渐近积分和积分逼近

徐利治 著

科学出版社

漸近積分和積分逼近

徐 利 治 著

科 學 出 版 社

1958

內 容 提 要

本書內容包括這樣四章：(一)古典的 Laplace 方法及其應用；(二)漸近積分的幾個主要方法及應用；(三)多重積分的漸近分析；(四)多重積分的一個逼近方法.

在第一章中，介紹了古典的漸近積分方法以及該方法對於積分估值、積分變換、奇異積分等方面一系列的應用. 在第二章裏，比較綜合地論述了漸近積分的幾個主要方法，並給出了若干新的應用. 第三章主要是研究具有一般形式

$$I(\lambda)=\int\cdots\cdots\int_D F(x_1,\cdots,x_n;\lambda)dx_1\cdots dx_n$$

的多重積分於 $\lambda\to\infty$ 時的漸近性質. 它可以看作是經典方法的一個擴充和發展. 第四章主要是研究週期函數的多重積分的近似計算與逼近問題. 提出了一個新的普遍的逼近方法，並研究了它在數值積分中的應用.

漸近積分和積分逼近

徐利治 著

*

科学出版社出版 (北京朝陽門大街117號)

北京市書刊出版業營業許可證出字第061號

中國科學院上海分院印刷廠印刷 新華書店總經售

*

1958年7月第一版 書號：1263 印張：6 7/9

1958年7月第一次印刷 開本：787×1092 1/18

(滬)：0001—2,348 字數：126,000

定價：(11) 1.20元

序　　言

我們知道,漸近積分是數學分析中的一個工具.它的研究,有着理論上和實用上的意義. 雖然早在130年以前,Laplace就提出了關於漸近積分的一個經典性的方法和命題,但,即使到了最近20年,有關漸近積分的研究,仍有各種論文不斷散見在世界各處的雜誌上.

這本書的主要目的和任務,便是試圖對漸近積分及其應用作比較有重點的論述;並且還要對週期性函數的多重積分提供一個新的逼近方法.然而,由於手頭所獲得的文獻不足,還不可能對已有成果作全面而有系統的總結.事實上,著者在這裏主要是根據個人的工作範圍以及興趣的一般方向,來寫作本書的.

書的內容有四章.第一、二兩章中的部分結果以及第三、四兩章中除個別命題外的幾乎全部內容是屬於本書著者的工作. 這一些工作中的不完善之處,想來是難免的,希望本書的讀者有所指教或指正.

最後,本書著者在這裏應該向編輯者、審稿人、排印工作同志特別是稿件校訂者所付出的細緻而負責的勞動,表示深切的敬意和感謝.

徐利治

1957年12月於長春

目　錄

第一章　古典的 Laplace 方法及其應用

§1.　古典的漸近積分定理

在分析學的某些部門的研究中，常常會出現下列形式的積分

$$J(\lambda)=\int_a^b f(x,\lambda)dx,$$

並且需要我們去估計 $J(\lambda)$ 於 $\lambda\to\infty$ 時的漸近值.

19 世紀的法國數學家 P. S. Laplace 在他所著的"概率解析理論"一書中，由於研究大數事件的概率（或大數函數）的需要，首先提出了研究如下形式的積分漸近值的問題：

$$I(n)=\int_a^b \phi(x)\,[f(x)]^n\,dx,$$

其中 n 是一個大整數. 在相當一般的條件之下，他找到了 $I(n)$ 於 $n\to\infty$ 時的漸近公式，並且給出了這個公式在計算某些大數函數方面的應用.

爲了敍述 Laplace 的積分定理，首先讓我們說明什麼叫做函數的"有效最大值". 對於給定的有限區間 $[a,b]$，我們將說實變數函數 $f(x)$ 在這區間的一個內點 ξ 處取得有效最大值 $f(\xi)$，如果對於每一個不包含 ξ 點的區間 $[a,c]$ 和 $[d,b]$（其中 $c<\xi<d$），在其上函數 $f(x)$ 的上確界（最小上界）恆比 $f(\xi)$ 小. 亦就是說

$$\sup_{[a,c]} f(x)<f(\xi),\qquad \sup_{[d,b]} f(x)<f(\xi),$$

在這裏 c 和 d 可以任意地接近 ξ，但 $c<\xi<d$.

