面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

结构有限元分析

结构有限元分析

（第二版）

结构有限元分析

（第二版）

赵经文　王宏钰　编著

科学出版社

科学出版社

面 向 21 世 纪 课 程 教 材

Textbook Series for 21st Century

结构有限元分析

（第二版）

赵经文　王宏钰　编著

科 学 出 版 社

2001

内 容 简 介

本书主要介绍结构有限元分析的基本理论和方法，包括刚架、平面、三维和板壳等内容。另外也简要介绍了结构动力分析、温度场和热应力计算。书中附有简单的有限元分析通用程序，供上机实践。

本书可作为工科院校力学本科生和机械类研究生的教材，也可供有关专业工程技术人员和教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

结构有限元分析（第二版）/赵经文，王宏钰编著.-北京：科学出版社，2001
（面向21世纪课程教材）
ISBN 7-03-009106-X

Ⅰ.结… Ⅱ.①赵…②王… Ⅲ.结构分析：有限元分析-高等学校-教材 Ⅳ.O342

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 87549 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2001年5月第 二 版 开本：787×960 1/16
2001年5月第一次印刷 印张：11 3/4
印数：1—3 000 字数：227 000

定价：20.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉）

第二版序言

在20世纪70年代推广应用有限元分析、举办讲习班和高校教学实践的基础上，本书第一版于1988年正式出版，主要用作工程力学本科和工科研究生教材。

在承担国家教委"面向21世纪工科力学系列课程教学内容与体系改革的研究与实践"项目过程中，我们认识到新世纪工程中新型复杂结构的分析和设计已不能按传统的材料力学方法解决了。国外知名大学的机械系本科都已将有限元方法纳入教学计划，国内工程界也更广泛地应用有限元通用程序分析复杂结构的静力和动力问题。我们认为面向21世纪的工科高校本科生有必要也有可能学会有限元方法，以适应新世纪工程技术的要求。为此，我们修改、精选并删减了本书第一版的部分内容，编写了这本作为面向21世纪工科力学系列课程的教材。

本书力求从物理直观入手，由浅及深地介绍有限元方法，着重于力学概念的阐述和工程结构的分析。读者不需先修弹性力学和结构力学，只在材料力学基础上直接学习有限元分析方法，用以解决工程实际问题。几年教学实践表明效果良好。经专家推荐和评审，出版本书修订版，作为"面向21世纪课程教材"，希望能被更多的工科本科生和研究生选用，为新世纪的工程技术服务。

本书内容适当、讲解通俗、易于自学，也可供工程技术人员自学参考。本书附有结构有限元分析的练习程序，通过该程序的应用练习，有助于理解有限元的基本概念、理论和方法，便于进一步使用大型通用程序，也可以用来分析不太复杂的实际结构。

本书再版承蒙哈尔滨工业大学杜善义院士和清华大学范钦珊教授的评审和推荐，特此致以深切的感谢。

限于作者的理论水平和实践经验，书中不当之处，恳切欢迎读者给予批评和指正。

编　者

2001年2月

前　言

从70年代开始，随同计算机的广泛应用，有限元法的研究和应用在我国得到了迅猛的发展。目前我国已拥有一定数量的各类计算机和有限元分析程序，需要有更多的人掌握、应用有限元方法。为适应这种形势，近年来高等学校工科学生和研究生选修有限元方法的人数逐年增加，工程技术人员已广泛地采用这种方法解决实际问题。

在我们多年讲授有限元法形成的讲义基础上，经过工程力学本科生、机械类研究生教学试用，修订写成本书。书中第二、三章通过简单的杆件结构分析和平面问题直接划分单元外理，建立有限元的基本概念和分析方法。四、五、八、九章则基于势能极小原理给出一般连续体的有限元分析方法和过程，并推广用于温度场的计算。六、七、十和十一各章则较详细地介绍了板、壳等复杂结构的有限元分析和有限元动力分析基础。本书以介绍目前广泛应用的位移协调元为主，鉴于非协调元的一些优点和特点，在第十二章中简单介绍了不相容单元和杂交元。各章后都附有一些复习题和参考文献，希望能对读者深入学习、研究有限元有所帮助。

本书力图从物理直观入手，由浅入深地介绍有限元方法，着重于力学概念的阐述和工程结构的分析，并通过一些框图说明其计算机分析过程。在此基础上，读者能更合理地应用此方法和采用各类有限元程序分析实际问题。

