e^{j\alpha}=\cos\alpha+j\sin\alpha \tag{1.1.2}$$

可以利用指数函数的台劳展开来证明式(1.1.2)：

$$\begin{aligned}
e^{j\alpha}&=1+\frac{j\alpha}{1!}+\frac{(j\alpha)^2}{2!}+\cdots+\frac{(j\alpha)^n}{n!}+\cdots\\
&=1+\frac{j\alpha}{1!}-\frac{\alpha^2}{2!}-\frac{j\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\cdots\\
&=\left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}+\cdots\right)+j\left(\frac{\alpha}{1!}-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\cdots\right)\\
&=\cos\alpha+j\sin\alpha
\end{aligned}$$