完全同樣地，可以給出在無限區間 $(-\infty,\infty)$ 上一個函數在某點取有效最大值的概念. 例如，我們說 $f(\xi)$ 是函數 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上的有效最大值，意思是說：當 $c<\xi<d$ 時，不等式

$$\sup_{(-\infty,c)} f(x)<f(\xi),\qquad \sup_{(d,\infty)} f(x)<f(\xi)$$

恆成立.

顯而易見地，有效最大值的概念也可以推廣到定義在歐氏空間中的多元函數的情形.

現在我們來敍述並推證 Laplace 的積分定理.

定理 1. 假設函數 $\phi(x)$, $h(x)$ 及 $f(x) = e^{h(x)}$ 定義在區間 $a \leqslant x \leqslant b$ 上,並且滿足下列各條件:

(i) $\phi(x)(f(x))^n$ 在 $[a, b]$ 上爲絕對可積 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$;

(ii) 函數 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 的一個內點 ξ 處達到有效最大值;

(iii) 函數 $h(x)$ 在 ξ 的一個鄰域中有連續的二級微商,而 $h''(\xi) < 0$;

(iv) 函數 $\phi(x)$ 在 $x = \xi$ 處連續,而 $\phi(\xi) \neq 0$.

那末當 $n \to \infty$ 時有下列的漸近公式成立:

$$\int_a^b \phi(x)(f(x))^n dx \sim \phi(\xi)(f(\xi))^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{-2\pi}{nf''(\xi)}}. \tag{1}$$

爲了證明漸近公式 (1), 讓我們先考慮下面的一個特例:

$$\int_a^b e^{-kn(x-\xi)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{kn}} \left\{ 1 + o(n^{-\Delta}) \right\}, \ (n \to \infty) \tag{2}$$

此處 k 爲固定正數, Δ 爲任意預先給定的正數.

作變數替換 $t = \sqrt{kn}(x-\xi)$ 並注意

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

則易得出

$$\int_a^b e^{-kn(x-\xi)^2} dx = \sqrt{\frac{1}{kn}} \int_{-\sqrt{kn}(\xi-a)}^{\sqrt{kn}(b-\xi)} e^{-t^2} dt =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{kn}} - \sqrt{\frac{1}{kn}} \left(\int_{\sqrt{kn}(b-\xi)}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\sqrt{kn}(\xi-a)} \right) e^{-t^2} dt.$$

由於 $b - \xi = d > 0$, 並且當 t 充分大時 $e^{-t^2} < t^{-2\Delta-2}$, 因此只要 n 充分大便有

$$0 < \sqrt{\frac{1}{kn}} \int_{\sqrt{kn}\,d}^{\infty} e^{-t^2} dt < \sqrt{\frac{1}{kn}} \int_{\sqrt{kn}\,d}^{\infty} t^{-2\Delta-2} dt =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{kn}} \left[\frac{t^{-2\Delta-1}}{2\Delta+1} \right]_{t=\sqrt{kn}\,d} = o(n^{-\Delta-\frac{1}{2}}).$$

同様可以證明

$$0 < \sqrt{\frac{1}{kn}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{kn}(\xi-a)} e^{-t^2} dt = o(n^{-\Delta-\frac{1}{2}}), \ (n \to \infty).$$

這就證明了等式(2).

由定理的條件可知, 對於任意給定的 $\varepsilon > 0$, 總可以取 $\delta > 0$ 爲如此之小,而使得 $a < \xi \pm \delta < b$, 並且當 $|x - \xi| < \delta$ 時有

$$\phi(\xi) - \varepsilon < \phi(x) < \phi(\xi) + \varepsilon,$$

$$h''(\xi) - \varepsilon < h''(x) < h''(\xi) + \varepsilon.$$

我們還無妨假定預先給定的 ε 滿足條件 $h''(\xi)+\varepsilon<0$. 於是,注意 $h'(\xi)=0$ 並應用積分的中値定理,便得到

$$\int_a^b \phi(x)\, e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx = \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \phi(x) e^{n[h(x)-h(\xi)]}dx + O(\theta^n) =$$
$$= \mu \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{\frac{1}{2}n(x-\xi)^2 h''(\xi')}dx + O(\theta^n),\ (n\to\infty) \tag{3}$$

此處 $0<\theta<1$, $\xi-\delta<\xi'<\xi+\delta$, $\phi(\xi)-\varepsilon<\mu<\phi(\xi)+\varepsilon$. 事實上,由於 $h(\xi)$ 是 $h(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的有效最大值,故 θ 可取作

$$\theta = \max\left(\sup_{a\leqslant x\leqslant \xi-\delta} e^{h(x)-h(\xi)},\ \sup_{\xi+\delta\leqslant x\leqslant b} e^{h(x)-h(\xi)}\right).$$

因此 θ 實際是一個只與 ε 有關而與 n 無關的正數.