结构有限元分析用到弹性力学、矩阵代数和变分法等知识，本书的论述只涉及它们最基础的有关内容，以便于对它们接触较少的读者也能接受。

为便于掌握有限元方法，附录中给出实践用的有限元分析通用程序。程序用FORTRAN语言编写，可用于一般微型计算机，读者还可以更换其中单元刚阵和应力计算两个程序段，采用其他单元分析相应的结构。

本书可作为工程力学专业本科生和有关专业硕上研究生的教材，也可供工程技术人员和教师参考。

限于编者的理论水平和实践经验，书中会有不少缺点和不足，恳切希望读者给予指正。

编　者

主要符号

$[B]$	应变矩阵
$[C]$	阻尼矩阵
$[D]$	弹性系数矩阵
E	弹性模量
G	剪切模量
$[J]$	雅可比矩阵
$[K]$	刚度矩阵
$[M]$	质量矩阵
M	弯矩
$[N]$	形状函数矩阵
$\{p\}$	节点力
$\{Q\}$	节点载荷
$[S]$	应力矩阵
$[T]$	转换矩阵
$\{T\}$	温度
w	挠度
α	线膨胀系数
γ	剪应变
Δ	三角形面积
$\{\delta\}$	节点位移
ε	应变
θ	转角
μ	泊松比
$\left\{\frac{1}{\rho}\right\}$	曲率
σ	应力
τ	剪应力
$[\phi]$	方向余弦矩阵

作者简介

赵经文，哈尔滨工业大学教授。1958年毕业于北京航空学院飞机系。曾任哈尔滨工业大学理论力学教研室主任、工程力学系副主任。1989年2月至1991年2月于美国阿克拉荷马大学机械系访问研究。长期从事理论力学、有限元法等课程教学和计算力学、结构静动力分析以及塑性动力学等研究工作，发表学术论文20多篇。主编出版有《理论力学》(第五版)和《结构有限元分析》(第一版)，参编《机床设计手册》(第四篇)。1986年获黑龙江省教育系统劳动模范称号。

王宏钰，哈尔滨工业大学教授。1958年毕业于北京航空学院飞机系。曾任哈尔滨工业大学理论力学教研室主任、校本科教学委员会委员。长期从事理论力学和有限元法等课程教学工作，1989年获国家优秀教学成果奖及黑龙江省优秀教学成果一等奖。同时从事有限元方法、工程结构分析等研究工作，发表学术论文10多篇。参编出版有《理论力学》(第四版、第五版)、《理论力学解题指导及习题集》(第二版)、《结构有限元分析》(第一版)等教材。其中《理论力学》(第四版)于1988年获国家优秀教材奖。

目　　录

引　言

有限元是近似求解一般连续域问题的数值方法。它最先应用于结构的应力分析，很快就广泛应用于求解热传导、电磁场、流体力学等连续域问题。

例如，为分析直齿轮上一个齿内的应力分布，可分析如图 0-1 所示的一个平面截面内位移分布。作为近似解，可以先求出图中三角形各顶点位移。这里的三角形就是单元，其顶点就是节点。

从物理角度理解，可把一个连续的齿形截面分割成图 0-1 表示的很多小三形单元，而单元之间在节点处以铰链相连接，由单元组合而成的结构近似代替原连续结构。如果能合理地求得各单元的弹性特性，也就可以求出这个组合结构的弹性特性。这样，结构在一定的约束条件下，在给定的载荷作用下，就可以求解各节点的位移，进而求解单元内的应力。这就是有限元方法直观的、物理的解释。

从数学角度理解，是把图 0-1 所示的求解区域剖分成许多三角形子域，子域内的位移可用三角形各顶点的位移合理插值来表示。按原问题的控制方程(如最小势能原理等)和约束条件，可以解出各节点的待定位移。推广到其他的连续域问题，节点未知量也可以是压力、温度、速度等物理量。这就是有限元方法的数学解释。

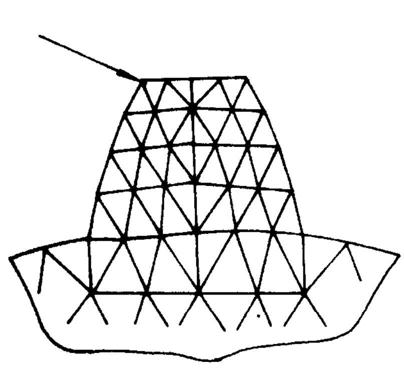

图 0-1

在一定条件下，由单元集合成的组合结构能近似于真实结构；在此条件下，分区域插值求解也就能趋近于真实解。这种近似的求解方法及其所应满足的条件，就是有限元方法所要研究的内容。