顯然(3)式右端的積分值係介於下列兩個積分值之間:

$$(\phi(\xi)-\varepsilon)\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{\frac{1}{2}n(x-\xi)^2[h''(\xi)-\varepsilon]}\,dx,$$
$$(\phi(\xi)+\varepsilon)\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} e^{\frac{1}{2}n(x-\xi)^2[h''(\xi)+\varepsilon]}\,dx.$$

根據等式(2),可知於 $n\to\infty$ 時,上面的兩個積分值又分別地漸近相等於

$$(\phi(\xi)-\varepsilon)\sqrt{\frac{-2\pi}{[h''(\xi)-\varepsilon]n}},\qquad (\phi(\xi)+\varepsilon)\sqrt{\frac{-2\pi}{[h''(\xi)+\varepsilon]n}}.$$

由於 $\varepsilon>0$ 可以任意地小而 $O(\theta^n)=o\left(\frac{1}{n}\right)$,又由於

$$\phi(\xi)e^{nh(\xi)}\sqrt{\frac{-2\pi}{nh''(\xi)}} = \phi(\xi)(f(\xi))^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{-2\pi}{nf''(\xi)}};$$

故定理便獲得了證明.

最後,有三點是值得指出的:第一,以上所證明的定理即使當積分區間改爲無限區間 $(-\infty,\infty)$ 也還是成立的. 證法基本上照舊. 第二,函數 $(f(x))^n$ 的指數 n 可以改爲任意實數 λ. 第三,因(1)式的右端與 a, b 無關,故知該公式對任何區間 $[a,b]$ 都恆成立,只要 $a<\xi<b$ 就可以.

§2. 積分定理的第一個應用——尋求積分漸近值

由於 Laplace 的積分定理是在一組相當普遍的條件下建立起來的;因此不難預料這個定理會在古典分析學中找到若干應用,特别是對於某些知名的積分漸近值的決定,會有它的作用. 這裏就要給出一些例子來.

例 1. Wallis 公式(π 的無窮乘積表達式):

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)}.$$

容易驗證 Wallis 的公式實際相當於下列的漸近式:

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}, \quad (n\to\infty). \tag{4}$$

為了能够應用 § 1 中的積分定理,首先應該設法將上式的左端用積分表示出來. 事實上,我們知道

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,\frac{\pi}{2}.$$

因此

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin^2 x)^n dx.$$

這樣,右端的積分恰好具有公式(1)左端的形式;亦就是相當於 $a=0$, $b=\pi$, $\phi(x)=\frac{1}{\pi}$, $f(x)=\sin^2 x$, $\xi=\frac{\pi}{2}$. 故由公式(1)便立即導出(4).

例 2. Stirling 公式:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \quad (n\to\infty).$$

事實上, $n!$ 可表為 Euler 積分:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-x}x^n dx. \tag{5}$$

我們注意,如果在(5)式右端的積分中把 x^n 看成 $(f(x))^n$, 則 $f(x)=x$ 在 $(0,\infty)$ 內並不存在"有效最大值". 因此必須作適當的變形. 讓我們令 $x=ny$, 那末(5)式就變成

$$\Gamma(n+1) = n^{n+1}\int_0^{\infty} (e^{-y}y)^n dy. \tag{6}$$

這樣,函數 $f(y)=e^{-y}y$ 便在 $\xi=1$ 處達到一個有效最大值 $f(1)=e^{-1}$. 因此現在的情形相當於積分定理中的特例:

$$a=0,\ b=\infty,\ \phi(y)=1,\ f(y)=e^{-y}y,\ \xi=1.$$

最後代入漸近公式(1)便得出所要證明的結果.

關於 Stirling 公式(漸近展式)的更一般的而較精確的形式,可以從 Whittaker 與 Watson 合著的"A Course of Modern Analysis"一書的第 12 章中找到.