可以看出，有限元方法可适应于任意复杂的几何区域，便于处理不同的边界条件，这一点比常用的差分法更为优越。满足一定条件下，单元越小，节点越多，有限元数值解的精度也就越高，电子计算机的大存贮量和高计算速度为此提供了必要的手段。另外，由单元计算到集合为整体区域的有限元分析，都很适应于计算机的程序设计，可由计算机自动完成，这也是有限元法得以迅速发展的原因之一。

有限元方法是与工程应用密切结合的，是直接为产品设计服务的。因而随着有限元理论的发展与完善，各种大大小小、专用的、通用的有限元结构分析程序也大量涌现出来。大

型通用程序一般包括结构静力分析、动力分析、稳定性以及非线性分析等,有的还包括热传导、热应力、流体等分析,有齐全的单元库和有效的解算手段。目前,一般的工程结构分析问题,都可以直接用通用程序求解,不必花费精力和时间另编计算程序。但是,为了合理地使用通用程序、准备数据以及恰当地分析计算结果,都要求对有限元基本理论及程序设计有一定程度的理解。随着电子计算机的广泛应用,结构有限元分析与产品设计结合起来,形成产品分析、设计、制造一体化(CAD、CAM),这将是工程生产的发展方向,有限元法在其中将起着重要作用。

有限元发展至今已有 40 多年的历史了,已经比较成熟了,但在巩固有限元方法的物理、数学基础方面,扩大其应用领域,以及求解诸如非线性、不同物理作用相互耦合、多体机构动态分析以及由材料微观结构计算其力学性能等复杂问题方面,有限元法还会不断发展并取得成功。在我国经济建设过程中,推广有限元的应用,以改进产品设计、提高产品性能,更是非常现实的问题。

结构的有限元分析涉及力学原理、数学方法和计算机程序设计等几个方面,诸方面互相结合才能形成这一完整的分析方法。

无论对什么样的结构(如平面、三维、板壳等),有限元分析过程都是一样的、程序化了的。一般典型的步骤为:(1)将结构划分成单元,(2)单元特性分析,(3)集合成整体,(4)数值求解。当然,在计算程序中后三个步骤可以是互相交叉的。对于不同的结构,采用的单元是不相同的,但各种单元的分析方法又是一致的。掌握一种典型结构(如平面问题)的有限元分析方法,就可以推广于各种结构,这一点对工程应用也是十分方便的。

第一章　杆件结构

有限元方法是在结构分析的矩阵位移法基础上发展起来的。杆件结构是工程中常见的结构，比较简单，其中每个杆件都是一个明显的单元；而且杆单元受力与位移间的关系又是很容易求得的，且其物理概念清晰，比较直观。本章将以直梁及平面刚架为例，说明结构分析的矩阵位移法。虽然它还不是有限元方法，而且对于这种简单结构也不必要这样求解。但是，这里采用的分析方法、表达方式以及涉及到的一些概念，对一般的有限元分析都是非常有用的。

1.1　直　　梁

1.1.1　节点位移与节点载荷

图 1-1(a)为一简单的变截面梁，Z、M 为施加于截面 B 处的集中力及力偶，是外载荷。按此梁的结构及受力情况，很自然地可将它分为 3 段，每段为一个单元。各段间交界的截面可视为连接单元的节点，两端的支座 A 及 D 也视为节点。这样，实际的梁结构就可简化为图 1-1(b)所示的计算模型，共有 3 个单元，4 个节点，各单元与节点统一编号如图 1-1(b)所示。

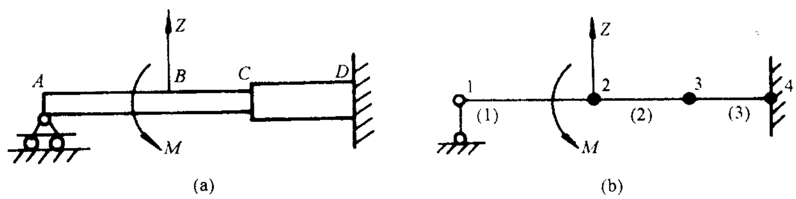

图 1-1

按平截面假设，梁受载荷发生弯曲变形时，各截面的位移应包括截面中性轴处的挠度 f 及截面的转角 θ 两项，这两项就是节点处位移的两个分量。任一节点 i 处位移的两个分量为 f_i 及 θ_i，可以用列阵$\{\delta_i\}$表示[1)]

---

1) 以后均以花括号{}表示一列阵，方括号[]表示一行阵或矩阵。上角的 T 为矩阵转置符号，为印刷方便，常将列阵写为行阵的转置。——作者注

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = [f_i \quad \theta_i]^T$$

$\{\delta_i\}$称为 i 节点的节点位移，f_i 与 θ_i 是它的两个分量。对应于节点位移，任一节点 i 的载荷也有两项分量，即横向力 Z_i 和弯曲力偶 M_i；它们是与节点位移相对应的广义力，也可以列阵表示

$$\{Q_i\} = \begin{Bmatrix} Z_i \\ M_i \end{Bmatrix} = [Z_i \quad M_i]^T$$

$\{Q_i\}$称为 i 节点的节点载荷，Z_i、M_i 是它的两个分量。如梁被划分有 n 个节点，显然它应有 $2n$ 项节点位移分量和 $2n$ 项节点载荷分量。此直梁结构的全部节点位移可记为$\{\delta\}$，全部节点载荷可记为$\{Q\}$，它们都可视为各具有 $2n$ 个分量的矢量，我们称此梁具有 $2n$ 个自由度。为计算方便，节点位移和节点载荷的正向应互相一致。本书中规定 f_i 和 Z_i 都以向上方为正，θ_i 和 M_i 都以逆时针方向为正。

若直梁结构只受有集中载荷，在做上述分析时，受集中力处都应作为节点。若梁受有分布载荷时，可近似地将它分作为相当集中力，作用于相应的节点上[1]。为解决直梁弯曲问题，可先求在全部节点载荷$\{Q\}$作用下引起的全部节点位移$\{\delta\}$[2]，进而再求出单元内的位移和内力。

1.1.2　单元弹性特性——单元刚度矩阵

整个梁结构是由单元组成的，为求全部节点位移$\{\delta\}$与节点载荷$\{Q\}$之间的联系，可先分析每个单元上节点力与节点位移之间的联系。图 1-2 表示梁内任意的一个单元，设此单元编号为 e，两个节点编号为 i、j。梁变形时，e 单元的 i、j 两节点的位移与整个结构上相对应两节点的位移是相同的，有

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \qquad \{\delta_j\} = \begin{Bmatrix} f_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

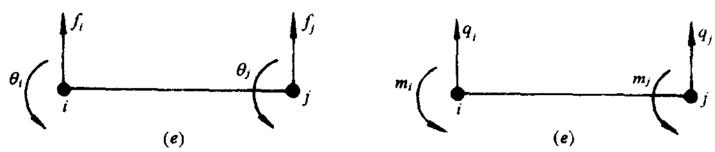

图 1-2

1) 一般应按形状函数等效地分配到相应的节点，见后面各章。

2) 支座约束反力也是节点载荷，它虽是未知的，但对应的节点位移却是已知的(受约束)。

一个单元有两个节点，共有 4 项节点位移分量，如以$\{\delta\}^e$表示 e 单元的全部节点位移，i、j 为两节点编号，则应有

$$\{\delta\}^e=[f_i\quad \theta_i\quad f_j\quad \theta_j]^T$$

$\{\delta\}^e$ 称为 e 单元的节点位移，它可视为一个有 4 项分量的矢量，此单元具有 4 个自由度。

梁受载荷而变形时，e 单元的 i、j 两节点处应受到力的作用，也就是 e 段梁上 i、j 两截面的内力，包括有切力 q 和弯矩 m，称之为节点力，可用列阵$\{p\}$来表示。e 单元有两个节点 i、j，其节点力各为

$$\{p_i\}=\begin{Bmatrix}q_i\\m_i\end{Bmatrix}\qquad \{p_j\}=\begin{Bmatrix}q_j\\m_j\end{Bmatrix}$$

e 单元的全部节点力共有 4 项分量，以列阵$\{p\}^e$表示，则有

$$\{p\}^e=[q_i\quad m_i\quad q_j\quad m_j]^T$$

为计算方便，各单元节点力的正向都取为一致，与节点载荷的正方向是一致的。即切力 q 均以向上为正，弯矩 m 均以逆时针为正，这一点与材料力学中梁的内力符号规定不同。应注意到，节点载荷与节点力是不同的，前者是梁结构在节点处受到的外载荷，后者是由梁中截出来的单元在截面处受到的内力，就是材料力学中梁的切力和弯矩。只是此处的符号规定与材料力学中符号规定有所不同。