例 3. Legendre 函數 $P_n(x)$ 的漸近式:

$$P_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\,\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{x^2-1}}, \quad (n\to\infty).$$

我們知道,所謂 Legendre 函數 $P_n(x)$, 即是滿足 Legendre 方程

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

的 n 次多項式. 關於這種多項式我們有 Laplace 型的積分表達式($x>1$):

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta\right]^n d\theta. \tag{7}$$

由於在區間 $[-\pi, \pi]$ 上函數 $f(\theta) = x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta$ 在 $\theta = 0$ 處達到有效最大值 $f(0) = x + \sqrt{x^2-1}$，因此將積分公式(1)應用於(7)式的右端便立即得出 $P_n(x)$ 的漸近式.

例 4. Bessel 函數 $J_\nu(it)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ 的漸近式:

$$J_\nu(it) \sim (-i)^\nu \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}}, \quad (t\to\infty).$$

我們知道,有下列 Hansen 的展開式:

$$e^{it\cos x} = J_0(t) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(t) i^{-\nu}\cos\nu x, \quad (i = \sqrt{-1}).$$

在這個展開式 (Fourier 級數) 中,參數 t 可以是實數或複數. 現在讓我們用 it 來代替原來的 t, 那末

$$e^{-t\cos x} = J_0(it) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu(it) i^{-\nu}\cos\nu x.$$

於是我們得 Fourier 係數為

$$2\cdot i^{-\nu} J_\nu(it) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\nu x\cdot e^{-t\cos x}\,dx.$$

注意函數 $f(x) = e^{-\cos x}$ 在 $x = \pi$ 處取有效最大值. 因此只要在積分定理中令 $a = 0$, $b = 2\pi$, $\phi(x) = \frac{1}{\pi}\cos\nu x$, $f(x) = e^{-\cos x}$, $\xi = \pi$, $n = t$ 便立即導出本例中的漸近公式.

以上所舉的各個例子中,所出現的積分均具有(1)式左端的"標準形式". 亦就是說,變向無窮大的參數 n (或 λ) 都出現在被積函數的指數地位. 這一點當然是必需的,否則 Laplace 的積分定理便不能應用. 但是這並不是說,積分的原來形式就非這樣不可. 事實上有許多積分並不具有"標準形式",但經適當的變數替換後卻可化成標準形式,因而積分定理仍可加以應用. 關於這些, Pólya-Szegö 合著的 "Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis" 一書上卷的第 2 部分第 5 章中有一些有趣的例子. 這裏不妨擇舉其二.

例 5. 設 α 為一固定實數,那末於 $t\to\infty$ 時有下列的漸近式:

$$\int_1^\infty x^\alpha\left(\frac{te}{x}\right)^x \frac{dx}{x} \sim \sqrt{2\pi}t^{\alpha-\frac{1}{2}}e^t. \tag{8}$$

(8) 式中的積分顯然不是標準形式. 但只要將原來的 x 換作 tx, 便可使參數 t 移到被積函數的指數地位. 事實上,這替換使原積分變為

$$I(t)=t^{a}\int_{t^{-1}}^{\infty}x^{a-1}\left(\frac{e}{x}\right)^{tx}dx.$$

由於函數 $f(x)=(e/x)^{x}$ 在 $(0,\infty)$ 內的 $x=1$ 處取得有效最大值,並且當 $t>2$ 時在 $[t^{-1},\frac{1}{2}]$ 內沒有最大值,所以要想確定 $I(t)\ (t\to\infty)$ 的漸近性,祇需考慮積分

$$t^{a}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}x^{a-1}\left(\frac{e}{x}\right)^{tx}dx$$

的漸近值即可. 但現在的積分已經是標準形式,在其中

$$a=\frac{1}{2},\ b=\infty,\ \phi(x)=x^{a-1},\ f(x)=\left(\frac{e}{x}\right)^{x},\ \xi=1,\ n=t.$$

因此(8)式乃是(1)式的一個特例.

例 6. 設 $\alpha>0$,那末於 $t\to\infty$ 時有漸近式:

$$\int_{0}^{\infty}x^{-\alpha x}t^{x}dx\sim\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha e}}\,t^{\frac{1}{2\alpha}}\exp\left(e^{-1}\alpha t^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

顯然積分中的被積函數可以寫成

$$F(x,t)=\left(xt^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha x}.$$

因此如果把原式中的 x 換成 $e^{-1}t^{1/\alpha}(1+x)$, 上式右端括號中的 $t^{-1/\alpha}$ 就不再顯現, 而且原積分即變爲標準形式

$$\frac{1}{e}t^{\frac{1}{\alpha}}\exp\left(\frac{1}{e}\alpha t^{\frac{1}{\alpha}}\right)\int_{-1}^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{e}\alpha t^{\frac{1}{\alpha}}[x-(1+x)\log(1+x)]\right\}dx.$$

這樣,顯然相當於在 Laplace 定理中令

$$h(x)=x-(1+x)\log(1+x),\ n=\frac{1}{e}\alpha t^{\frac{1}{\alpha}}.$$

容易求出 $h(x)$ 在 $\xi=0$ 處取有效最大值. 因此本例中的漸近式同樣可以從普遍公式(1)直接得出來.

§ 3. 積分定理的第二個應用——論證一個反演公式

在 Laplace 變換論中,有一個很著名的反演公式, 即所謂 Post-Widder 公式. 這個公式的作用是在於給出 Laplace 變換的反變換; 也就是給出一種從發生函數去求決定函數的方法. 我們知道, 將 Laplace 變換用作運算的工具時(例如用它來作爲解微分方程的工具時),問題常常要求我們從已經獲得的發生函數去探求原來被變換的函數. 因此反演公式的重要性是不言而喻的.

在這裏我們將在最簡單的情況下來論證 Post-Widder 的反演公式. 主要的結論包含在下面的定理中:

定理 2. 設 $\phi(t)$ 是 $[0,\infty)$ 內的一個連續函數, 而 $f(s)$ 是它的 Laplace 變

換：

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}\phi(t)dt; \tag{9}$$

又設上式中的積分在 $s>s_0$ 時爲絕對收斂，那末我們有下列的反演公式：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right)\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1}=\phi(t),\ (0<t<\infty). \tag{10}$$

一點也不困難地可以利用 §1 中的積分定理來推證公式(10)．首先我們指出(9)式中的積分可以在積分號下對 s 求微商．事實上，若 $s_1>s_0$, $\varepsilon>0$，而 R 爲任意大的正數 ($R>s_1+\varepsilon$, ε可爲任意小)，則下列的積分在區間 $s_1+\varepsilon\leqslant s\leqslant R$ 上是一致收斂的：

$$g(s)=\int_0^\infty e^{-st}(-t)\phi(t)dt. \tag{11}$$

爲要看出這一點，只須注意有一正常數 M 使得

$$|e^{-st}(-t)\phi(t)|=e^{(s_1-s)t}\cdot t|e^{-s_1t}\phi(t)|\leqslant$$
$$\leqslant e^{-\varepsilon t}\cdot t|e^{-s_1t}\phi(t)|\leqslant M|e^{-s_1t}\phi(t)|,(t\geqslant 0)$$

而假設又告訴我們

$$\int_0^\infty|e^{-s_1t}\phi(t)|dt<+\infty;$$

因此(11)中積分的一致收斂性乃由 Weierstrass 的 M 檢驗法而得知．

但 $g(s)$ 恰好是(9)式右端積分號下求微商的結果，因此在區間 $s_1+\varepsilon\leqslant s\leqslant R$ 上成立着

$$f'(s)=\int_0^\infty\left[\frac{d}{ds}e^{-st}\phi(t)\right]dt=\int_0^\infty e^{-st}(-t)\phi(t)dt. \tag{12}$$

又因爲 $\varepsilon>0$ 與 $R>0$ 是任意的，而 s_1 亦可任意地接近於 s_0，故知 (12) 式實際對一切 $s>s_0$ 都成立．

由此類推即可得出

$$f^{(n)}(s)=\int_0^\infty e^{-st}(-t)^n\phi(t)dt,\ (s>s_0).$$

於是我們有

$$\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right)\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1}=\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1}\int_0^\infty e^{-nv/t}v^n\phi(v)dv=$$
$$=\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^\infty(e^{-x}x)^n\phi(xt)\,dx,\ (v=xt).$$

最後應用 Stirling 公式(§2 中的例 2)和 §1 中的定理 [其中 $f(x)=e^{-x}x$, $\xi=1$, $f(\xi)=e^{-1}$, $f''(\xi)=-e^{-1}$, $\phi(\xi t)=\phi(t)$]，便得到

$$\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right)\left(\frac{n}{t}\right)^{n+1}\sim\frac{n^{n+1}(e^{-1})^{n+\frac{1}{2}}}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}}\phi(t)\sqrt{\frac{2\pi}{ne^{-1}}}=\phi(t).$$

這就證明了反演公式(10).