由上述分析可见，梁结构的每个单元都是在两端受力作用下而发生变形的。显然，e 单元两端的节点力$\{p\}^e$与此单元的节点位移$\{\delta\}^e$是有联系的。在弹性范围内、小变形情况下，两者间有线性关系，用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix}q_i\\m_i\\q_j\\m_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}f_i\\\theta_i\\f_j\\\theta_j\end{Bmatrix}\tag{1.1}$$

简记为

$$\{p\}^e=[k]^e\{\delta\}^e$$

其中$[k]^e$为 e 单元的刚度矩阵，简称单元刚阵，此处为 4×4 的方阵，其中每个元素都是常数。

如梁单元的 4 项节点位移分量另作编号，记为 u_1、u_2、u_3、u_4，相应的节点力亦另作编号，记为 s_1、s_2、s_3 和 s_4，则式(1.1)可改写为

$$\begin{Bmatrix}s_1\\s_2\\s_3\\s_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{Bmatrix}$$

由上式很容易看出：当 $u_1=1$，且 $u_2=u_3=u_4=0$ 时，有 $s_1=a_{11}$，$s_2=a_{21}$，$s_3=a_{31}$，$s_4=a_{41}$。一般，当某一项位移分量 $u_l=1$，且其余位移分量皆为零时，对应的一组节点力

$$s_m = a_{ml} \quad (m,l = 1,2,3,4)$$

即，单元刚阵中任一元素 a_{ml} 应等于：当 l 号节点位移分量为 1，且其他节点位移分量皆为零时，对应的 m 号节点力分量。这就是单元刚度矩阵中各元素的物理意义。由功的互等定理可知

$$a_{ml} = a_{lm}$$

即，单元刚度矩阵是一对称的方阵。

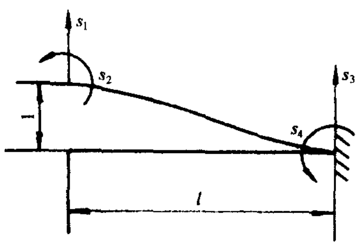

图 1-3

如 e 单元长为 l，弹性模量为 E，截面惯性矩为 J，当 $u_1=1$，且 $u_2=u_3=u_4=0$ 时，梁单元变形如图 1-3 所示，相当于一种悬臂梁的变形。由梁的变形公式有：

挠度

$$u_1 = 1 = \frac{s_1 l^3}{3EJ} - \frac{s_2 l^2}{2EJ}$$

转角

$$u_2 = 0 = \frac{s_1 l^2}{2EJ} + \frac{s_2 l}{EJ}$$

可解出

$$s_1 = \frac{12EJ}{l^3} = a_{11} \qquad s_2 = \frac{6EJ}{l^2} = a_{21}$$

再由平衡方程解得

$$s_3 = - s_1 \qquad s_4 = s_1 l - s_2$$

可得

$$s_3 = \frac{-12EJ}{l^3} = a_{31} \qquad s_4 = \frac{6EJ}{l^2} = a_{41}$$

又，当 $u_2=1\text{rad}$(弧度)，且 $u_1=u_3=u_4=0$ 时，梁单元变形如图 1-4 所示，相当于另一种悬臂梁的变形，同样由梁的变形公式及平衡方程可以求得

$$a_{12} = \frac{6EJ}{l^2} \qquad a_{22} = \frac{4EJ}{l}$$

$$a_{32} = \frac{-6EJ}{l^2} \qquad a_{42} = \frac{2EJ}{l}$$

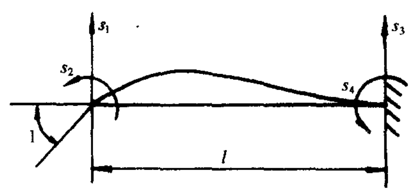

图 1-4

用同样的方法，可解出单元刚阵的其余各元素，即可求得单元刚阵，有

$$[k]^e = \frac{EJ}{l^3}\left[\begin{array}{cc:cc} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \hdashline -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{array}\right] \tag{1.2}$$

由上面的计算结果也可看出，单元刚阵是对称的。

在有限元分析中，常常将位移、力及刚度矩阵都按节点来分组。如图 1-2 所示的单元，其单元的节点力和节点位移可分组写为

$$\{p\}^e = \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix}^e \qquad \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}^e$$