容易證明,在定理 2 的同樣假設下,公式(10)還可以換成另一個樣子: 設 c 為任一有限常數,則有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n!}f^{(n)}(s)s^{n+1}\Big|_{s=\frac{n}{t}+c}=\phi(t),\quad 0<t<\infty. \tag{13}$$

證法與前完全相同,故無需複述.

關於公式(10)的思想來源和意義,這裏倒值得補充說明一下. 如果我們把(9)式改寫成

$$f(s)=F(x)=\int_0^\infty x^t\phi(t)dt,\quad (x=e^{-s})$$

那末它顯然與冪級數

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

十分相似; 其中 $\phi(t)$ 與 a_k 相當,而連續變量 t 與間斷變量 k 相當. 正因為 a_k 可以通過 $G(x)$ 在 $x=0$ 處的微商來表現:

$$\frac{G^{(k)}(0)}{k!}=a_k,\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

因而自然使人預料到 $\phi(t)$ 也應該可以通過 $f(s)$ 在 $s=\infty$ 的鄰域內的微商(亦即相當於 $x=0$ 附近的微商)來表現. 而 Post-Widder 的反演公式實質上正是表明了這一點. 事實上, Widder 本人已經指出,正因為存在着上述的相似性,公式(10)的萌芽思想早已經包含在 Stieltjes 於 1893 年致 Hermite 的信中了. 不過該公式的正式發現還應該歸功於 E. L. Post 在 1930 年的工作. Widder 乃是繼 Post 之後在更一般的情况下來建立那個反演公式的人.

本來在 Laplace 變換論中,早已存在有 Phragmén 的反演公式和 Riemann 所首先創用的複變反演公式. 但前者需要由 $f(s)$ 所構成的某種無窮級數的極限來反演; 後者需要通過 $f(s)$ 的某種形式的無窮積分來反演. 因此當 $f(s)$ 的高次微商在不難獲得的情形下,那些古典的反演公式都比不上反演公式(10)的簡單而合用.

Widder 有關反演理論的進一步的工作,我們還要在第二章中論及.

§4. 積分定理的第三個應用——研究幾個奇異積分

奇異積分的研究在近代數學分析中已經成為一枝專門的理論,它在函數逼近論和三角級數論中有着許多應用. Fourier 級數求和理論中的 Dirichlet 奇異積

分與 Fejér 奇異積分當是大家所熟知的．除此以外，比較簡單而知名的有 Vallée-Poussin 的奇異積分和 Landau 的奇異積分．現在我們馬上就要來討論這兩種奇異積分．

首先，奇異積分的普遍概念是如此給出的：假設函數 $K_n(x,t)(n=1,2,3,\cdots)$ 定義於正方形區域 $a\leqslant x\leqslant b$, $a<t<b$ 上，對於每個固定的 t，它是 x 的 Lebesgue 可積函數；而且當 $a\leqslant\alpha<t<\beta\leqslant b$ 時，

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta K_n(x,\ t)\,dx=1,\tag{14}$$

那末函數 $K_n(x,\ t)$ 便叫做一個核；而具有形式

$$\phi_n(t)=\int_a^b K_n(x,\ t)\ \phi(x)dx$$

的積分即稱爲奇異積分．

現在讓我們把定理 1 中的 ξ 改寫作 t，把函數 $f(x)$ 改記作 $f(x,\ t)$．如是在與定理 1 相同的假設下，$f(x,\ t)$ 的有效最大值應該是 $f(t,\ t)$．在這裏我們實際已把 $f(x,\ t)$ 看成是二變數函數，亦就是將以前的 ξ 作爲參數 t 看待．其次再令

$$C_n=\sqrt{\frac{-2\pi f(t,\ t)}{nf''_{xx}(t,\ t)}},\qquad K_n(x,\ t)=\frac{1}{C_n}\left(\frac{f(x,\ t)}{f(t,\ t)}\right)^n,\tag{15}$$

於是漸近公式(1)便採取如下的形式：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b K_n(x,\ t)\ \phi(x)dx=\phi(t),\ (a<t<b).\tag{16}$$

取 $\phi(t)\equiv 1$ 時可見(16)式中的 $K_n(x,\ t)$ 對於每一個固定的 $t(a\leqslant\alpha<t<\beta\leqslant b)$ 而言條件(14)是恆滿足的，因此(16)式中的積分正好就是一個奇異積分．

既然(16)式中的奇異積分收斂於 $\phi(t)\ (a<t<b)$，我們自然想到：這樣的收斂性對 $t\ (a<\alpha\leqslant t\leqslant\beta<b)$ 而言是否一致？下面的定理對此作了肯定的回答．

定理 3. 設 $\phi(t)$ 是區間 $a<t<b$ 上的任一連續函數，而 $h(x,t)$ 及 $h''_{xx}(x,t)$ 是區域 $a\leqslant x\leqslant b$, $a<t<b$ 上的連續函數；又設對於每一個固定的 $t\ (a<t=\xi<b)$ 函數 $h(x)=h(x,\ t)$, $f(x)=e^{h(x)}$ 恆滿足定理 1 的條件 (i) 和 (ii)，那末(16)式中的奇異積分便一致收斂到 $\phi(t)\ (a<\alpha\leqslant t\leqslant\beta<b)$．

就特例 $\phi(x)\equiv 1$ 來說，定理不難直接證明．對於一般的情形，則祇需證明對於任意給定的 $\varepsilon>0$，恆存在一個與 t 無關的 $N>0$ 使得於 $n>N$ 時，

$$I_n=\int_a^b K_n(x,\ t)\,|\,\phi(x)-\phi(t)\,|\,dx<\varepsilon,\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).\tag{17}$$

根據定理的假設我們知道 $h''_{xx}(t,\ t)<0\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 而 $h''_{xx}(t,\ t')$ 是方形域

$\alpha \leqslant t \leqslant \beta, \alpha \leqslant t' \leqslant \beta$ 上的一致連續函數. 對於給定的 $\varepsilon > 0$, 首先可選 $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ 充分地小使得 $\delta < \min(\alpha - a, b - \beta)$, 而且於 $t - \delta \leqslant x \leqslant t + \delta$ 時保持 $|\phi(x) - \phi(t)| < \frac{\varepsilon}{2} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$; 並且還使得於 $|t - t'| < \delta$ 時有

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} < \sqrt{\frac{h''_{xx}(t, t)}{h''_{xx}(t', t)}} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18}$$

注意(2)式右端括號中出現的 $o(n^{-\Delta})$ 對於 $\xi\,(a < \alpha \leqslant \xi \leqslant \beta < b)$ 是一致地趨向於 0 的, 因此根據定理 1 證法的同樣思想以及等式(2)和(18)可知, 的確存在着充分大的 $N_\varepsilon = N(\delta_\varepsilon) > 0$(與 t 無關)使得對於(17)式中的積分可以作如下的估計:

$$I_n = C_n^{-1} \int_{t-\delta}^{t+\delta} \left(\frac{f(x, t)}{f(t, t)}\right)^n |\phi(x) - \phi(t)|\, dx + O(\theta_t^n) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} C_n^{-1} \int_{t-\delta}^{t+\delta} e^{-\frac{1}{2} n (x-t)^2 h''_{xx}(t', t)}\, dx + O(\theta_t^n) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}(1 + \varepsilon) + O(\theta_t^n) < \frac{2}{3}\varepsilon + O(\theta_t^n),$$

此處 $n > N_\varepsilon$, $t - \delta < t' = t'(x) < t + \delta$, 而

$$\theta_t = \max\left(\sup_{a \leqslant x \leqslant t-\delta} \rho(x, t),\ \sup_{t+\delta \leqslant x \leqslant b} \rho(x, t)\right), \rho(x, t) = \frac{f(x, t)}{f(t, t)}.$$

現在留下的任務在於證明 $\sup\limits_{\alpha \leqslant t \leqslant \beta} \theta_t = \theta < 1$. 今用反證法, 假如 $\theta = 1$, 那末由 Bolzano-Weierstrass 定理, 可知必有收斂敍列 $t_n \to t_0$ 使得 $\theta_{t_n} \to 1\ (n \to \infty)$; 此處 $\alpha \leqslant t_0 \leqslant \beta$. 又由 θ_t 的定義, 可知必可從 $\{t_n\}$ 中挑選一子敍列 $\{t_\nu\}$ 使下列的兩個極限式至少有一個成立:

$$\lim_{\nu \to \infty} \sup_{a \leqslant x \leqslant t_\nu - \delta} \rho(x, t_\nu) = 1, \quad \lim_{\nu \to \infty} \sup_{t_\nu + \delta \leqslant x \leqslant b} \rho(x, t_\nu) = 1.$$