这里，$\{p\}^e$ 与 $\{\delta\}^e$ 为各含 4 个分量的矢量，而 $\{p_i\}$、$\{p_j\}$ 及 $\{\delta_i\}$、$\{\delta_j\}$ 都是各含两个分量的矢量。因此单元的刚度矩阵式(1.2)也可按虚线分块表示为

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}^e$$

其中每一子块 $[k_{ij}]^e$ 都是 2×2 的子矩阵。这样，式(1.1)可分块表示为

$$\begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix}^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}^e \tag{1.3}$$

将上式按矩阵分块相乘，可展开为两个矢量方程，即

$$\{p_i\}^e = [k_{ii}]^e\{\delta_i\}^e + [k_{ij}]^e\{\delta_j\}^e$$
$$\{p_j\}^e = [k_{ji}]^e\{\delta_i\}^e + [k_{jj}]^e\{\delta_j\}^e$$

其中每一个矢量方程都含两个代数方程，总共为 4 个方程，反映出 4 个节点力分量与 4 个节点位移分量之间的弹性联系。

按刚度矩阵的物理意义，式(1.3)中单元刚阵的子矩阵 $[k_{ij}]^e$ 表示：当 j 节点取两组单位位移（$f_j=1,\theta_j=0$ 及 $f_j=0,\theta_j=1$），且其他节点位移皆为零时，对应于 i 节点的两组节点力。简述为：$[k_{ij}]^e$ 为 j 节点取单位位移，且其他节点位移为零时，对应于 i 节点的节点力。这里，我们把一个节点的位移和力，如 $\{\delta_i\}^e$ 和 $\{p_i\}^e$ 都看成一个量（矢量），对应的刚阵元素 $[k_{ij}]^e$ 也看成一个量（矩阵）。这种按节点将位移、力及刚度矩阵元素分块的矩阵表示方法，在有限元分析中是广泛采用的。

1.1.3　单元的集合与刚度矩阵的叠加

图 1-1 所示的梁共有 3 个单元，每个单元都有如式(1.3)的方程，即

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}^1 \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}^1 \tag{1.4a}$$

$$\begin{Bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}^2 \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}^2 \tag{1.4b}$$

$$\begin{Bmatrix} p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}^3 \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}^3 \tag{1.4c}$$

单元间在节点处是相连的，梁有静变形时，节点上受力应是相互平衡的。为理解有限元总体方程的建立，可把节点作为独立的一部分，单元之间不是直接相连，而是通过节点相连的。对于梁，在节点处相当于取出一无限薄片作为独立的一部分。如图 1-1(b)中，单元(1)与(2)在节点 2 处相连。将节点 2 单独取出来，节点载荷 Z_2 与 M_2 就作用于此节点，如图 1-5 所示。单元(1)、(2)都与节点 2 相连，都对节点 2 有作用力。(1)单元对节点 2 的作用力，大小等于(1)单元节点 2 处的节点力 q_2^1、m_2^1 [1]，方向相反；(2)单元对节点 2 的作用力，大小等于(2)单元节点 2 处的节点力 q_2^2、m_2^2，方向相反。图 1-5 表示出节点 2 上的外载荷 Z_2、M_2 和相邻单元与节点 2 之间的相互作用力。

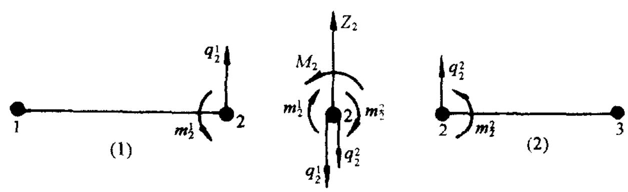

图 1-5

根据节点 2 的平衡条件，可得

$$Z_2 = q_2^1 + q_2^2$$
$$M_2 = m_2^1 + m_2^2$$

或简写成

$$\{Q_2\} = \{p_2\}^1 + \{p_2\}^2 \tag{1.4d}$$

上式也可理解为：节点 2 受到外载荷$\{Q_2\}$作用，此载荷则要分配到与节点 2 相连的单元(1)、(2)上，就是相邻单元在节点 2 处的节点力$\{p_2\}^1$与$\{p_2\}^2$，它们可从式(1.4a)、(1.4b)中求得。

由式(1.4a)有

$$\{p_2\}^1 = [k_{21}]^1\{\delta_1\}^1 + [k_{22}]^1\{\delta_2\}^1$$

由式(1.4b)有

1) 上标表示(1)单元，下标表示节点 2。