不妨就假定第一個成立, 並且記 $\sup\limits_{a \leqslant x \leqslant t_\nu - \delta} \rho(x, t_\nu) = \rho(x_\nu, t_\nu)$. 於是利用Bolzano-Weierstrass 定理, 又可從 $\{(x_\nu, t_\nu)\}$ 中選出一收斂子敍列 $\{(x_\mu, t_\mu)\}$, 使得 $\lim \rho(x_\mu, t_\mu) = \rho(x_0, t_0) = 1$, 此處 $a \leqslant x_0 \leqslant t_0 - \delta$. 但是 $\rho(x, t)$ 在 $t = t_0$ 處只能有唯一的有效最大值 $\rho(t_0, t_0) = 1$; 因此得到了矛盾. 既然 $\theta < 1$ 的事實成立, 可見只要將 N_ε 選得足够大, 便必然有 $I_n < \frac{2}{3}\varepsilon + O(\theta^n) < \varepsilon\ (n > N_\varepsilon)$. 從而定理已完全證明.

現在讓我們分別取 $f(x, t) = 1 - (x - t)^2$ 及 $f(x, t) = \cos^2\left(\frac{x - t}{2}\right)$, 於是根據(15)及(16)便分別導出 Landau 的奇異積分與 Vallée-Poussin 的奇異積分:

$$L_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^1 [1 - (x - t)^2]^n \phi(x)\, dx, \tag{19}$$

$$V_n(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\left(\frac{x-t}{2}\right)\phi(x)dx. \tag{20}$$

容易驗證，上面所取的特殊函數對於定理 3 的條件是全部滿足的，因此我們立刻可寫出下列 Landau 的和 Vallée-Poussin 的定理：

定理 4. 對於定義在 (0, 1) 上的每一個連續函數 $\phi(t)$，都有

$$\lim_{n\to\infty} L_n(t) = \phi(t), \tag{21}$$

而且在任一閉區間 $[a, b] \subset (0, 1)$ 上，(21)式的極限關係是一致地成立的。

定理 5. 對於定義在 $(-\pi, \pi)$ 上的每一連續函數 $\phi(t)$，都有

$$\lim_{n\to\infty} V_n(t) = \phi(t), \tag{22}$$

而且在任一閉區間 $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$ 上，(22)中的極限式是一致地成立的。

注意 $L_n(t)$ 乃是 t 的一個 $2n$ 次代數多項式，而且由於經過變數的綫性替換即可將閉區間 $a \leqslant t \leqslant b$ 變成 [0, 1]． 因此定理 4 實際隱涵了下列的 Weierstrass 多項式逼近定理：

定理 6. 設 $\psi(t)$ 是定義在 [0, 1] 上的任一連續函數，那末總存在着一個多項式敍列 $\{P_n(t)\}$ 一致地收斂到 $\psi(t)$.

事實上，Landau 當初研究奇異積分 $L_n(t)$ 的目的，就是爲了要給出 Weierstrass 逼近定理的一個“構造性”的證明．所謂構造性證明，就是指的對於逼近敍列 $\{P_n(t)\}$ 不僅論證其存在；而且還要在證明中顯示其作法． 由於 $L_n(t)$ 是由一個具體的多項式的定積分所構成，因此奇異積分 $L_n(t)$ 的確符合於 Landau 當初所設想的目的．

又如果將(20)式中的 $\cos^{2n}\left(\frac{x-t}{2}\right)$ 展開成一個三角多項式之後再積分，那末立即看出 $V_n(t)$ 實際是一個 n 次三角多項式．因此定理 5 又隱涵了三角多項式敍列逼近連續函數的定理．事實上，定理 5 還可以改進爲這樣的形式：對於定義在 $[-\pi, \pi]$ 上的每一個具有性質 $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$ 的連續函數 $\psi(t)$，奇異積分 $V_n(t)$ 恆一致收斂於這函數． 關於這個事實以及若干有關收斂速度估計的結論，我們還要在第二章中談到．

以上所論及的奇異積分，都具備着 Laplace 積分定理的標準形式，因此它們的收斂性乃是一目了然的． 現在我們再來考慮一個形式較爲別緻的奇異積分，當然它仍然可以看作是 Laplace 方法的一個應用．

先說一說思想的來源． 假設 $\{n\}$ 是一個自然數敍列而 $\{m\}$ 表一個子敍列；假設 $0 < r' < r = \liminf_{n\to\infty}\frac{m}{n}$，那末有這樣一個關聯於 Borel 求和法的事實，即